



La matemática en la simulación con GeoGebra. Una experiencia con el movimiento en caída libre

Mathematics on the simulation with GeoGebra. An experience with the free fall motion

Leonela M. Rubio U.

Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática
leonela.rubio@aprenderenred.com.ve

Juan Luis Prieto G.

Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática
Universidad del Zulia
juan.prieto@aprenderenred.com.ve

José Ortiz B.

Universidad de Carabobo, Venezuela
ortizbuitrago@gmail.com

RESUMEN.

Actualmente las experiencias de modelación y el uso de tecnologías digitales en las aulas de clase son temas de gran interés para los profesores, formadores e investigadores en Educación Matemática. Por un lado, la modelación matemática favorece el uso de la Matemática como un instrumento para el abordaje de situaciones y fenómenos del mundo. Por otro lado, integrar las tecnologías digitales (como simuladores, videojuegos, entre otros) en la enseñanza de las Matemáticas y las Ciencias, en particular de la Física, permite vincular los hechos e ideas asociadas a un fenómeno físico, entre sí y con marcos teóricos que los sustentan. Al fusionar la modelación y las tecnologías digitales a través de la simulación se obtienen entornos de aprendizaje que promueven el desarrollo de conocimiento y habilidades de pensamiento científico en los estudiantes. Sin embargo, la mayoría de las investigaciones en esta área están orientadas hacia una mayor comprensión de las formas de usar eficientemente estos simuladores en las clases de ciencias, dejando de lado al proceso de su elaboración como una verdadera oportunidad para aprender Matemática y otros saberes asociados. En este sentido, el presente trabajo describe la secuencia de pasos de construcción creada para elaborar un simulador del movimiento en caída libre con GeoGebra. Esto con el doble propósito de (i) develar la Matemática implícita en los procesos de construcción de simuladores con GeoGebra y (ii) motivar la creación de otros simuladores con un propósito similar al mencionado en este trabajo.

PALABRAS CLAVE.

Matemática, Simuladores, GeoGebra, Recurso didáctico.



**ABSTRACT.**

Nowadays, the experiences of modeling and the use of digital technologies in classroom are matters of interest for teachers, trainers and researchers in Mathematics Education. On the one hand, mathematical modeling favors the use of Mathematics as a tool to approach situations and events of the world. On the other hand, integrating digital technologies (such as simulators, video games and others) in Mathematics and Science teaching, especially in Physics, enable to link the facts and ideas associated with a physical phenomenon between them and with theoretical frames which support them. By fusing modeling and digital technologies through simulation, there are obtained learning environments that promote the development of knowledge and skills of scientific thinking in students. However, most researches in this area are oriented towards a better comprehension of the ways to use efficiently these simulations in science classes, leaving aside the process of making them as a real opportunity to learn Mathematics and other associated knowledge. In this sense, this paper describes the sequence of construction steps designed to develop a simulator of the Free Fall Motion with GeoGebra. This was done with the dual intention of (i) revealing the underlying Mathematics in the construction process of simulators with GeoGebra and (ii) encouraging the creation of other simulators with a similar purpose as mentioned in this work.

KEY WORDS.

Mathematics, Simulations, GeoGebra, Didactic resource.

Introducción.

Hoy en día, muchos profesores, formadores e investigadores en Educación Matemática se están interesando cada vez más por las experiencias de modelación y uso de tecnologías digitales en diferentes escenarios educativos (Artigue, 2010; Greefrath, 2011; Kaiser, 2014; Oliveira, 2013; Mora & Ortiz, 2012; Ortiz, Rico & Castro, 2008; Stacey, 2015). La importancia de insertar la modelación matemática en la enseñanza y aprendizaje radica en la naturaleza integradora de este proceso, en el cual se favorece el uso de la Matemática como un instrumento para el abordaje de situaciones y fenómenos del mundo real (Villa-Ochoa, 2013; 2007). Este tipo de integración permite superar muchas de las dificultades derivadas de las prácticas tradicionales de enseñanza que aún predominan en nuestras instituciones escolares. Aunque se piense que la modelación matemática es un proceso generado a partir de la resolución de problemas matemáticos típicos, tales como las “tareas de modelación” descritas por Blum y Borromeo (2009), en el campo de la Educación en Ciencias, la modelación es considerada dentro de un marco de experiencias y actividades más amplio, que incluye especialmente a las prácticas de experimentación mediadas por tecnologías digitales.

