Descomposición del ciclo: El Filtro de Hodrick-Prescott

Jesús Rodríguez López

Presentación

- Supongamos que (el logaritmo de) una serie temporal x_t es la suma de una componente transitoria (c_t, ciclo) y una componente permanente (z_t, tendencia)

$$x_t = c_t + z_t,$$

Presentación

- Supongamos que (el logaritmo de) una serie temporal x_t es la suma de una componente transitoria (c_t, ciclo) y una componente permanente (z_t, tendencia)

$$x_t = c_t + z_t,$$

- La identificación del ciclo según el filtro de Hodrick-Prescott es la siguiente:

$$\begin{aligned} \{\widehat{z}_t\} &= \arg\min_{\{z_t\}} \sum_{t=2}^{T-1} (x_t - z_t)^2 + \lambda \left[(z_{t+1} - z_t) - (z_t - z_{t-1}) \right]^2 \\ \lambda &= \text{constante.} \end{aligned}$$

Presentación

- Supongamos que (el logaritmo de) una serie temporal x_t es la suma de una componente transitoria (c_t, ciclo) y una componente permanente (z_t, tendencia)

$$x_t = c_t + z_t,$$

- La identificación del ciclo según el filtro de Hodrick-Prescott es la siguiente:

$$\begin{aligned} \{\widehat{z}_t\} &= \arg\min_{\{z_t\}} \sum_{t=2}^{T-1} (x_t - z_t)^2 + \lambda \left[(z_{t+1} - z_t) - (z_t - z_{t-1})\right]^2 \\ \lambda &= \text{constante.} \end{aligned}$$

- $(x_t - z_t)^2$: pérdidas por desviaciones con respecto de la tendencia.

Presentación

- Supongamos que (el logaritmo de) una serie temporal x_t es la suma de una componente transitoria (c_t, ciclo) y una componente permanente (z_t, tendencia)

$$x_t = c_t + z_t,$$

- La identificación del ciclo según el filtro de Hodrick-Prescott es la siguiente:

$$\begin{aligned} \{\widehat{z}_t\} &= \arg\min_{\{z_t\}} \sum_{t=2}^{T-1} (x_t - z_t)^2 + \lambda \left[(z_{t+1} - z_t) - (z_t - z_{t-1})\right]^2 \\ \lambda &= \text{constante.} \end{aligned}$$

- $(x_t - z_t)^2$: pérdidas por desviaciones con respecto de la tendencia.
- $\left[(z_{t+1} - z_t) - (z_t - z_{t-1})\right]^2$: pérdidas derivadas del cambio en la tendencia. Cuando $\lambda = 0 \Rightarrow x_t = z_t$, $c_t = 0$.

El filtro de Hodrick-Prescott

- Definamos:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_T \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_T \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

El filtro de Hodrick-Prescott

- Definamos:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_T \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_T \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- Así

$$\widehat{z} = \arg\min_z (x - z)' (x - z) + \lambda (Az)' (Az),$$

El filtro de Hodrick-Prescott

- Condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} -\left(x-\widehat{z}\right)+\lambda A'A\widehat{z} &= 0, \\ &\Rightarrow \left(I+\lambda A'A\right)\widehat{z}=x. \end{aligned}$$

El filtro de Hodrick-Prescott

- Condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} -(x-\widehat{z})+\lambda A'A\widehat{z} &= 0, \\ &\Rightarrow \left(I+\lambda A'A\right)\widehat{z}=x. \end{aligned}$$

- Filtro HP:

$$\begin{aligned} \widehat{z} &= \left(I+\lambda A'A\right)^{-1} x \\ \widehat{z}_t &= \sum_j \xi_j x_{t-j}. \end{aligned}$$

El filtro de Hodrick-Prescott

- Condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} -\left(x-\widehat{z}\right)+\lambda A'A\widehat{z} &= 0, \\ &\Rightarrow \left(I+\lambda A'A\right)\widehat{z}=x. \end{aligned}$$

- Filtro HP:

$$\begin{aligned} \widehat{z} &= \left(I+\lambda A'A\right)^{-1}x \\ \widehat{z}_t &= \sum_j \xi_j x_{t-j}. \end{aligned}$$

- El ciclo se calcula de manera residual:

$$\begin{aligned} \widehat{c}_t &= x_t-\widehat{z}_t \\ \widehat{c} &= \left[I-\left(I+\lambda A'A\right)^{-1}\right]x. \end{aligned}$$

Aspectos del filtro

- Una fila del filtro tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned}
\lambda\widehat{z}_{t-2} - 4\lambda\widehat{z}_{t-1} + (6\lambda+1)\,\widehat{z}_t - 4\lambda\widehat{z}_{t+1} + \lambda\widehat{z}_{t+2} &= x_t \\
\left[\lambda L^2 - 4\lambda L + (6\lambda+1) - 4\lambda L^{-1} + \lambda L^{-2}\right]\widehat{z}_t &= x_t, \\
\left[\lambda\,(1-L)^2\left(1-L^{-1}\right)+1\right]\widehat{z}_t &= x_t.
\end{aligned}$$

