Pricing the equity of a firm using extendible options[*]

Isabel Abínzano
Universidad Pública de Navarra

Javier F. Navas
Universidad Pablo de Olavide

This draft: July 10, 2007

Forthcoming: *Revista de Economía Financiera*

Abstract

When a company is in financial distress, debt restructuring is one possible course of action. In this paper we propose a model for pricing equity when the firm can carry on a reorganization of its capital structure. The valuation formulae we obtain are inspired in the concept of extendible options, introduced by Longstaff (1990). Unlike existing models, our model allows for: costly restructuring, modification of the face value of debt, and multiple renegotiations. We also study the optimal reorganization policy when there is only one debt restructuring with fixed cost.

JEL Classification: G13, G32, G34.

Key words: Financial distress, reorganization, extendible options.

[*] Los autores agradecen a Carmen Aranda, Santiago Forte, Manuel Moreno, J. Ignacio Peña, Gonzalo Rubio, Luis Seco, participantes en los seminarios de la Universidad de Navarra y del XI Foro de Finanzas, y dos evaluadores anónimos sus útiles comentarios y sugerencias. Isabel Abínzano agradece la hospitalidad del Departamento de Empresa de la Universidad de Navarra y del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Toronto, donde parte de esta investigación ha sido realizada. Asimismo agradece la financiación recibida de la Fundación ICO y del Ministerio de Educación y Ciencia (MEC, SEJ2006-14809-C03-01).

Valoración de los recursos propios de una empresa mediante opciones extensibles*

Isabel Abínzano
Universidad Pública de Navarra

Javier F. Navas
Universidad Pablo de Olavide

Esta versión: 10 de julio de 2007
Aceptado en: *Revista de Economía Financiera*

Resumen

Ante la presencia de dificultades financieras las empresas poseen diferentes alternativas, entre las cuales se encuentra la reorganización. En este artículo valoramos los recursos propios de una empresa cuando ésta tiene la posibilidad de llevar a cabo una reorganización de su estructura financiera. Las fórmulas de valoración obtenidas se basan en el concepto de opción de compra extensible introducido por Longstaff (1990). A diferencia de otros modelos, el modelo propuesto permite que la reorganización tenga un coste no nulo, que se pueda modificar el valor nominal inicial de la deuda emitida por la empresa y que la reorganización requiera de varias negociaciones. Una vez valorados los recursos propios de la empresa, estudiamos el diseño óptimo de la renegociación de su deuda cuando tiene la posibilidad de reorganizarse una vez y cuando el coste de la reorganización es constante.

Clasificación JEL: G13, G32, G34.

Palabras clave: Crisis financiera, reestructuración, opciones extensibles.

---

* Los autores agradecen a Carmen Aranda, Santiago Forte, Manuel Moreno, J. Ignacio Peña, Gonzalo Rubio, Luis Seco, participantes en los seminarios de la Universidad de Navarra y del XI Foro de Finanzas, y dos evaluadores anónimos sus útiles comentarios y sugerencias. Isabel Abínzano agradece la hospitalidad del Departamento de Empresa de la Universidad de Navarra y del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Toronto, donde parte de esta investigación ha sido realizada. Asimismo agradece la financiación recibida de la Fundación ICO y del Ministerio de Educación y Ciencia (MEC, SEJ2006-14809-C03-01).

1. Introducción

Según la definición de Ross et al. (2005), una empresa presenta dificultades financieras cuando sus flujos de efectivo no son suficientes para satisfacer las obligaciones actuales. En dicho caso, la empresa tiene a su alcance varias alternativas para resolver la situación, que podemos clasificar en medidas operativas y financieras.

Las medidas operativas son aquellas que persiguen la reorganización operativa o funcional de la empresa, mientras que las medidas de reestructuración financiera son las que pretenden, mediante el acuerdo con los acreedores, modificar la estructura de vencimientos de la deuda y/o reducir su valor nominal. Dentro de las medidas de reestructuración financiera podemos distinguir entre liquidación y reorganización. La liquidación hace referencia al finiquito de una empresa como un negocio en marcha. Por su parte, la reorganización es la opción de mantener la empresa en funcionamiento, y consiste en una disminución ("quita") de las deudas pendientes, en un aplazamiento ("espera") del pago de éstas, o en una combinación de ambas.

La reorganización es a menudo deseable debido a que evita pérdidas derivadas de la liquidación o incentivos no óptimos inherentes a los contratos existentes. Para la mayoría de las empresas, la reorganización se rige por una normativa similar al Capítulo 11 de la Reforma del Código de Quiebra de 1978 estadounidense (*Bankruptcy Reform Act*). El principal objetivo del Capítulo 11 es mantener la empresa en funcionamiento mientras se elabora un plan de reorganización. Bajo este procedimiento, los accionistas recuperan el control de la empresa mientras diseñan un plan de reestructuración, para lo cual cuentan con 120 días, además de 60 días adicionales para obtener la aceptación por parte de los acreedores.

De este modo, la posibilidad de que la empresa pueda llevar a cabo una reorganización o varias deberá afectar al valor de los recursos propios de la misma. Merton (1974) es el primero en aplicar la teoría de valoración de opciones desarrollada por Black y Scholes (1973) a la valoración de los recursos propios. Sin embargo, dicha aplicación no contempla la posibilidad de que la empresa pueda llevar a cabo una reorganización. Leland (1994) estudia el efecto que una reorganización tiene en el valor de la empresa, y observa cómo el valor de los recursos propios de la empresa aumenta cuando se lleva a cabo una reorganización. Sin embargo, no desarrolla una expresión que valore los recursos propios en función del valor nominal y la fecha de vencimiento de la deuda. Otros trabajos como Anderson y Sundaresan (1996), Mella-Barrall y Perraudin (1997) y Mella-Barral (1999), estudian la influencia del valor nominal de la deuda y su vencimiento en el proceso dinámico de negociaciones previo a la reorganización, aunque tampoco desarrollan un modelo que valore la deuda o los recursos propios de la empresa.

Por otro lado, en la literatura encontramos algunos trabajos que sí valoran los recursos propios en caso de que pueda llevarse a cabo una reorganización de la empresa. Entre ellos se encuentra el trabajo de Franks y Torous (1989), que estudia la reorganización de una empresa considerando la opción de aplazar el pago de la deuda como una opción de compra. Sin embargo, este trabajo supone que la deuda emitida para financiar la deuda inicial ha de ser necesariamente mayor que ésta, lo cual difiere de Haugen y Senbet (1978, 1988), que argumentan que los acreedores pueden ofrecer una reducción de la deuda con el objetivo de evitar la quiebra y los costes asociados a ésta. Por su parte, Forte y Peña (2003) estudian los efectos de la refinanciación de la deuda sobre el diferencial de crédito y sobre la calificación de la deuda. Su artículo también exige que el valor nominal de la nueva deuda sea mayor que el valor nominal de la deuda inicial. Otra limitación de este trabajo es que no permite que exista un coste de negociación, lo cual no es consistente con la evidencia empírica obtenida por Betker (1997), que encuentra que el coste medio de una reorganización es el 3.93 % del valor de mercado de la empresa antes de experimentar dificultades financieras.

Dumitrescu (2007) sí que posibilita que la reorganización sea costosa, y además demuestra cómo el valor de los recursos propios de la empresa aumenta cuando existe la posibilidad de llevar a cabo una reorganización. Sin embargo, sólo considera la posibilidad de que la empresa esté financiada por dos deudas, y que únicamente la deuda con vencimiento anterior se pueda reorganizar. Además, la expresión que desarrolla Dumitrescu (2007) únicamente permite analizar si la reorganización aumenta o disminuye el valor de los recursos propios, es decir, no permite calcular el valor de los recursos propios para una determinada estructura de capital. Moraux y Navatte (2004) también contemplan la posibilidad de que la reorganización sea costosa. En su trabajo relajan los supuestos realizados por Longstaff (1990) en la aplicación de las denominadas opciones extensibles flexibles. Estas opciones otorgan al emisor de la opción la posibilidad de elegir la duración del período de extensión. Como ejemplo de la utilización de este tipo de opciones, Longstaff (1990) analiza el caso de una empresa en la que los acreedores tienen la posibilidad de extender el vencimiento de la deuda. Si los costes de quiebra son positivos, Longstaff (1990) afirma que los acreedores siempre tienen incentivos a extender el vencimiento de la deuda. La duración del aplazamiento será aquella que maximice el beneficio de la extensión. Para superar los inconvenientes hallados en Longstaff (1990), Moraux y Navatte (2004) introducen nuevos supuestos, contemplando la posibilidad de que la reorganización sea costosa o que exista una rebaja de la deuda, aunque no simultáneamente. Por otra parte, determinan que el intervalo de extensión de la deuda está comprendido entre un límite endógeno o exógeno y el valor nominal de la deuda.

Una vez revisada la literatura existente, en este trabajo queremos desarrollar un modelo de valoración de los recursos propios de una empresa en el caso de que ésta pueda llevar a cabo tanto una como varias reorganizaciones de su deuda, ya sea mediante la petición formal de quiebra o mediante negociaciones privadas, contemplando la posibilidad de ambos tipos de reorganización, quita o espera, así como una combinación de ambas. De igual modo, permitimos que dicha valoración no incluya restricciones sobre el valor nominal de la deuda emitida ni sobre el coste de las negociaciones necesarias para llevar a cabo la reorganización. A diferencia de los trabajos de Longstaff (1990) y Moraux y Navatte (2004), suponemos que los acreedores no deciden la duración de la extensión del vencimiento de la deuda, sino que son los accionistas los que desarrollan el plan de reorganización, dentro de un procedimiento formal similar al antes comentado.

El resto del artículo está organizado como sigue: en la sección 2 se revisan algunos trabajos sobre reorganización existentes en la literatura. En la sección 3 se presenta el modelo propuesto y sus posibles aplicaciones. Finalmente, en la sección 4 se exponen las conclusiones de este trabajo.

2. Una introducción al problema de la reorganización

Franks y Torous (1989) estudian la reorganización de una empresa en el caso de que se acoja al Capítulo 11 de la Reforma del Código de Quiebra estadounidense. La principal aportación de Franks y Torous (1989) consiste en que el aplazamiento del pago de la deuda puede verse como el ejercicio de una opción de compra adquirida por la empresa al acreedor en la fecha de vencimiento inicial. A continuación mostramos su planteamiento.

Sea una empresa financiada con recursos propios y una deuda con valor nominal K_1 y vencimiento en T_1. En el caso de que no pueda devolver su deuda en T_1, según el Capítulo 11 de la Reforma de la Ley de Quiebra de 1978, la empresa puede ejercer la opción de aplazar el pago de la deuda hasta T_2, con $T_2 > T_1$. Suponiendo que existe información simétrica, el valor de los recursos propios en T_1 es:

$$E(\mathrm{T}_1) = máx\{e(T_1), C(T_1)\} \tag{1}$$

donde $e(T_1)$ es el valor de lor recursos propios si la empresa no se acoge al Capítulo 11, y $C(T_1)$ es el valor de la opción a pagar el valor nominal de la deuda, ajustado por intereses, en cualquier momento hasta T_2.

Debemos señalar que dicha opción a retrasar el pago de la deuda es una opción americana, puesto que una vez en el Capítulo 11, la empresa tiene derecho a resolver sus obligaciones en cualquier momento hasta T_2. Por otro lado, el precio de ejercicio de la opción se incrementa determinísticamente a lo largo del tiempo, puesto que cuanto más tiempo tarde la dirección en ejercer esta opción, más intereses debe pagar. Otro supuesto del trabajo de Franks y Torous (1989) es que los costes directos de administración derivados de la ampliación del pago de la deuda, que son proporcionales al valor de la empresa, tienen lugar continuamente a lo largo del proceso de reorganización en lugar de en un instante de tiempo determinado.

En un trabajo posterior, Franks y Torous (1994) obtienen que el valor de la opción a retrasar el pago de la deuda es mayor cuanto más cercano esté el valor nominal de la deuda del valor total de la empresa. El significado de este resultado es que cuanta más importancia tenga la deuda en el pasivo de la empresa, más valor tiene el derecho a retrasar el pago de la deuda.