Las ventajas de integrar las tecnologías digitales –p.e., software de geometría dinámica, CAS, hoja de cálculo, entre otros– en la Educación Matemática han sido ampliamente reseñadas en la literatura especializada (Artigue, 2013; Hoyles & Lagrange, 2010). Sin embargo, en el estudio de las ciencias, y en particular de la Física, es notorio que algunas tecnologías, como los simuladores y videojuegos, han comenzado a utilizarse como medios





para vincular los hechos e ideas asociadas a un fenómeno físico, entre sí y con marcos teóricos que les sustentan (Clark, Nelson, Sengupta & D'Angelo, 2009; González, Molina & Sánchez, 2014; National Research Council, 2011). El uso de simuladores computacionales ha traído beneficios al estudio de las ciencias ya que estos facilitan la visualización, exploración y formulación de explicaciones para fenómenos científicos que son de difícil acceso en el ámbito experiencial escolar. Además, los simuladores ayudan a enlazar mentalmente las representaciones abstractas del fenómeno representado –incluyendo a los objetos matemáticos implícitos en éste– con procesos de aprendizaje y resultados de la observación directa de los estudiantes (National Research Council, 2011).

De esta manera, la modelación y las tecnologías digitales se fusionan para proporcionar entornos de aprendizaje basados en simuladores que favorecen el desarrollo de conocimiento y habilidades de pensamiento científico en los estudiantes. No obstante, los esfuerzos en investigación siguen orientados hacia una mayor comprensión de las formas de usar eficientemente estos simuladores en las clases de ciencias, dejando de lado al proceso de elaboración de estos recursos como una verdadera oportunidad para aprender matemática y otros saberes asociados. Aunque consideramos que la modelación matemática y el uso de las tecnologías digitales tienen cabida en la elaboración de simuladores de fenómenos físicos (Cervantes, Rubio & Prieto, 2015; Prieto & Gutiérrez, 2015), somos conscientes de la necesidad de enfatizar en las relaciones que se dan entre la Matemática y los fenómenos representados en un simulador, especialmente en el momento de su elaboración, como un primer paso hacia una comprensión del rol desempeñado por la modelación matemática y el uso instrumental de las tecnologías digitales durante el diseño.

Con este propósito, llevamos a cabo una experiencia de simulación que es descrita en este trabajo y se apoya en el GeoGebra, un software libre, gratuito y de código abierto, diseñado originalmente para tratar contenidos matemáticos escolares pero, dada su versatilidad, está siendo usado también para tratar contenidos de Física a través del uso de simuladores (Hernández, 2011). Esta tecnología funciona perfectamente en distintos sistemas operativos y puede ser descargada desde su web oficial <https://www.geogebra.org/>. Entre otras razones importantes de esta selección se tiene que, por un lado, el GeoGebra ofrece una variedad de apariencias que se ajustan al dominio matemático que se trabaje (ver Figura 1) y, por otro lado, integra múltiples representaciones de los objetos matemáticos en un mismo entorno de aprendizaje, conceptualmente abundante, que favorece la exploración, construcción y validación de modelos matemáticos (Hohenwarter y Fuchs, 2005).