Aspectos del filtro

- Una fila del filtro tiene la siguiente estructura

$$
\begin{aligned}
\lambda\widehat{z}_{t-2} - 4\lambda\widehat{z}_{t-1} + (6\lambda+1)\,\widehat{z}_t - 4\lambda\widehat{z}_{t+1} + \lambda\widehat{z}_{t+2} &= x_t \\
\left[\lambda L^2 - 4\lambda L + (6\lambda+1) - 4\lambda L^{-1} + \lambda L^{-2}\right]\widehat{z}_t &= x_t, \\
\left[\lambda\,(1-L)^2\left(1-L^{-1}\right) + 1\right]\widehat{z}_t &= x_t.
\end{aligned}
$$

- Por tanto

$$
\begin{aligned}
\widehat{z}_t &= \frac{1}{\lambda\,(1-L)^2\left(1-L^{-1}\right)+1}x_t, \\
\widehat{c}_t &= \frac{\lambda\,(1-L)^2\left(1-L^{-1}\right)}{\lambda\,(1-L)^2\left(1-L^{-1}\right)+1}x_t.
\end{aligned}
$$

Esto implica que la serie está siendo diferenciada cuatro veces.

Selección de lambda

1. No hay un criterio claro a la hora de elegir el valor de λ. Hodrick-Prescott (1997): "If the cyclical components and the second differences of the growth components were identically and independently distributed, normal variables with means zero and variances σ_1 and σ_2 (which they are not), the conditional expectation of the y_t^{tr} , given the observations, would be the solution to program (2) when $\sqrt{\lambda} = \sigma_1/\sigma_2$, ... "Our prior view is that a 5 percent cyclical component is moderately large, as is a 1/8 of 1 percent change in the growth rate in a quarter. This led us to select $\sqrt{\lambda} = 5/\ (1/8) = 40$ or $\lambda = 1600$".
2. Para datos trimestrales, $\lambda = 1600$. Para datos anuales $\lambda = 400$.

Selección de lambda

1. Marcet y Ravn (2003) proponen un método para endogeneizar el parámetro λ, es decir, seleccionan su valor como resultado de un problema de optimización.
2. Para varios países de la OCDE, el valor $\lambda = 1600$ es apropiado excepto para España, Japón e Italia. Para España, sugieren $\lambda = 5385$ ó $\lambda = 6369$.
3. ¿Qué implicaciones prácticas tiene la selección de uno u otro valor de λ? Véase el programa de MATLAB correspondiente.

Interpretando un correlograma

1. Una vez que se ha identificado el ciclo y la tendencia de un conjunto de serie, es importante calcular el correlograma.
2. El **correlograma** recoge los coeficientes de correlación del ciclo de la producción (el ciclo económico, en sentido estricto) con los valores retardados y adelantados de los ciclos de las otras variables y de los suyos propios.
3. Recordemos que el **coeficiente de correlación** entre x e y viene dado por

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \in [-1, 1],$$

y permite ver en qué proporción y en qué dirección están relacionados los movimientos de x e y.

Interpretando un correlograma

1. Una primera utilidad del correlograma es ver la volatilidad de las series. La teoría económica, en ocasiones, hace implicaciones sobre los momentos de orden dos de las variables aleatorias. Por ejemplo, de acuerdo con la inversión debería ser más volátil que el PIB (teoría Q de la inversión), y el consumo debería ser más suave que el PIB (hipótesis de la renta permanente y del ciclo vital).
2. Decimos que una variable x es **volátil** si

$$\frac{\sigma\left(c_x\right)}{\sigma\left(c_{PIB}\right)} > 1.$$

Interpretando un correlograma

1. Una segunda utilidad del correlograma es la identificación de la simpatía o sintonía de una serie cíclica con respecto al ciclo del PIB. Decimos que la variable x es **procíclica** si

$$\rho\left(c_x, c_{PIB}\right) > 0.$$

2. De igual modo:

$$\begin{aligned} \rho\left(c_x, c_{PIB}\right) &< 0 \Rightarrow \textbf{contracíclica,} \\ \rho\left(c_x, c_{PIB}\right) &\simeq 0 \Rightarrow \textbf{acíclica} \end{aligned}$$

3. Por ejemplo, el empleo asalariado (por cuenta ajena) suele tener un comportamiento **procíclico**, el empleo autónomo (por cuenta propia) suele ser contracíclico, y el empleo público es, en buena medida, **acíclico**.

Interpretando un correlograma

1. Una tercera utilidad del correlograma es analizar los cambios en las fases. Hay variables que anticipan cambios en otras.
2. Así pues, considera

$$
\begin{aligned}
k^* &= \max_k \left| \rho\left(c\left(x\right)_{t+k}, c\left(PIB_t\right)\right) \right| \\
k &= -6, -5, \ldots -1, 0, 1, \ldots 5, 6.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
k^* &> 0 \Rightarrow \text{Indicador } \textbf{retardado}, \\
k^* &< 0 \Rightarrow \text{Indicador } \textbf{adelantado},
\end{aligned}
$$