A pesar de la importancia de sus aportaciones, Franks y Torous (1994) no desarrollan un modelo que valore los recursos propios de la empresa en caso de que exista la posibilidad de llevar a cabo una reorganización. Por otro lado, suponen que el precio de ejercicio aumenta determinísticamente a lo largo del tiempo, sin contemplar la posibilidad de que los acreedores ofrezcan una rebaja de la deuda con el fin de recuperar su dinero.

Por su parte, Forte y Peña (2003) analizan los efectos a largo plazo de la refinanciación de la deuda sobre los diferenciales de crédito y sobre la calificación de la deuda. Concretamente, estudian la refinanciación de la deuda cuando ésta se hace mediante la emisión de nueva deuda, que como hemos visto en la introducción, corresponde a un tipo particular de reorganización. Los supuestos de los que parten Forte y Peña (2003) son los siguientes:

1. Los mercados son perfectos.
2. La negociación es continua en el tiempo.
3. Existe un activo libre de riesgo con tipo de interés constante igual para prestamistas que para prestatarios.
4. Cada individuo actúa como si pudiera vender o comprar tanto de cualquier activo como desee sin afectar al precio de mercado.
5. Es posible tomar posiciones cortas.
6. Se cumple la Proposición I de Modigliani-Miller, por lo que el valor de la empresa es independiente de su estructura de capital.
7. El valor de la empresa sigue el siguiente proceso de difusión:

$$dV = \mu V dt + \sigma V dz \qquad (2)$$

   donde μ es la tasa de rendimiento instantáneo esperado de V, σ es la volatilidad de este rendimiento, que se supone constante, y z es un movimiento Browniano estándar.

Forte y Peña (2003) enuncian una proposición según la cual siempre que el valor de los recursos propios sea mayor que cero, la deuda se puede financiar mediante la emisión de nueva deuda con vencimiento mayor que el vencimiento de la deuda actual, lo cual significa que se amplía el plazo de pago, permaneciendo constante el valor de los recursos propios. Además, esta proposición establece la existencia de un nuevo valor nominal positivo que permite a la empresa refinanciarse. Asimismo, demuestran que el nuevo valor nominal tiene como cota inferior el valor nominal inicial capitalizado al tipo de interés libre de riesgo, por lo que el valor nominal de la nueva deuda es siempre mayor que el valor nominal de la deuda inicial.

Por lo tanto, a pesar del interés del trabajo de Forte y Peña (2003), sus resultados están limitados, ya que su modelo supone que el coste de reorganización es nulo y que el valor nominal de la nueva deuda es siempre mayor que el valor nominal de la deuda inicial. Estos supuestos difieren de la realidad, puesto que las negociaciones pueden ser costosas, como muestra Betker (1997), y además puede ocurrir que los acreedores ofrezcan una rebaja de la deuda con el fin de recuperar su capital, como señalan Haugen y Senbet (1978, 1988). A lo largo de la siguiente sección tratamos de cubrir estas y otras limitaciones.

3. Reorganización costosa con posible reducción de la deuda

Como hemos señalado, el objetivo de nuestro trabajo es desarrollar un modelo que valore los recursos propios de una empresa cuando ésta tiene la posibilidad de reorganizarse mediante una o varias negociaciones. En caso de llevarse a cabo una reorganización, suponemos que son los accionistas de la empresa los que desarrollan el plan de reestructuración, dentro de un procedimiento formal similar al definido por el Capítulo 11 de la Reforma de la Ley de Quiebra estadounidense. Una vez propuesto este plan de reorganización, los acreedores deben aprobarlo en un determinado plazo de tiempo.

Los acreedores aceptarán la reorganización de la empresa si lo que reciben en caso de reorganización es mayor o igual que lo recibido en caso de liquidación. Cuando la liquidación tiene lugar, los acreedores reciben el control de la empresa y dicha transferencia de control desde los accionistas hasta los acreedores puede tener un coste, L, con $L \geq 0$. Según Warner (1977) el coste de liquidación incluye tanto los costes legales y administrativos (costes directos), como los beneficios no realizados por la empresa a consecuencia de sus dificultades financieras (costes indirectos). Supongamos que el vencimiento inicial de la deuda es T_1. En caso de que la empresa se liquide en T_1, los acreedores recibirán V_1 - L, y en caso de que la empresa se reorganice, el valor de los recursos de los acreedores será V_1 - S_1, donde V_1 es el valor de la empresa en T_1, y S_1 es el valor de los recursos propios en T_1. En lo que sigue, supondremos que el coste de liquidación es lo suficientemente grande para que los acreedores estén siempre dispuestos a aceptar la extensión de la deuda cuando los accionistas se la propongan, esto es, se cumple que $S_1 \leq L$. El supuesto anterior es consistente con Branch (2002), que señala que una parte significativa del valor de la empresa en quiebra se consume en el proceso de liquidación de la misma. Así, Altman (1984) obtiene que el total de costes de liquidación (directos e indirectos) supone el 15 % del valor de la empresa tres años antes de la quiebra.

Por otro lado, para evitar las limitaciones encontradas en otros trabajos, en nuestro modelo permitimos que la reorganización sea costosa y que el valor nominal de la deuda aplazada sea inferior al valor nominal de la deuda inicial. Además, suponemos que la empresa a valorar está financiada por recursos propios y un único bono cupón-cero.

En el desarrollo del modelo de valoración distinguimos tres casos diferentes: cuando no existe la posibilidad de reorganización, cuando existe la posibilidad de llevar a cabo una reorganización y cuando existe la posibilidad de llevar a cabo varias reorganizaciones.

3.1. Sin posibilidad de reorganización

Consideremos en primer lugar una empresa sin posibilidad de reorganización. Supongamos que esta empresa está financiada con recursos propios y un bono cupón-cero con valor nominal K_1 y vencimiento en T_1. Sea V_t el valor total de la empresa en un instante de tiempo t. Para valorar esta empresa utilizamos el trabajo de Merton (1974), que a continuación describimos brevemente.

Merton (1974) desarrolla un modelo de valoración de deuda cuando existe riesgo de impago. Como aplicación de dicho modelo, estudia el valor de los recursos propios de una empresa cuya estructura de capital está formada por recursos propios y por un único bono cupón-cero con valor nominal K_1 y vencimiento en T_1. Forzando la ausencia de arbitraje, el valor de los recursos propios en t, $S(V, t)$, debe cumplir lo siguiente:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 S_{VV} + rVS_V - rS + S_t = 0 \tag{3}$$

sujeto a:

$$S(V_1, T_1) = máx(0, V_1 - K_1) \tag{4}$$

$$S(0, t) = 0 \tag{5}$$

donde V_1 es el valor de la empresa en T_1 y r es el tipo de interés libre de riesgo. Utilizando (3), (4) y (5), es claro que el valor de los recursos propios de una empresa financiada con recursos propios y un bono cupón-cero se puede calcular como una opción de compra donde el precio del activo subyacente es el valor de la empresa, el precio de ejercicio es el valor nominal de la deuda, y la fecha de ejercicio de la opción es la fecha de vencimiento de la deuda.

De este modo, el valor actual de los recursos propios de una empresa que no tiene la posibilidad de reorganización viene dado por la fórmula de valoración de opciones de Black y Scholes (1973):

$$S(V_0, 0) = V_0 N(d_1) - K_1 e^{-rT_1} N(d_2) \tag{6}$$

con:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{V_0}{K_1} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T_1}{\sigma \sqrt{T_1}} \tag{7}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T_1} \tag{8}$$

3.2. Con posibilidad de una reorganización

Supongamos ahora el caso de que la empresa en T_1, no pudiendo devolver la deuda con valor nominal K_1 y vencimiento en T_1, tiene la posibilidad de llevar a cabo una reorganización, posponiendo el pago de la deuda hasta T_2, con $T_2 > T_1$, momento en el que pagará K_2. Esta reorganización tiene un coste, $A_1 = \alpha_1 V_1$, con $\alpha_1 \in [0,1]$, que la empresa pagará en el momento de la renegociación de la deuda, esto es, en T_1. Debemos señalar que no imponemos ninguna restricción sobre el nuevo valor nominal de la deuda, es decir, no es necesario que sea mayor que el valor nominal inicial. Esto se debe a que es posible que los acreedores de la empresa prefieran cobrar una cantidad inferior a K_1 que arriesgarse a que la empresa se declare en suspensión de pagos y no cobrar nada.

De este modo, podemos considerar que el valor de los recursos propios en T_1 viene dado por:

$$máx\{0, c(V_1, K_2, T_2 - T_1) - A_1, V_1 - K_1\} \tag{9}$$

es decir, es el máximo de tres pagos diferentes: lo que reciben los accionistas si la empresa se liquida, lo que reciben si se reorganiza y lo que reciben si la empresa satisface su deuda en T_1. El valor en T_1 de lo que reciben los accionistas si se reorganiza la empresa es el valor en T_1 de lo que reciben en T_2 que es el máximo entre V_2 - K_2 y 0, que corresponde al valor de una opción de compra sobre V_1, $c(V_1, K_2, T_2 - T_1)$, menos lo que la empresa ha pagado en T_1 para reorganizarse, que es A_1. También podemos escribir la expresión (9) de esta manera:

$$máx\{máx\{0, c(V_1, K_2, T_2 - T_1) - A_1\}, máx\{0, V_1 - K_1\}\} \tag{10}$$

Expresando los pagos de esta forma, vemos que el valor de los recursos propios en T_1 es el máximo de dos pagos: el valor de una opción de compra sobre otra opción de compra, esto es, el valor de una opción compuesta con precio de ejercicio $A_1 = \alpha_1 V_1$, y el valor de una opción de compra simple.

Una vez obtenida la anterior expresión, utilizamos simulación Monte Carlo para valorar los recursos propios de una empresa con la posibilidad de llevar a cabo una reorganización. Para ello simulamos un millón de trayectorias (500.000 + 500.000 antitéticas) hasta T_1 y calculamos el coste de la extensión en cada una de ellas como $A_1 = \alpha_1 V_1$. A continuación valoramos los recursos propios en T_1 utilizando la expresión (9) o bien la expresión (10). Para aumentar la velocidad de cálculo y la eficiencia de método empleado, valoramos la opción $c(V_1, K_2, T_2 - T_1)$ en cada trayectoria mediante la fórmula de Black y Scholes (1973).

De este modo, en la Figura 1 podemos observar que cuanto mayor es el valor de α_1, menor es el valor de los recursos propios. Como hemos visto, el valor de los recursos propios es el valor actual de los flujos que recibirán los accionistas en el futuro. Cuanto mayor sea α_1, mayor será el coste de reorganización en T_1, A_1, y por lo tanto, menor será lo que reciban los accionistas si la empresa se reorganiza. Por otro lado, observamos que a medida que α_1 crece, el valor de los recursos propios se acerca a una asíntota. Podemos explicar la existencia de esta asíntota diciendo que cuando el coste de la reorganización es muy alto, la empresa no se reorganiza, sino que se liquida o bien paga la deuda. En dicho caso, debido a que no se lleva a cabo una reorganización, el aumento en el valor de α_1 no tiene efecto en el valor de los recursos propios de la empresa.

Por otro lado, en la Figura 2 vemos el valor de los recursos propios en función del valor inicial de la empresa, V_0, para diferentes valores de α_1. Observamos que cuanto mayor es α_1, menor es el valor de los recursos propios, debido a que la reorganización llevada a cabo en T_1 es más costosa.

3.2.1. Costes de reorganización constantes

Consideremos ahora el caso de que el coste de la reorganización, A_1, sea conocido y constante, con $A_1 > 0$. Con A_1 constante, la expresión (9) coincide con los pagos que recibe en T_1 el dueño de una opción de compra extensible por parte del poseedor. Estos pagos son el valor de no extender la opción extensible, el valor de extender la opción mediante el pago de A_1 en T_1 y el valor de ejercer la opción en T_1.