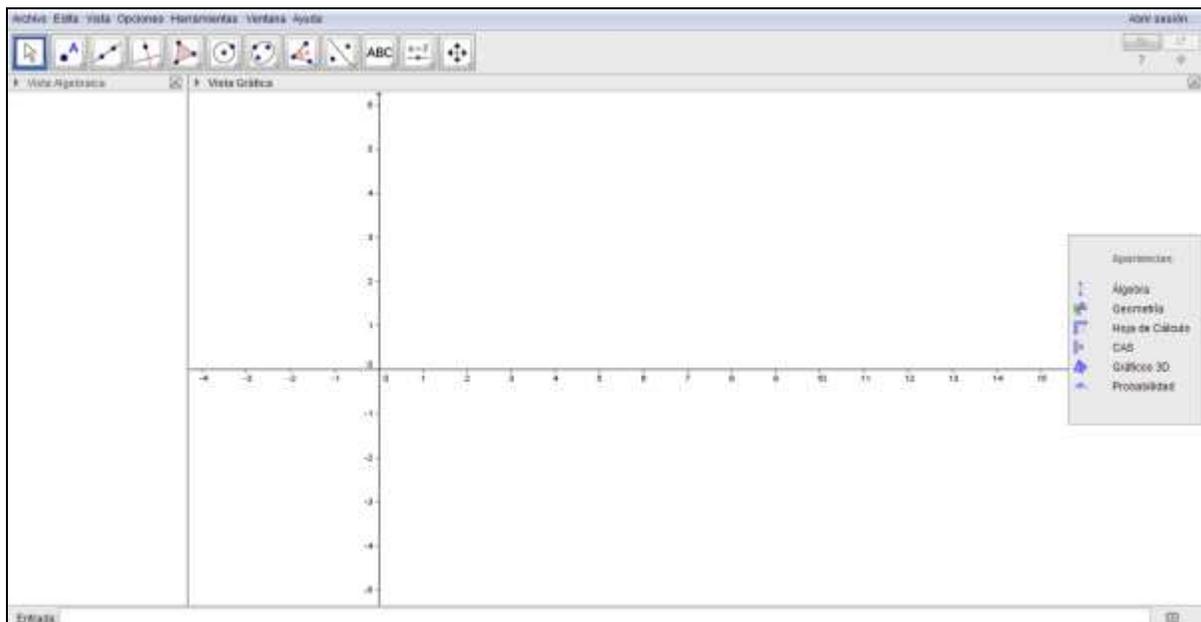


Figura 1. Interfaz de inicio del GeoGebra en su apariencia "Algebra".

Tales modelos pueden representar alguna situación de la realidad y tomar la forma de un simulador, por lo que vale la pena explorar la Matemática implícita en la experiencia de elaboración de uno de estos simuladores. En este sentido, el trabajo describe la secuencia de tareas de construcción de un simulador del movimiento en caída libre con el GeoGebra. La descripción se hace con un doble propósito. Por un lado, se busca develar la Matemática implícita en los procesos de construcción con el GeoGebra de los elementos que emulan la escena del movimiento. Por otro lado, se procura que la experiencia realizada contribuya a orientar y motivar para la construcción de otros simuladores con propósitos similares, lo que conlleva a una profundización en la comprensión del rol que desempeñan los modelos matemáticos en todo el proceso.

Simuladores con GeoGebra.

En el contexto de la Educación en Ciencias, los simuladores se consideran como "modelos computacionales" de situaciones reales o hipotéticas, o de fenómenos naturales, que permiten un acercamiento al estudio de las ciencias desde la indagación y la experimentación (National Research Council, 2011). Desde esta perspectiva, un simulador con GeoGebra es un simulador computacional creado mediante el uso integrado de las herramientas de construcción y medida del programa, así como de sus opciones dinámicas. Esta clase de simuladores se diferencian de los diagramas estáticos y de las animaciones, no solo por su dinamismo, sino también por las posibilidades que ofrecen al usuario de interactuar con el fenómeno mediante el control de sus variables. Con respecto a las características de los simuladores con GeoGebra, nos apoyamos en las ideas de Clark y otros (2009) para atribuirles tres cualidades fundamentales: el grado de control, marco instruccional y representación de la información.