El concepto de opción extensible aparece por primera vez en Longstaff (1990). Una opción de compra extensible por parte del poseedor es una opción de compra que puede ejercerse en su fecha de ejercicio, T_1, pero que al mismo tiempo permite que su poseedor extienda el vencimiento de la opción hasta T_2, con $T_2 > T_1$, donde el precio de ejercicio será K_2, mediante el pago del coste de la extensión, A_1, con $A_1 \geq 0$, a pagar en T_1. Longstaff (1990) señala que los recursos propios de una empresa cuya deuda se puede extender sin modificar su valor nominal se pueden ver como una opción de compra extensible sobre el valor de la empresa. Además sugiere utilizar la misma línea de razonamiento para mostrar que muchas reorganizaciones consisten en el ejercicio de un privilegio de extensión implícito.

Así, siguiendo el planteamiento sugerido por Longstaff (1990), consideramos que el valor de los recursos propios de una empresa con la posibilidad de llevar a cabo una reorganización es una opción de compra extensible sobre el valor de la empresa, V_t, con precios de ejercicio K_1 y K_2, vencimientos T_1 y T_2, y coste de extensión A_1. Debemos señalar que a diferencia de la propuesta de Longstaff (1990), nosotros permitimos que el valor nominal de la deuda con vencimiento en T_2, K_2, sea diferente al valor nominal inicial, K_1.

En su trabajo, Longstaff (1990) ofrece una fórmula cerrada para valorar opciones extensibles por parte del poseedor. Los supuestos previos al desarrollo de esta fórmula son los mismos que aparecen en el trabajo de Forte y Peña (2003), por lo que los resultados obtenidos para las opciones extensibles son aplicables al estudio de la reorganización introducido en Forte y Peña (2003).

Antes de pasar a la valoración de los recursos propios de una empresa en caso de que exista la posibilidad de reorganización, esto es, a la valoración de una opción de compra extensible, debemos analizar los factores que determinan su valor. Según Longstaff (1990), podemos distinguir tres situaciones diferentes:

a) Si $A_1 > 0$, existe un valor crítico de V_t en $t = T_1$, I_1^1, por debajo del cual la opción no se extiende ni se ejerce, es decir, la opción expira sin valor. En el caso de una empresa, esto significa que el valor de la empresa es tan bajo que no se reorganiza, es decir, no se extiende el plazo de la deuda sino que se procede a la liquidación.

b) Existe otro valor crítico de V_t en $t = T_1$, I_2^1, por encima del cual la opción no se extiende sino que se ejerce, esto es, la empresa paga su deuda.

c) Si en T_1 el valor de la empresa se encuentra entre estos dos valores, esto es, $I_1^1 \leq V_1 \leq I_2^1$, la opción se extiende, es decir, la empresa se reorganiza, emitiendo deuda con valor nominal K_2 y vencimiento T_2 e incurriendo en un coste de reorganización A_1, con $A_1 \geq 0$, que paga en T_1.

Para obtener el valor de I_1^1, Longstaff (1990) propone resolver la siguiente ecuación:

$$c(I_1^1, K_2, T_2 - T_1) = A_1 \tag{11}$$

es decir, I_1^1 es aquel valor de la empresa para el cual el valor de la opción a extender el pago de la deuda es igual al coste de llevar a cabo la reorganización. Además, señala que se puede demostrar que se cumple lo siguiente:

$$A_1 \leq I_1^1 \leq A_1 + K_2 e^{-r(T_2 - T_1)} \tag{12}$$

y que:

$$A_1 = 0 \Rightarrow I_1^1 = 0 \tag{13}$$

Esto es, si el coste de reorganización es cero, la empresa siempre prefiere reorganizarse que llevar a cabo una liquidación.

De manera similar, el valor de I_2^1 se obtiene resolviendo la siguiente igualdad[1]:

$$c(I_2^1, K_2, T_2 - T_1) = I_2^1 - K_1 + A_1 \tag{14}$$

Como hemos comentado antes, en el trabajo de Moraux y Navatte (2004), el valor a partir del cual la empresa continúa en marcha es el valor nominal de la deuda, K_1. Sin embargo, con nuestra propuesta de considerar los recursos propios como una opción de

[1] Hemos corregido la errata que aparece en la expresión (6) del trabajo de Longstaff (1990).

compra extensible, el valor a partir del cual la empresa se reorganiza no es K_1, sino I_1^1, que depende de otros factores como el coste de reorganización, la duración de la extensión y el nuevo valor nominal de la deuda.

Por otro lado, Longstaff (1990) demuestra que:

$$I_1^1 < K_1 \Rightarrow K_1 < I_2^1 \leq \infty \tag{15}$$

y que:

$$A_1 < K_1 - K_2 e^{-r(T_2 - T_1)} \Rightarrow I_2^1 = \infty \tag{16}$$

Considerando el caso de una empresa con posibilidad de llevar a cabo una reorganización, la expresión (15) implica que si I_1^1 es menor que el valor nominal de la deuda, K_1, I_2^1 va a ser siempre superior a dicho valor nominal, es decir, cuando el valor de la empresa es igual al valor nominal de la deuda, la empresa no devuelve la deuda sino que lleva a cabo una reorganización. Por su parte, la expresión (16) significa que si el coste de la reorganización, A_1, es inferior a $K_1 - K_2 e^{-r(T_2 - T_1)}$, la empresa nunca paga la deuda en T_1, sino que extiende su vencimiento hasta T_2.

Una vez obtenidos los valores de I_1^1 e I_2^1, aplicamos la fórmula de valoración de opciones de compra extensibles de Longstaff (1990) al contexto de la valoración de los recursos propios de una empresa con una sola deuda y con la posibilidad de llevar a cabo una reorganización. De esta manera podemos enunciar la siguiente proposición:

Proposición 1 *El valor actual de los recursos propios de una empresa financiada con un único bono cupón-cero, con valor nominal K_1 y vencimiento en T_1, con la posibilidad de llevar a cabo una reorganización ampliando el vencimiento de la deuda hasta T_2, con $T_2 > T_1$, momento en el que paga K_2 y teniendo esta reorganización un coste A_1 en T_1, con $A_1 \geq 0$, viene dado por la siguiente expresión:*

$$S(V_0, 0) \equiv EC(V_0, K_1, K_2, T_1, T_2, A_1) =$$

$$= c(V_0, K_1, T_1) + V_0 N(\gamma_1, \gamma_2, -\infty, \gamma_3, \rho)$$
$$- K_2 e^{-rT_2} N(\gamma_1 - \sqrt{\sigma^2 T_1}, \gamma_2 - \sqrt{\sigma^2 T_1}, -\infty, \gamma_3 - \sqrt{\sigma^2 T_2}, \rho)$$
$$- V_0 N(\gamma_1, \gamma_4) + K_1 e^{-rT_1} N(\gamma_1 - \sqrt{\sigma^2 T_1}, \gamma_4 - \sqrt{\sigma^2 T_1})$$
$$- A_1 e^{-rT_1} N(\gamma_1 - \sqrt{\sigma^2 T_1}, \gamma_2 - \sqrt{\sigma^2 T_1}) \tag{17}$$

con:

$$\gamma_1 = \frac{\ln \frac{V_0}{I_2^1} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T_1}{\sigma \sqrt{T_1}} \tag{18}$$

$$\gamma_2 = \frac{\ln \frac{V_0}{I_1^1} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T_1}{\sigma \sqrt{T_1}} \tag{19}$$

$$\gamma_3 = \frac{\ln \frac{V_0}{K_2} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T_2}{\sigma \sqrt{T_2}} \tag{20}$$

$$\gamma_4 = \frac{\ln \frac{V_0}{K_1} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T_1}{\sigma \sqrt{T_1}} \tag{21}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \tag{22}$$

y donde $N(a, b, c, d, \rho)$ *es el valor del integral de una normal estándar bivariante con coeficiente de correlación ρ para la región rectangular dada por* $[a, b] \times [c, d]$, *y* $N(a, b)$ *es el valor del integral de la normal estándar univariante en el intervalo* $[a, b]$.

Tras obtener la anterior fórmula de valoración, en la Figura 3 se compara el valor de los recursos propios de una empresa en caso de que tenga la posibilidad de llevar a cabo una reorganización con el valor de los recursos propios en caso de que no tenga dicha posibilidad[2]. Podemos observar que en caso de que exista la posibilidad de reorganización, el valor de los recursos propios de la empresa es mayor que en caso de que no exista dicha posibilidad. Por lo tanto, vemos cómo el modelo refleja los resultados de Leland (1994) y Dumitrescu (2007), que obtienen que el valor de los recursos propios es mayor cuando existe la posibilidad de llevar a cabo una reorganización. Además, observamos que la diferencia entre el valor de los recursos propios con y sin posibilidad de reorganización es mayor para aquellos valores de la empresa situados entre I_1^1 e I_2^1, puesto que es entonces cuando la empresa se reorganiza.

Por otra parte, en la Figura 4 estudiamos la relación entre el coste de reorganización y los valores I_1^1 e I_2^1. Podemos ver que cuanto mayor es el coste de reorganización, A_1, mayor es el valor de la empresa a partir del cual la empresa reorganiza su deuda, I_1^1, y menor es el valor de la empresa a partir del cual la empresa paga su deuda en lugar de reorganizarla, I_2^1. Esto significa que cuanto mayor es el coste de reorganización, A_1, menor es el valor de los recursos propios. Como hemos visto en la Figura 2, esto coincide con el caso general de costes de reorganización variables.

Volviendo a la expresión (17), debemos observar que el primer término de la expresión es el valor de una opción de compra estándar sobre el valor de la empresa con precio de ejercicio K_1 y fecha de ejercicio T_1. Es decir, el primer término en (17) corresponde al valor de los recursos propios de la empresa cuando no existe la posibilidad de reorganización. La suma del resto de términos representa el valor del derecho a extender el vencimiento de la opción, denominado en Longstaff (1990) "privilegio de extensión". En el caso de una empresa, el privilegio de extensión es el valor de la posibilidad de llevar a cabo una reorganización. Para valorar este privilegio de extensión utilizamos la siguiente expresión:

$$P = EC(V_0, K_1, K_2, T_1, T_2, A_1) - c(V_0, K_1, T_1) \tag{23}$$

[2] Para calcular la probabilidad acumulada de la distribución normal bivariante que aparece en la expresión (17) hemos utilizado la aproximación ofrecida por Curnow y Dunnett (1962). Esta aproximación puede verse detenidamente en el Apéndice.

Longstaff (1990) demuestra que el valor de una opción de compra extensible es mayor o igual que el valor de una opción de compra estándar. Esto se debe a que, como vemos en la expresión (10), el pago de la opción extensible en la fecha de vencimiento inicial de la deuda, T_1, es el máximo de dos pagos: el correspondiente a una opción de compra europea estándar con precio de ejercicio K_1 y fecha de ejercicio T_1, y el correspondiente a una opción compuesta sobre $c(V_0, K_2, T_2 - T_1)$ con precio de ejercicio A_1. Por lo tanto, el privilegio de extensión, P, tiene un valor mayor o igual que cero, ya que es la diferencia entre el valor de la opción de compra extensible y el valor de la opción de compra estándar. Así, el valor de los recursos propios de una empresa con posibilidad de llevar a cabo una reorganización es como mínimo el valor de los recursos propios cuando no existe dicha posibilidad.

Por otro lado, antes hemos indicado que Franks y Torous (1994) obtienen que el valor de la opción a retrasar el pago de la deuda es mayor cuanto más cerca esté el valor nominal de la deuda del valor de la empresa. En la Figura 5 observamos cómo nuestra propuesta de valoración de los recursos propios es consistente con los resultados de Franks y Torous (1994), puesto que observamos que el valor del privilegio de extensión aumenta con el valor nominal de la deuda. De igual manera, vemos que el valor máximo de la opción a extender el pago de la deuda se alcanza cuando el valor de la empresa se encuentra entre los límites de extensión, I_1^1 e I_2^1, debido a que es entre dichos valores donde se produce el aplazamiento del pago de la deuda.

3.2.2. Renegociación óptima de la deuda con costes de reorganización constantes

Una vez estudiada la valoración de los recursos propios en función del valor de la empresa cuando ésta puede llevar a cabo una reorganización, pasamos a analizar bajo qué condiciones la reorganización de la empresa es óptima[3].

En primer lugar, para un valor dado de la empresa, estudiamos qué parámetros de la reorganización maximizan el valor del privilegio de extensión. Así, en el Cuadro 1 vemos cómo influye el valor del vencimiento inicial de la deuda, T_1, en el valor del privilegio de extensión para diferentes valores de la empresa. Observamos que para un

[3] Agradecemos a un evaluador anónimo sus sugerencias sobre este punto.

determinado valor del vencimiento modificado de la deuda, T_2, el valor del privilegio de extensión disminuye a medida que T_1 se acerca a T_2. Vemos que no hay un patrón de comportamiento estándar respecto al valor de T_1 que hace máximo el privilegio de extensión. Así, para algunos valores de V_0 el máximo se obtiene cuando $T_1 = 0$, mientras que para otros valores el máximo se obtiene para un valor de T_1 perteneciente al intervalo $(0, T_2)$. En la Figura 6 podemos ver gráficamente este comportamiento para tres valores iniciales de V_0. En el caso de $V_0 = 10$, el máximo valor del privilegio de extensión se obtiene cuando el vencimiento inicial de la deuda es $T_1 = 0$, mientras que para $V_0 = 5$ y $V_0 = 15$, el máximo se obtiene para un valor de T_1 situado entre 0 y T_2. Observamos también en este gráfico que para los tres valores de la empresa considerados se cumple que el privilegio de extensión disminuye a medida que T_1 se aproxima a T_2.

En el Cuadro 2 se ofrecen los resultados de la maximización del privilegio de extensión respecto de T_1 para distintos valores de V_0. En este cuadro se ofrece el valor de T_1 que maximiza el privilegio de extensión, así como el valor del privilegio de extensión máximo. Como hemos visto en el Cuadro 1, en unos casos el valor de T_1 que maximiza el privilegio de extender la deuda es 0, mientras que en otros casos es un valor intermedio comprendido entre 0 y T_2.

Por otro lado, en el Cuadro 3 observamos que para un valor dado de T_1, el privilegio de extensión es siempre mayor cuanto mayor es T_2. Además, se puede comprobar que el valor que maximiza el privilegio de extensión para todos los valores de V_0 posibles es el valor máximo permitido para T_2, resultado que coincide con la intuición dada por el Cuadro 3.

Hasta aquí, en el estudio de la renegociación óptima hemos fijado T_2 ó T_1. Es decir, hemos permitido que varíe el período de extensión de la deuda, $T_2 - T_1$. A continuación, en el Cuadro 4 se muestran los resultados de la maximización del privilegio de extensión respecto a T_1 cuando el período de extensión, $T_2 - T_1$, es conocido y constante. En nuestro ejemplo hemos supuesto que $T_2 - T_1 = 0.2$. Debemos observar que el valor máximo del privilegio de extensión es mayor para aquellos valores de V_0 comprendidos entre I_1^1 e I_2^1.

3.3. Con posibilidad de varias reorganizaciones

A continuación consideramos una empresa financiada con recursos propios y una sola deuda con vencimiento en T_1 y valor nominal K_1, que puede reorganizarse ampliando el vencimiento de su deuda hasta T_2, con $T_2 > T_1$, momento en el que deberá pagar K_2, y con un coste de reorganización $A_1 = \alpha_1 V_1$ a pagar en T_1, con $\alpha_1 \in [0,1]$. Una vez en T_2, si la empresa no puede hacer frente a la devolución de la deuda con nominal K_2, puede llevar a cabo una nueva reorganización, con coste $A_2 = \alpha_2 V_2$ a pagar en T_2, con $\alpha_2 \in [0,1]$, ampliando el vencimiento hasta T_3, con $T_3 > T_2$, donde deberá pagar K_3. Y así sucesivamente hasta llegar a T_{n-1}, donde la empresa podrá modificar su deuda ampliando su vencimiento hasta T_n, con $T_n > T_{n-1}$, momento en el que deberá pagar K_n, mediante el pago de $A_{n-1} = \alpha_{n-1} V_{n-1}$ en T_{n-1}, con $\alpha_{n-1} \in [0,1]$.

El valor de lo que reciben los accionistas en T_n es el máximo entre V_n - K_n y 0. Retrocediendo un período, obtenemos que el valor de los recursos propios en T_{n-1} viene dado por:

$$máx\{0, c(V_{n-1}, K_n, T_n - T_{n-1}) - A_{n-1}, V_{n-1} - K_{n-1}\} \tag{24}$$

que representa el máximo de lo que reciben los accionistas en T_{n-1} si la empresa se liquida, de lo que reciben si la empresa extiende la deuda hasta T_n y de lo que reciben si la empresa satisface su deuda en T_{n-1}.

3.3.1. Costes de reorganización constantes

Supongamos ahora que el coste de extensión en cada período, A_i, es conocido y constante para todo i, con $i = 1,2,\ldots,n-1$. Como hemos visto, el valor de los recursos propios en T_{n-1} viene dado por la expresión (24). Para obtener la expresión para el valor de los recursos propios en T_{n-2} debemos retroceder un período. Así, partiendo de la expresión (24), en el caso de costes de extensión constantes obtenemos que en T_{n-2} el valor de los recursos propios es el siguiente:

$$máx\{0, EC(V_{n-2}, K_{n-1}, K_{n,} T_{n-1} - T_{n-2}, T_n - T_{n-2}, A_{n-1}) - A_{n-2}, V_{n-2} - K_{n-2}\} \quad (25)$$

y de forma general, en T_i, con $i = 1,2,\ldots,n-1$, el valor de los recursos propios viene dado por la siguiente expresión:

$$máx\{0, EC_{n-i}(V_i, K_{i+1},\ldots, K_{n,} T_{i+1} - T_i,\ldots, T_n - T_i, A_{i+1},\ldots, A_{n-1}) - A_i, V_i - K_i\} \quad (26)$$

donde $EC_{n-i}(V_i, K_{i+1},\ldots, K_{n,} T_{i+1} - T_i,\ldots, T_n - T_i, A_{i+1},\ldots, A_{n-1})$ es el valor de una opción extensible $n-i-1$ veces. De esta manera, podemos considerar los recursos propios de una empresa con posibilidad de $n-1$ reorganizaciones con costes $A_1, A_2,\ldots, A_{n-1}$, como una opción de compra extensible $n-1$ veces sobre el valor de la empresa con precios de ejercicio K_i, vencimientos en T_i, con $i = 1,2,\ldots,n$, y costes de extensión A_i, para $i = 1,2,\ldots,n-1$.

Chung y Johnson (1994) proponen una fórmula de valoración de opciones extensibles $n-1$ veces. Al igual que en el apartado anterior, antes de aplicar dicha fórmula a nuestro problema de valoración debemos determinar los valores I_1^i e I_2^i para $i = 1,2,\ldots,n-1$. En cada instante T_i, dependiendo del valor de la empresa, V_i, tenemos tres situaciones diferentes:

a) Si el valor de la empresa, V_i, es menor que un valor crítico I_1^i, la opción expira sin valor, esto es, la empresa no se reorganiza y lleva a cabo su liquidación.

b) Si V_i es mayor que un valor crítico I_2^i, la opción se ejerce, es decir, la empresa satisface el pago de la deuda.

c) Si $I_1^i \le V_i \le I_2^i$, la empresa paga A_i y la opción se extiende hasta T_{i+1}, esto es, la empresa refinancia su deuda mediante la emisión de nueva deuda.

Para obtener los valores de I_1^i e I_2^i, según Chung y Johnson (1994) debemos resolver las siguientes ecuaciones:

$$c(I_1^{n-1}, K_n, T_n - T_{n-1}) = A_{n-1} \quad (27)$$

$$EC_{n-i}(\mathrm{I}_1^i, K_{i+1}, \ldots, K_{n,} T_{i+1} - T_i, \ldots, T_n - T_i, A_{i+1}, \ldots, A_{n-1}) = A_i, \ i = 1,2,\ldots,n-2 \qquad (28)$$

$$c(I_2^{n-1}, K_n, T_n - T_{n-1}) = I_2^{n-1} - K_{n-1} + A_{n-1} \qquad (29)$$

$$EC_{n-i}(I_2^i, K_{i+1}, \ldots, K_{n,} T_{i+1} - T_i, \ldots, T_n - T_i, A_{i+1}, \ldots, A_{n-1}) =$$
$$= I_2^i - K_i + A_i, \ i = 1,2,\ldots,n-2 \qquad (30)$$

donde $EC_n(V_0, K_1, \ldots, K_{n,} T_1, \ldots, T_n, A_1, \ldots, A_{n-1})$ es el valor de una opción de compra extensible $n-1$ veces, con precio de ejercicio K_i en T_i, con $i = 1,2,\ldots,n$, y coste de extensión A_i, a pagar en T_i, con $i = 1,2,\ldots,n-1$ [4].

Una vez determinados los valores de I_1^i e I_2^i, aplicamos la expresión de Chung y Johnson (1994)[5] y llegamos a la siguiente proposición:

Proposición 2 *El valor actual de los recursos de una empresa financiada con un único bono cupón-cero con valor nominal K_1 y vencimiento en T_1, con la posibilidad de llevar a cabo $n-1$ reorganizaciones viene dado por la siguiente expresión:*

$$\begin{aligned}
&S(V_0,0) \equiv EC_n(V_0, K_1, \ldots, K_{n,} T_1, \ldots, T_n, A_1, \ldots, A_{n-1}) = \\
&= V_0 N(d_1(I_2^1, T_1)) - K_1 e^{-rT_1} N(d_2(I_2^1, T_1)) \\
&+ V_0 \left\{ N_2(d_1(I_1^1, T_1), d_1(I_2^2, T_2), \rho_{12}) - N_2(d_1(I_2^1, T_1), d_1(I_2^2, T_2), \rho_{12}) \right\} \\
&+ \ldots \\
&+ V_0 \{ N_n(d_1(I_1^1, T_1), d_1(I_2^2, T_2), \ldots, d_1(K_n, T_n), \rho_{12}, \rho_{13}, \ldots, \rho_{n-1,n}) \\
&- N_n(d_1(I_2^1, T_1), d_1(I_2^2, T_2), \ldots, d_1(K_n, T_n), \rho_{12}, \rho_{13}, \ldots, \rho_{n-1,n}) \} \\
&- K_2 e^{-rT_2} \left\{ N_2(d_2(I_1^1, T_1), d_2(I_2^2, T_2), \rho_{12}) - N_2(d_2(I_2^1, T_1), d_2(I_2^2, T_2), \rho_{12}) \right\}
\end{aligned}$$

---

[4] Ha sido necesaria la corrección de algunos errores. En el trabajo original de Chung y Johnson (1994) las ecuaciones (28) y (30) incluyen como costes de extensión A_i, A_{i+1},..., A_{n-1}, que como hemos visto anteriormente, son los costes de extensión a incluir en una opción extensible $n-i$ veces, y no en una opción extensible $n-i-1$ veces, como es el caso.

[5] Ha sido necesario corregir dicha fórmula puesto que en su obtención los autores parten de la equivalencia $N_n(a_1, a_2, \ldots, a_n, \rho_a) - N_n(b_1, b_2, \ldots, b_n, \rho_b) = N_n(-b_1, -b_2, \ldots, b_n, -\rho_b) - N_n(-a_1, -a_2, \ldots, a_n, -\rho_a)$, con $a_n = b_n$ y donde ρ_a y ρ_b son matrices de correlaciones, la cual no es cierta para todo n.

$$
\begin{aligned}
&-\ldots \\
&-K_n e^{-rT_n}\{N_n(d_2(I_1^1,T_1),d_2(I_1^2,T_2),\ldots,d_2(K_n,T_n),\rho_{12},\rho_{13},\ldots,\rho_{n-1,n}) \\
&-N_n(d_2(I_2^1,T_1),d_2(I_2^2,T_2),\ldots,d_2(K_n,T_n),\rho_{12},\rho_{13},\ldots,\rho_{n-1,n})\} \\
&-A_1 e^{-rT_1}\{N(d_2(I_1^1,T_1))-N(d_2(I_2^1,T_1))\} \\
&-A_2 e^{-rT_2}\left\{N_2(d_2(I_1^1,T_1),d_2(I_1^2,T_2),\rho_{12})-N_2(d_2(I_2^1,T_1),d_2(I_2^2,T_2),\rho_{12})\right\} \\
&-\ldots \\
&-A_{n-1}e^{-rT_{n-1}}\{N_{n-1}(d_2(I_1^1,T_1),d_2(I_1^2,T_2),\ldots,d_2(I_1^{n-1},T_{n-1}),\rho_{12},\rho_{13},\ldots,\rho_{n-1,n}) \\
&-N_{n-1}(d_2(I_2^1,T_1),d_2(I_2^2,T_2),\ldots,d_2(I_2^{n-1},T_{n-1}),\rho_{12},\rho_{13},\ldots,\rho_{n-1,n})\} \qquad (31)
\end{aligned}
$$

donde K_2, K_3, ... y K_n son los nuevos valores nominales de la deuda, T_2, T_3, ... y T_n son sus vencimientos, y A_1, A_2, ... y A_{n-1} son los costes de extensión en T_1, T_2, ... y T_{n-1}, respectivamente. Por otro lado, N_n es la función de distribución de una variable aleatoria normal n-variante, ρ_{ij} viene dada por $\rho_{ij}=\pm\sqrt{T_i/T_j}$, con $i<j$, donde el signo viene dado por el producto de los signos que preceden a d_1 y/o d_2, y donde:

$$
d_1(q,t)=\frac{\ln\dfrac{V_0}{q}+\left(r+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \qquad (32)
$$

$$
d_2(q,t)=d_1(q,t)-\sigma\sqrt{t} \qquad (33)
$$

Debemos señalar que si $n = 2$, la expresión (31) coincide con la obtenida para el caso de una única posibilidad de reorganización, que hemos estudiado en la sección 3.2.1.

Por otro lado, en caso de que la empresa tenga la posibilidad de llevar a cabo $n-1$ reorganizaciones, el valor del privilegio de extensión, P, vendrá dado por la diferencia entre el valor de los recursos propios cuando existe la posibilidad de $n-1$ reorganizaciones y el valor de los recursos propios cuando no existe dicha posibilidad, esto es:

$$
P=EC_n(V_0,K_1,\ldots,K_n,T_1,\ldots,T_n,A_1,\ldots,A_{n-1})-c(V_0,K_1,T_1) \qquad (34)
$$

Proposición 3 *El valor de una opción de compra extensible* $n-1$ *veces sobre un activo subyacente con valor actual* V_0*, precios de ejercicio* K_1*,* K_2*, ...,* K_n*, fechas de ejercicio* T_1*,* T_2*, ...,* T_n*, y costes de extensión* A_1*,* A_2*, ...,* A_{n-1}*, es mayor o igual que el valor de una opción de compra estándar sobre el mismo subyacente con precio de ejercicio* K_1 *y fecha de ejercicio* T_1*.*

Así, el valor del privilegio de extensión para el caso de una empresa con la posibilidad de llevar a cabo $n-1$ reorganizaciones, es siempre mayor o igual que cero, independientemente del valor nominal, el vencimiento y el coste de reorganización de la deuda. Esto es, el hecho de poder renegociar el vencimiento y el nominal de la deuda en caso de dificultades financieras se traduce en un incremento del valor de los recursos de los accionistas.

Como aplicación, supongamos que una empresa con deuda con valor nominal K_1 y vencimiento en T_1 acuerda de antemano con sus acreedores que si no puede satisfacer la deuda en T_1, mediante el abono de una cantidad A_1 en T_1 puede extender el vencimiento hasta T_2, donde pagará K_2, y si en T_2 de nuevo no puede satisfacer el pago de K_2, mediante el pago de A_2 en T_2 puede extender el vencimiento hasta T_3, donde pagará K_3, con $A_1 \geq 0$ y $A_2 \geq 0$. El valor de los recursos propios de esta empresa vendrá dado por el valor de una opción de compra extensible dos veces, con precios de ejercicio K_1, K_2 y K_3, fechas de ejercicio T_1, T_2 y T_3, y costes de extensión A_1 y A_2 a pagar en T_1 y T_2, respectivamente. En la Figura 7 representamos gráficamente el valor de los recursos propios de esta empresa. En esta figura mostramos también el valor de los recursos propios cuando la empresa puede llevar a cabo una reorganización o ninguna. Observamos cómo el valor de los recursos propios es mayor cuantas más posibilidades de reorganización existan. Además, la diferencia es mayor para aquellos valores comprendidos entre los límites I_1^i e I_2^i, puesto que la reorganización se lleva a cabo cuando el valor de la empresa se encuentra entre estos valores.

Por otro lado, en la Figura 8 estudiamos en primer lugar la relación existente entre el coste de la primera reorganización, A_1, y los límites en T_1, esto es, I_1^1 e I_2^1. Vemos que cuanto mayor es A_1, mayor es I_1^1. Esto se debe a que cuanto mayor sea el coste de reorganización, mayor será el valor de la empresa a partir del cual ésta se reorganiza.

Con I_2^1 sucede lo contrario. I_2^1 disminuye al aumentar A_1, esto es, cuanto mayor es A_1, menor es el valor de la empresa hasta el cual ésta se reorganiza puesto que la reorganización es más costosa. En la Figura 8 también podemos ver la relación entre el coste de la segunda reorganización, A_2, y los valores de I_1^1, I_2^1, I_1^2 e I_2^2. Al igual que ocurría con A_1, I_1^i aumenta con A_2, es decir, cuanto mayor es el coste de reorganización a pagar en T_2, mayor es el valor de la empresa a partir del cual se lleva a cabo la reorganización. Y, de forma contraria, a mayor A_2, menor es el valor de I_2^i obtenido, esto es, cuanto más costosa sea la reorganización, menor será el valor de la empresa a partir del cual ésta hace frente a sus deudas en lugar de llevar a cabo la reorganización.

En la Figura 9 podemos ver el valor del derecho a retrasar el pago de la deuda cuando la empresa tiene la posibilidad de llevar a cabo dos reorganizaciones. Este valor lo hemos calculado restando al valor de los recursos propios de esta empresa el valor que tendrían los recursos propios en caso de que no pudiese llevar a cabo ninguna reorganización. Al igual que en el caso de una única reorganización posible, el valor de la opción a extender el pago de la deuda es mayor cuanto mayor es el valor nominal de la deuda. Además, vemos que se cumple que el valor máximo se encuentra para valores de la empresa comprendidos entre los límites de extensión, I_1^i e I_2^i.

4. Conclusiones

En este trabajo hemos propuesto un modelo para valorar los recursos propios de una empresa que tiene la posibilidad de renegociar su deuda en caso de que presente dificultades financieras. En la literatura encontramos artículos que estudian la reorganización de las empresas pero no ofrecen una expresión para los recursos propios de la empresa. Además, dichos trabajos no contemplan la posibilidad de que el valor nominal de la nueva deuda sea menor que el de la deuda a refinanciar. Y por otro lado, tampoco permiten que las negociaciones necesarias para llevar a cabo la reorganización tengan un coste.

Con este artículo, hemos tratado de cubrir estas limitaciones. A diferencia de otros trabajos, como Longstaff (1990) y Moraux y Navatte (2004), en este trabajo suponemos que son los accionistas los que desarrollan el plan de reorganización de la empresa dentro de un procedimiento formal. Además, hemos contemplado tres situaciones diferentes: que la empresa no pueda llevar a cabo una reorganización, que pueda llevar a cabo una única reorganización o que pueda llevar a cabo varias reorganizaciones. En primer lugar, hemos utilizado el modelo de Merton (1974) para valorar los recursos propios cuando no existe la posibilidad de reorganización. Cuando existe la posibilidad de una única reorganización, hemos aplicado el concepto de opción extensible propuesto por Longstaff (1990) a la valoración de los recursos propios. En último lugar, para el caso de varias reorganizaciones hemos aplicado el concepto de opción extensible *n* veces desarrollado por Chung y Johnson (1994).

Mediante la aplicación de las expresiones anteriores hemos comprobado cómo nuestra propuesta de valoración corrobora la evidencia empírica obtenida por Franks y Torous (1994), demostrando que cuanto mayor es la importancia de la deuda en el pasivo de una empresa, mayor es el valor de la opción a extender el vencimiento de la deuda. Por otro lado, hemos visto cómo sostiene las conclusiones de Leland (1994) y Dumitrescu (2007), que obtienen que el valor de los recursos propios es mayor cuando existe la posibilidad de llevar a cabo una reorganización. También hemos analizado la influencia del coste de reorganización, obteniendo que cuanto mayor es dicho coste, menor es el valor de los recursos propios, ya exista una única posibilidad de reorganización o varias. Por otra parte, hemos comprobado que el valor a partir del cual la empresa se reorganiza es mayor cuanto mayor es el coste de dicha reorganización.

Finalmente, nos gustaría señalar que el trabajo aquí presentado se puede extender de varias maneras. Por un lado sería interesante ampliar el estudio en el caso de que la empresa tenga la posibilidad de llevar a cabo varias reorganizaciones. Así, empezaríamos estudiando la valoración de los recursos propios en el caso de que los costes de reorganización no fuesen constantes, y seguiríamos realizando un estudio de la renegociación óptima de la deuda. Por otro lado, sería conveniente realizar un estudio empírico para comprobar hasta qué punto se cumplen las predicciones del modelo.

Apéndice: Aproximación de la función de distribución de la distribución Normal Multivariante

En este trabajo hemos utilizado la aproximación propuesta por Curnow y Dunnett (1962) para calcular el valor de la función de distribución de la normal multivariante.

Sea N_n la probabilidad acumulada de una distribución normal con n variables. Esto es:

$$N_n(h_1,h_2,\ldots,h_n;\{\rho_{ij}\}) = \int_{-\infty}^{h_1}\int_{-\infty}^{h_2}\ldots\int_{-\infty}^{h_n} f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\{\rho_{ij}\})dx_1\ldots dx_n \tag{1}$$

donde f es la función de densidad de dicha distribución normal y ρ_{ij} es la matriz de correlación de las variables X_i, con i, j = 1,..., n. Estas variables X_i pueden generarse a partir de $n+1$ variables estándar, $Z_1,Z_2,\ldots,Z_n$ e Y, utilizando la siguiente transformación:

$$Z_i = \frac{X_i - \delta_i Y}{(1-\delta_i^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{2}$$

donde $\delta_i = cov(X_i, Y)$.

En el caso de que la matriz de correlaciones tenga la estructura $\{\rho_{ij}\} = \gamma_i / \gamma_j$, donde $|\gamma_i| < |\gamma_j|$, con $i < j$, Curnow y Dunnett (1962) desarrollan una fórmula para la integral (1), que la reduce de dimensión n a dimensión n/2 si n es par, o (n-1)/2 si n es impar. La expresión es la siguiente:

$$N_n(h_1,h_2,\ldots,h_n;\{\rho_{ij}\}) = \int_{-\infty}^{h_2} N(\hat{h}_1)N_{n-2}(\hat{h}_i;\rho_{ij\cdot 2};i \neq 1,2)f(y)dy \tag{3}$$

donde:

$$\rho_{ij\cdot 2} = \frac{\rho_{ij} - \rho_{i2}\rho_{j2}}{(1-\rho_{i2})^{1/2}(1-\rho_{j2})^{1/2}} \tag{4}$$

$$\hat{h}_i = \frac{h_i - \rho_{i2} y}{(1-\rho_{i2}^2)^{1/2}} \tag{5}$$

Para $n = 2$, la expresión (3) queda de la siguiente forma:

$$N_2(h_1, h_2; \{\rho_{ij}\}) = \int_{-\infty}^{h_2} N\left(\frac{h_1 - \gamma_1 y / \gamma_2}{(1-\gamma_1^2/\gamma_2^2)^{1/2}} \right) \mathrm{f(y)dy} \tag{6}$$

Análogamente, para $n = 3$ tenemos lo siguiente:

$$N_3(h_1, h_2, h_3; \{\rho_{ij}\}) = \int_{-\infty}^{h_2} N\left(\frac{h_1 - \gamma_1 y / \gamma_2}{(1-\gamma_1^2/\gamma_2^2)^{1/2}} \right) N\left(\frac{h_3 - \gamma_2 y / \gamma_3}{(1-\gamma_2^2/\gamma_3^2)^{1/2}} \right) \mathrm{f(y)dy} \tag{7}$$

y, para $n = 4$:

$$N_4(h_1, h_2, h_3, h_4; \{\rho_{ij}\}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{h_2} N\left(\frac{h_3 - \gamma_2 y / \gamma_3}{(1-\gamma_2^2/\gamma_3^2)^{1/2}} \right) \left[\int_{-\infty}^{\hat{h}_4} N\left(\frac{\hat{h}_3 - \hat{\gamma}_3 z / \hat{\gamma}_4}{(1-\hat{\gamma}_3^2/\hat{\gamma}_4^2)^{1/2}} \right) \mathrm{f(z)dz} \right] f(y)dy \tag{8}$$

donde:

$$\hat{\gamma}_i = (\gamma_i^2 - \gamma_2^2)^{1/2} \tag{9}$$

$$\hat{h}_i = \frac{h_i - \rho_{i2} y}{(1-\rho_{i2}^2)^{1/2}} \tag{10}$$

Bibliografía

Altman, E. I., 1984, "A further empirical investigation of the bankruptcy cost question", *Journal of Finance*, 39, 1067 - 1089.

Anderson R.W. y Sundaresan, S., 1996, "Design and valuation of debt contracts", *Review of Financial Studies*, 9, 37 - 68.

Betker, B. L., 1997, "The administrative costs of debt restructurings: Some recent evidence", *Financial Management,* 26, 56 - 68.

Black, F. y Scholes, M., 1973, "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, 637 - 654.

Branch, B., 2002, "The costs of bankruptcy. A review", *International Review of Financial Analysis*, 11, 39 - 57.

Chung, Y. P. y Johnson, H., 1994, "Extendible options: The general case", *Documento de trabajo*.

Curnow, R.N. y Dunnett, C.W., 1962, "The numerical evaluation of certain multivariate normal integrals", *Annals of Mathematical Statistics*, 33, 571 – 579.

Dumitrescu, A., 2007, "Valuation of Defaultable Bonds and Debt Restructuring", *Journal of Corporate Finance*, 13, 94 - 111.

Forte, S. y Peña, J.I., 2003, "Debt refinancing and credit risk", *Business Economics Working Paper*, Universidad Carlos III, wb031704.

Franks, J. y Torous, W., 1989, "An empirical investigation of U.S. firms in reorganization", *Journal of Finance*, 44, 747 - 769.

Franks, J. y Torous, W., 1994, "A comparison of financial recontracting in distressed exchanges and Chapter 11 reorganizations", *Journal of Financial Economics*, 35, 345 – 370.

Haugen, R. y Senbet, L., 1978, "The insignificance of bankruptcy costs to the Theory of Optimal Capital Structure", *Journal of Finance*, 33, 383 - 393.

Haugen, R. y Senbet, L., 1988, "Bankruptcy and agency costs: Their significance to the Theory of Optimal Capital Structure", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23, 27 - 38.

Leland, H., 1994, "Corporate debt value, bond covenants and optimal capital structure", *Journal of Finance*, 49, 1213 - 1252.

Longstaff, F., 1990, "Pricing options with extendible maturities: Analysis and applications", *Journal of Finance*, 45, 935 - 957.

Mella-Barral, P., 1999, "The dynamics of default and debt reorganization", *Review of Financial Studies*, 12, 535 - 578.

Mella-Barral, P. y Perraudin, W., 1997, "Strategic debt service", *Journal of Finance*, 52, 531 - 556.

Merton, R. C., 1974, "On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates", *Journal of Finance*, 29, 449 - 470.

Moraux, F. y Navatte, P., 2004, "Extending the maturity of a defaulting debt: When it is worthwhile!", *Documento de trabajo*.

Ross, S.A., Westerfield, R.W. y Jaffe, J., 2005, *Corporate Finance*, McGraw-Hill.

Warner, J.B., 1977, "Bankruptcy costs: Some evidence", *Journal of Finance*, 32, 337 - 347.

	Valor de la empresa en $t = 0$						
T_1	$V_0 = 6$	$V_0 = 8$	$V_0 = 10$	$V_0 = 12$	$V_0 = 14$	$V_0 = 16$	$V_0 = 18$
0.0	0.0000	0.0540	0.6137	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2	4.4557e-5	0.0567	0.2183	0.0286	0.0003	9.7642e-7	9.6165e-10
0.4	0.0003	0.0410	0.0921	0.0234	0.0017	5.4848e-5	1.1185e-6
0.6	0.0004	0.0169	0.0297	0.0107	0.0016	0.0001	8.9391e-6
0.8	9.6644e-5	0.0017	0.0028	0.0013	0.0003	4.7548e-5	5.8321e-6

Cuadro 1: Valor del privilegio de extensión de una empresa con la posibilidad de llevar a cabo una reorganización para diferentes valores de T_1 y de V_0. El valor nominal inicial de la deuda es $K_1 = 10$, su nuevo valor nominal es $K_2 = 11$, su nuevo vencimiento es $T_2 =$ 1 año y el coste de la reorganización es $A_1 = 0.03$. El tipo de interés anual libre de riesgo es 0.06 y la varianza anual del rendimiento del valor de la empresa es 0.04.

	Valor de la empresa en $t = 0$						
	$V_0 = 0$	$V_0 = 4$	$V_0 = 8$	$V_0 = 10$	$V_0 = 12$	$V_0 = 16$	$V_0 = 20$
T_1	0.8328	0.7942	0.1733	0.0000	0.2402	0.6000	0.8328
EPV	0.0000	4.1186e-7	0.0569	0.6137	0.0292	1.3476e-4	3.5435e-7

Cuadro 2: Maximización del valor privilegio de extensión respecto de T_1 para diferentes valores de V_0 para una empresa con la posibilidad de llevar a cabo una reorganización. El valor nominal inicial de la deuda es $K_1 = 10$, su nuevo valor nominal es $K_2 = 11$, el vencimiento nuevo de la deuda es $T_2 = 1$ año y el coste de la reorganización es $A_1 = 0.03$. El tipo de interés anual libre de riesgo es 0.06 y la varianza anual del rendimiento del valor de la empresa es 0.04. En el cuadro se muestran los valores de T_1 que maximizan el valor del privilegio de extensión para diferentes valores de la empresa, así como el valor del privilegio de extensión obtenido para cada caso.

T_2	Valor de la empresa en $t = 0$						
	$V_0 = 6$	$V_0 = 8$	$V_0 = 10$	$V_0 = 12$	$V_0 = 14$	$V_0 = 16$	$V_0 = 18$
0.4	2.0369e-8	0.0007	0.0048	0.0006	2.0391e-6	3.1133e-9	1.0747e-12
0.6	2.8541e-7	0.0072	0.0504	0.0040	2.2215e-5	2.4755e-8	1.0203e-11
0.8	3.0076e-6	0.0264	0.1116	0.0100	7.9243e-5	1.1423e-7	6.0403e-11
1.0	4.4557e-5	0.0567	0.2183	0.0286	0.0003	9.7642e-7	9.6165e-10

Cuadro 3: Valor del privilegio de extensión de una empresa con la posibilidad de llevar a cabo una reorganización para diferentes valores de T_2 y de V_0. El valor nominal inicial de la deuda es $K_1 = 10$, su vencimiento inicial es $T_1 = 0.2$ años, el nuevo valor nominal de la deuda es $K_2 = 11$ y el coste de la reorganización es $A_1 = 0.03$. El tipo de interés anual libre de riesgo es 0.06 y la varianza anual del rendimiento del valor de la empresa es 0.04.

	Valor de la empresa en t = 0						
	$V_0 = 0$	$V_0 = 4$	$V_0 = 8$	$V_0 = 10$	$V_0 = 12$	$V_0 = 16$	$V_0 = 20$
T_1	0.8000	0.8000	0.4458	0.0000	0.4047	0.7991	0.8000
T_1	1.0000	1.0000	0.6458	0.2000	0.6047	0.9991	1.0000
EPV	0.0000	4.0675e-7	0.0023	0.0597	0.0017	4.8176e-5	6.1836e-7

Cuadro 4: Maximización del valor privilegio de extensión respecto de T_1 y con período de extensión constante y conocido para diferentes valores de V_0 para una empresa con la posibilidad de llevar a cabo una reorganización. El período de extensión es $T_2 - T_1 = 0.02$. El valor nominal inicial de la deuda es $K_1 = 10$. El valor nominal nuevo de la deuda es $K_2 = 11$ y el coste de la reorganización es $A_1 = 0.03$. El vencimiento máximo para la nueva deuda es 1 año. El tipo de interés anual libre de riesgo es 0.06 y la varianza anual del rendimiento del valor de la empresa es 0.04. En el cuadro se muestran los valores de T_1 que maximizan el valor del privilegio de extensión para diferentes valores de la empresa, así como el valor del privilegio de extensión obtenido para cada caso.

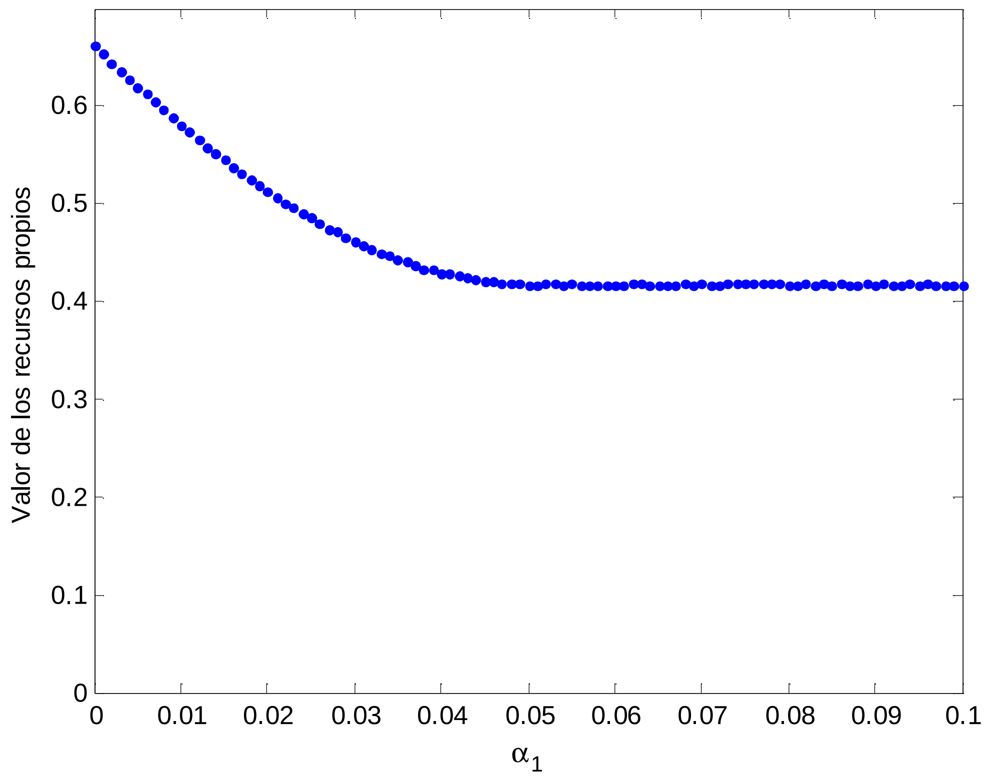

Figura 1: Valor de los recursos propios en función de α_1 para una empresa que tiene la posibilidad de llevar a cabo una reorganización. Los datos utilizados son $V_0 = 10$, $K_1 = 10$, $K_2 = 11$, $T_1 = 0.2$ y $T_2 = 1$. El coste de la reorganización en T_1 es $A_1 = \alpha_1 V_1$, donde V_1 es el valor de la empresa en T_1. El tipo de interés anual libre de riesgo es 0.06 y la varianza anual del rendimiento del valor de la empresa es 0.04. Cada punto se obtiene simulando por Monte Carlo un millón de trayectorias (500.000 + 500.000 antitéticas).

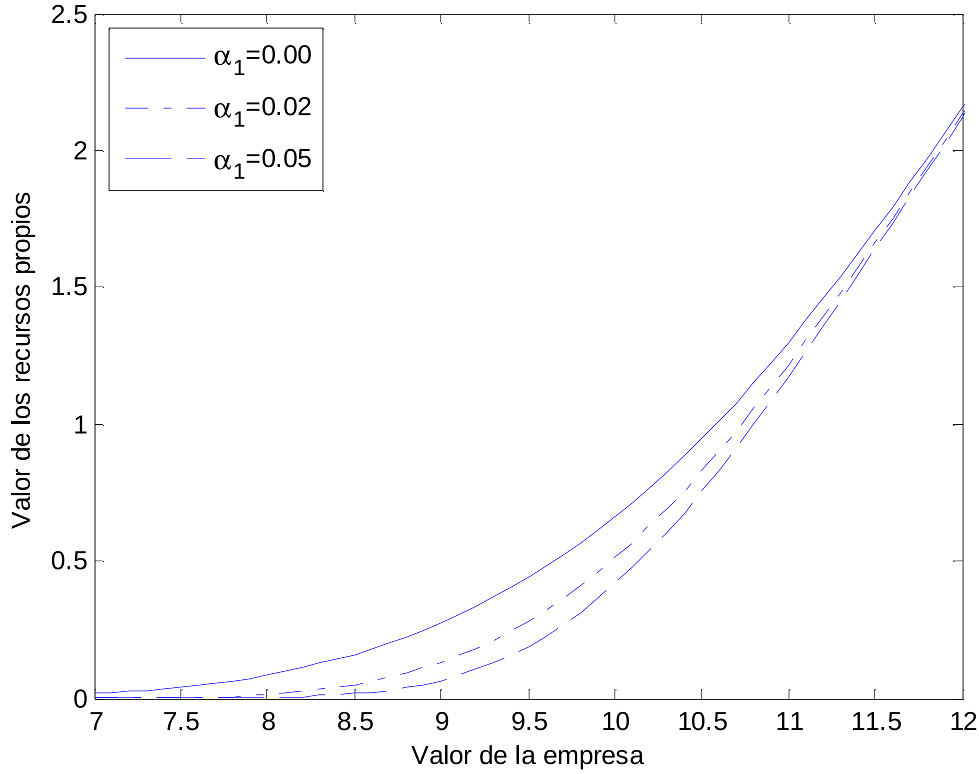

Figura 2: Valor de los recursos propios de una empresa que tiene la posibilidad de llevar a cabo una reorganización en función del valor de la empresa en $t = 0$ para diferentes valores de α_1. El valor inicial de la deuda es $K_1 = 10$, el valor modificado de la deuda es $K_2 = 11$, el vencimiento inicial de la deuda es $T_1 = 0.2$ y el vencimiento modificado es $T_2 = 1$. El tipo de interés anual libre de riesgo es 0.06 y la varianza anual del rendimiento del valor de la empresa es 0.04. El coste de la reorganización en T_1 es $A_1 = \alpha_1 V_1$, donde V_1 es el valor de la empresa en T_1. Cada punto se ha obtenido simulando por Monte Carlo un millón de trayectorias (500.000 + 500.000 antitéticas).

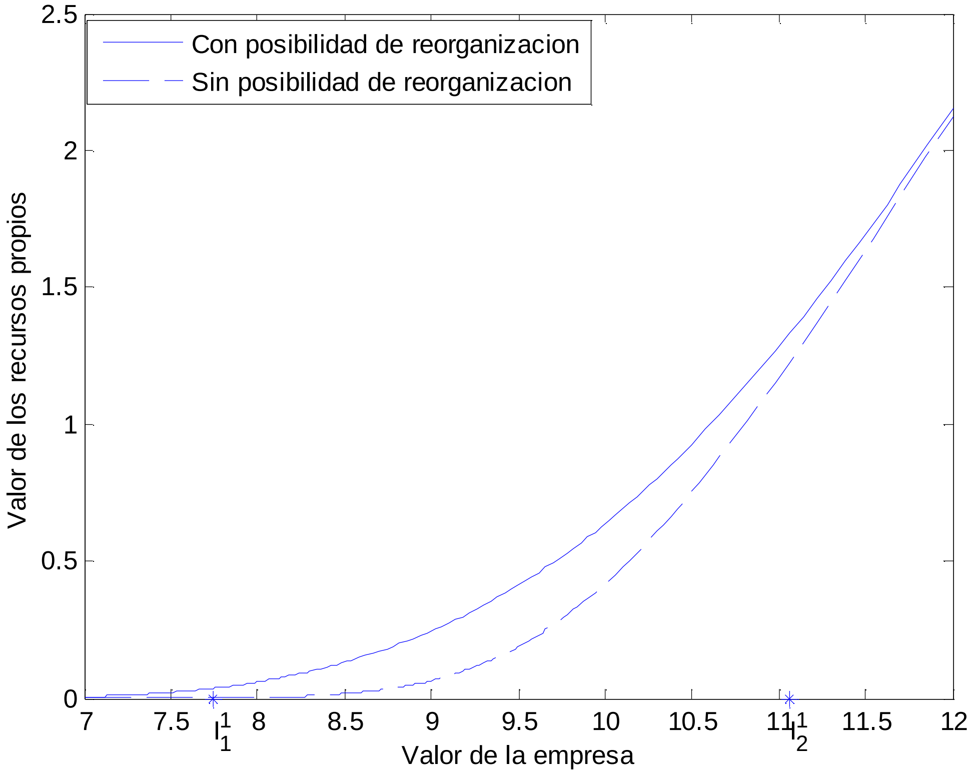

Figura 3: Valor de los recursos propios de una empresa que tiene una sola deuda cuando existe la posibilidad de llevar a cabo una reorganización y cuando no existe dicha posibilidad. El tipo de interés anual libre de riesgo es 0.06, la varianza anual del rendimiento del valor de la empresa es 0.04, el vencimiento inicial de la deuda es 0.2 años, y el vencimiento ampliado 1 año. El valor nominal inicial de la deuda es $K_1 = 10$ y el valor nominal nuevo de la deuda es $K_2 = 11$. El coste de la reorganización es $A_1 = 0.03$.

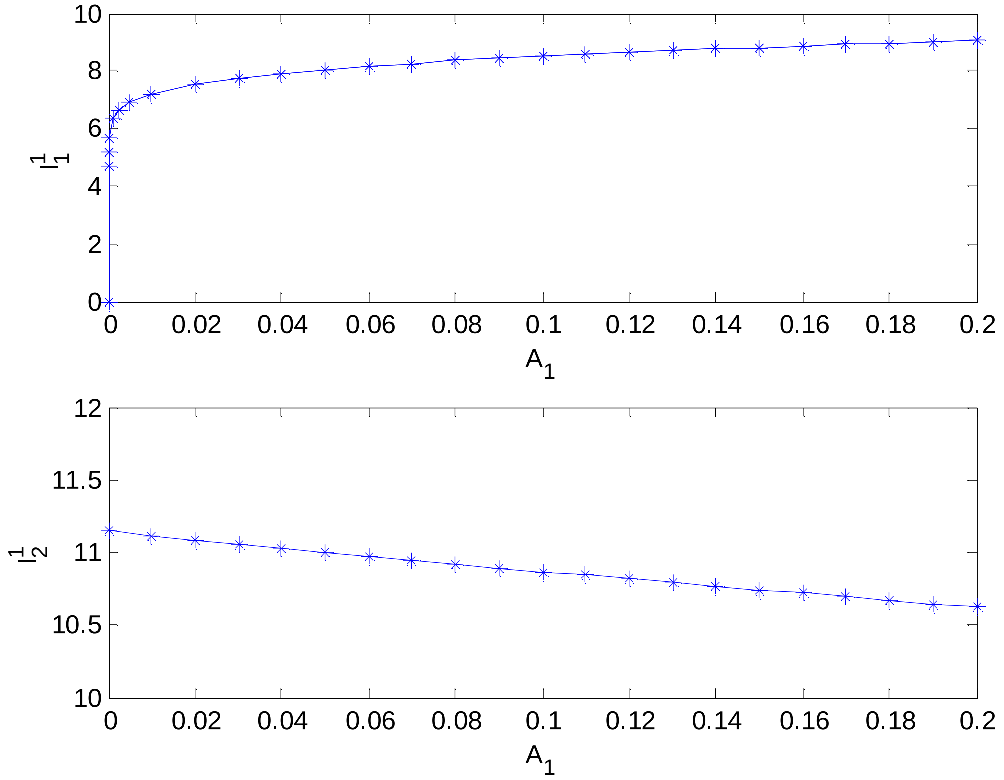

Figura 4: Relación entre el coste de reorganización, A_1, e I_1^1 e I_2^1 para una empresa con una sola deuda y una posibilidad de reorganización. Los datos utilizados son $r = 0.06$, $\sigma = 0.2$, $K_1 = 10$, $T_1 = 0.2$, $K_2 = 11$ y $T_2 = 1$.

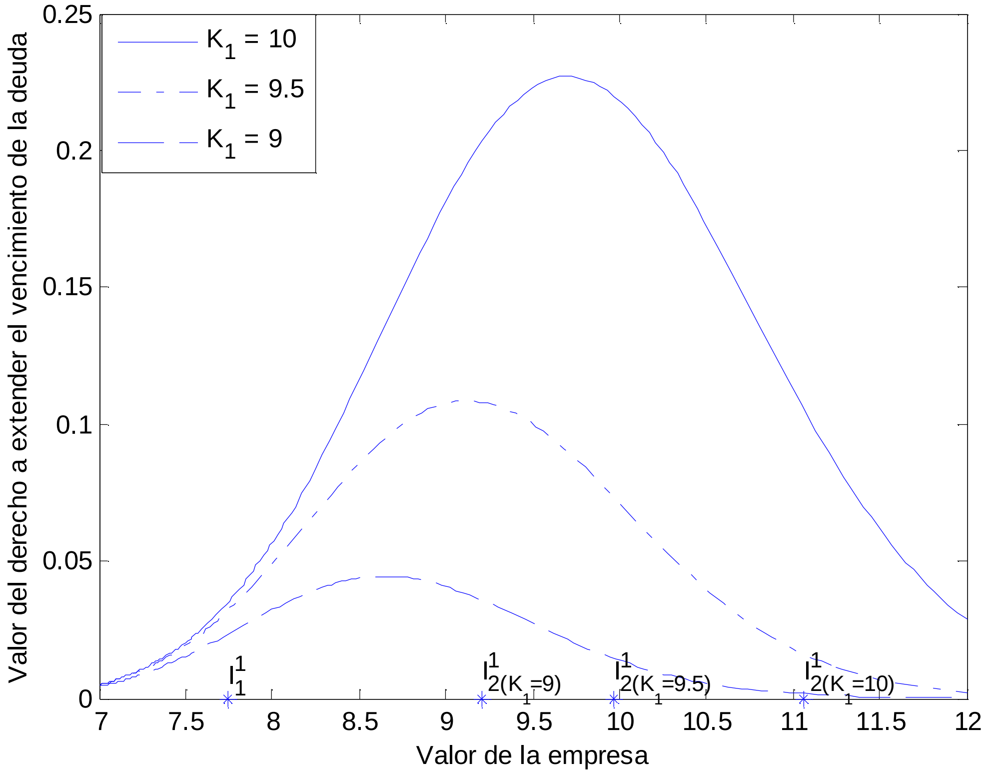

Figura 5: Valor del derecho a extender el vencimiento de la deuda cuando la empresa tiene una única deuda y la posibilidad de llevar a cabo una reorganización. Los datos utilizados son $r = 0.06$, $\sigma = 0.2$, $T_1 = 0.2$, $T_2 = 1$, $K_1 = 9, 9.5, 10$, $K_2 = 11$ y $A_1 = 0.03$.

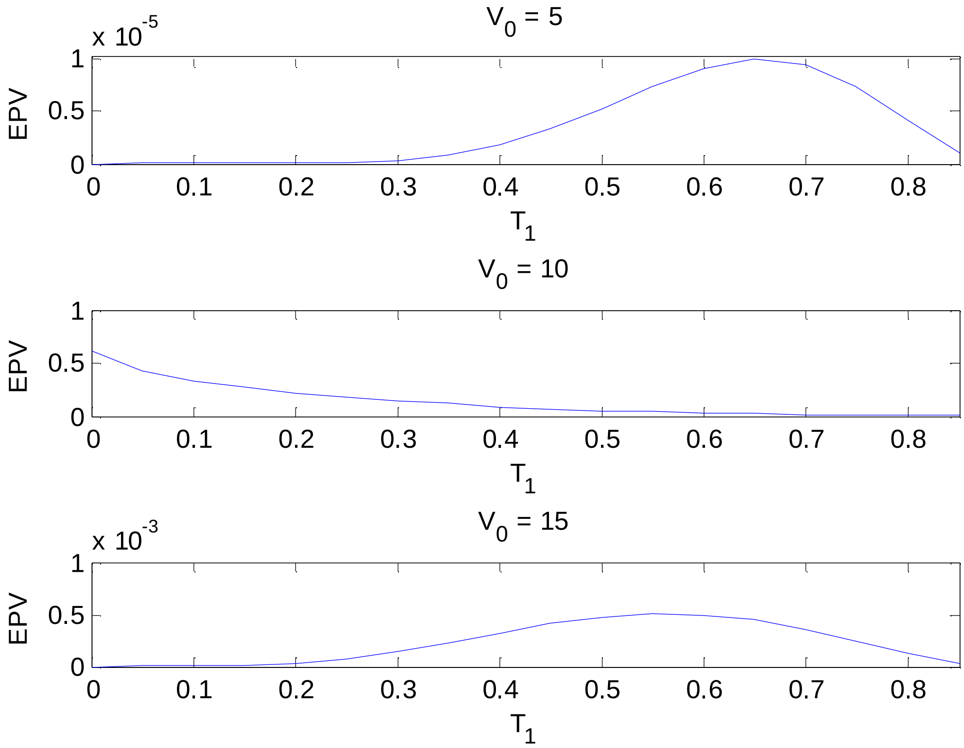

Figura 6: Valor del derecho a extender el vencimiento de la deuda en función de T_1 cuando la empresa tiene una única deuda y existe la posibilidad de llevar a cabo una reorganización. Los datos utilizados son $r = 0.06$, $\sigma = 0.2$, $T_1 = 0.2$, $T_2 = 1$, $K_1 = 10$, $K_2 = 11$ y $A_1 = 0.03$.

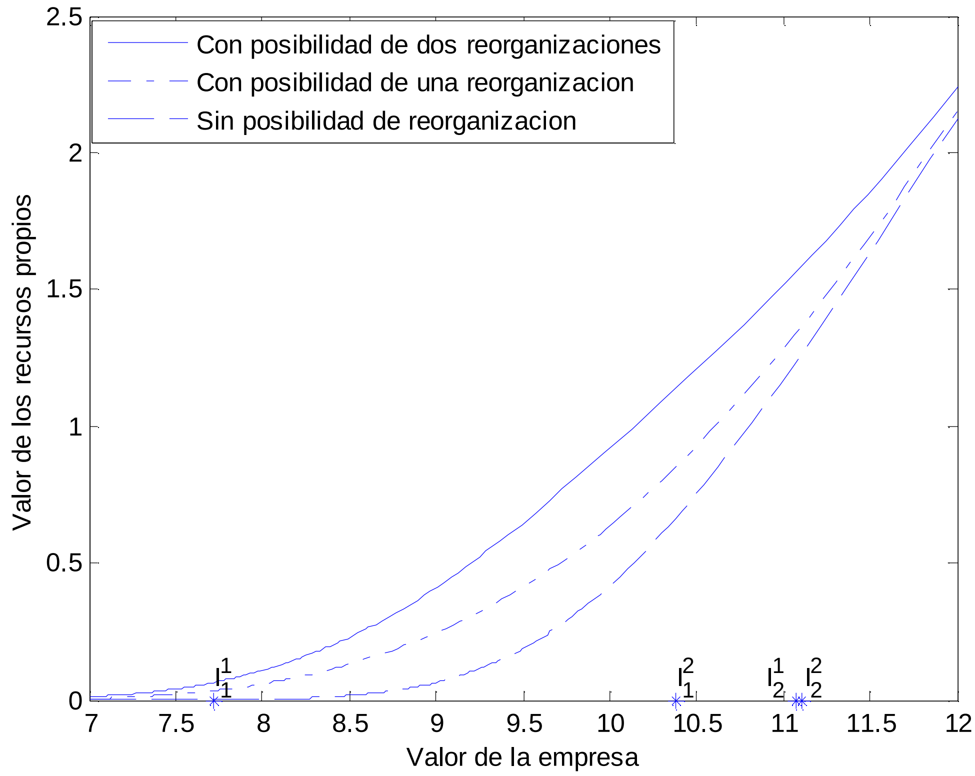

Figura 7: Comparación del valor de los recursos propios de una empresa financiada por una única deuda cuando a) no tiene la posibilidad de llevar a cabo una reorganización, b) cuando tiene la posibilidad de reorganizarse una vez y c) cuando tiene la posibilidad de reorganizarse dos veces. Los datos utilizados son $r = 0.06$, $\sigma = 0.2$, $T_1 = 0.2$, $T_2 = 1$, $T_3 = 1.2$, $K_1 = 10$, $K_2 = 11$, $K_3 = 12$, $A_1 = 0.03$ y $A_2 = 0.03$.

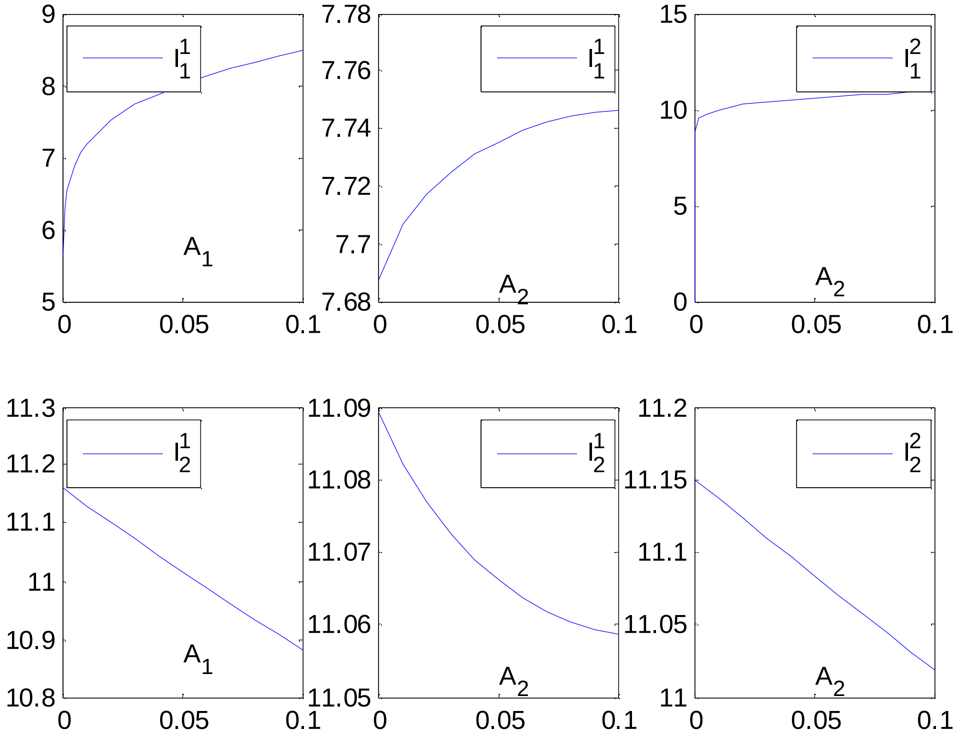

Figura 8: Relación entre A_1 e I_1^1 e I_2^1 para $A_2 = 0.03$, y entre I_1^1, I_2^1, I_1^2 e I_2^2 para $A_1 = 0.03$, cuando la empresa tiene una única deuda y existe la posibilidad de llevar a cabo dos reorganizaciones. Los datos utilizados son $r = 0.06$, $\sigma = 0.2$, $T_1 = 0.2$, $T_2 = 1$, $T_3 = 1.2$, $K_1 = 10$, $K_2 = 11$ *y* $K_3 = 12$.

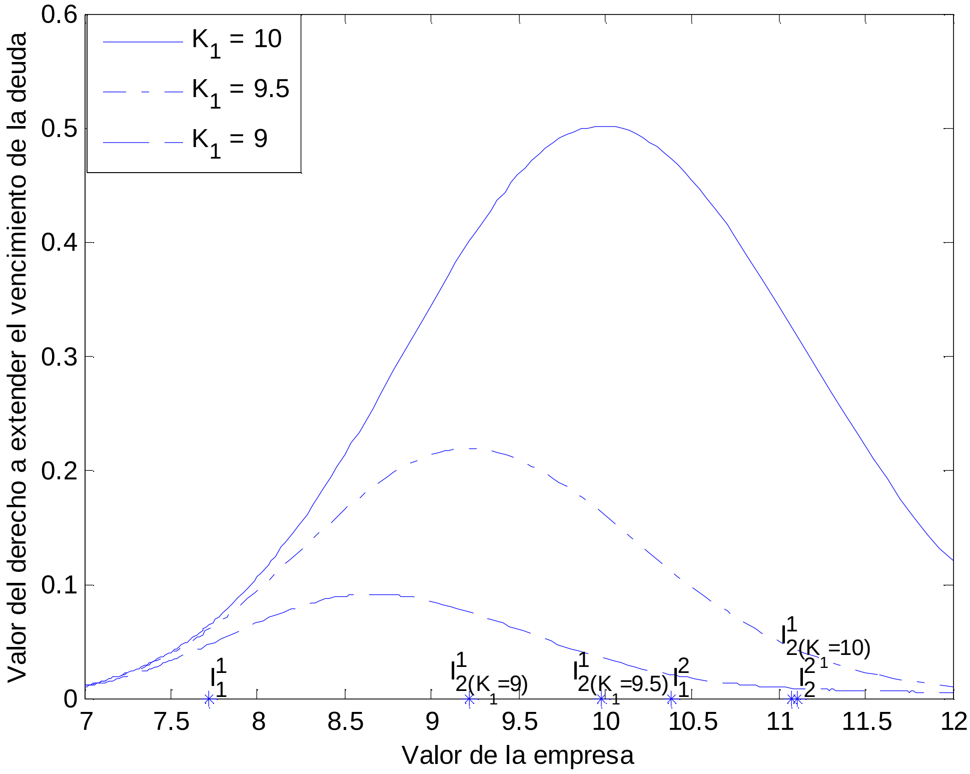

Figura 9: Valor del derecho a retrasar el pago de la deuda cuando la empresa tiene la posibilidad de llevar a cabo dos reorganizaciones. Los datos utilizados son $T_1 = 0.2$, $T_2 = 1$, $T_3 = 1.2$, $K_1 = 9$, 9.5 y 10, $K_2 = 11$, $K_3 = 12$, $A_1 = 0.03$, $A_2 = 0.03$, $r = 0.06$ *y* $\sigma = 0.2$.