Con el *grado de control* nos referimos al nivel de interacción entre el usuario y el fenómeno que concede el simulador. En un simulador con GeoGebra este grado de control varía desde un nivel limitado por algún propósito instruccional, a uno más amplio que incluye la determinación de parámetros o la intervención directa en la programación subyacente. El *marco instruccional* se refiere a la dependencia que el simulador tiene de una secuencia instruccional. Al respecto, nuestros simuladores pueden adaptarse fácilmente a los requerimientos del usuario, ya que no se enmarcan en escenarios instruccionales determinados, al menos por el momento. La *representación de la información* está ligada a la variedad de representaciones del contenido –textos, gráficos, símbolos o íconos abstractos– que se ponen en juego al interactuar con el simulador. En nuestro caso, la información se representa mediante gráficos, deslizadores, casillas y botones de acción, con los cuales es posible explorar el fenómeno.

La elaboración de simuladores con GeoGebra se acompaña de una determinación de la situación o fenómeno a simular, algunos modelos del fenómeno conocidos y las herramientas para el diseño; como también de la toma de decisiones respecto a estas cuestiones, antes y durante la simulación. En nuestro caso, el movimiento en caída libre constituye el fenómeno de la simulación que se aborda mediante la recreación de una escena del mundo real; la teoría física y matemática en torno a este movimiento nos aporta modelos que apoyan el diseño de forma directa o indirecta, y el GeoGebra proporciona los insumos necesarios para la representación de la situación. Las decisiones que se han tomado sobre estas cuestiones en la simulación se detallan en los siguientes apartados.

Consideraciones de la simulación.

La simulación se inició con la toma de decisiones sobre la situación o fenómeno a representar. Estas decisiones giran en torno a algunos rasgos teóricos, curriculares y contextuales del movimiento en caída libre que han servido de base a las decisiones y acciones inherentes a la elaboración del simulador.

Consideraciones teóricas.

En lo teórico, consideramos que el fenómeno de **caída libre** es un tipo de *Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado* (MRUV), con el cual los cuerpos se mueven bajo la influencia única de la aceleración de gravedad¹, sin importar su movimiento inicial (Serway & Jewett, 2008). En condiciones ideales, todo cuerpo en caída libre describe una trayectoria rectilínea vertical y no se ve afectado por la resistencia del aire. Aunque el estudio de este fenómeno incluye tanto el movimiento de cuerpos que se dejan caer desde el reposo, como de aquellos que se lanzan hacia arriba o abajo con cierta velocidad inicial, hemos considerado el caso de objetos que caen verticalmente con una velocidad inicial de módulo igual a cero.

El comportamiento físico de todo cuerpo que cae libremente queda determinado por una serie de **fórmulas matemáticas** que describen las relaciones entre las magnitudes involucradas en el fenómeno y que se utilizan con frecuencia en el estudio del MRUV. Debido a que las magnitudes involucradas –desplazamiento, velocidad y aceleración– tienen naturaleza vectorial, se decidió trabajar sólo con los módulos de estas magnitudes,





ya que la dirección y el sentido de estas en el simulador no varían cuando se dejar caer un cuerpo en reposo. Las fórmulas utilizadas se muestran en el cuadro 1.

Fundamentales	Aplicadas a la caída libre	Utilizadas en el simulador
$\vec{v} = \vec{v}_i + \vec{a} \cdot \Delta t$	$\vec{v} = \vec{v}_i - \vec{g} \cdot t$	$v = g \cdot t$
$\Delta \vec{x} = \vec{v}_i \cdot \Delta t + \frac{\vec{a} \cdot \Delta t^2}{2}$	$\vec{y} = y_i + \vec{v}_i \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \vec{g} \cdot t^2$	$y = \frac{g \cdot t^2}{2}$
$\vec{v}^2 = \vec{v}_i^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \Delta \vec{x}$	$\vec{v}^2 = \vec{v}_i^2 - 2 \cdot \vec{g} \cdot (\vec{y} - y_i)$	No fue utilizada

Cuadro 1. Uso de las fórmulas matemáticas

A partir de estas fórmulas, el análisis del movimiento con el simulador se limita a considerar los parámetros cinemáticos: y (altura de la caída), t (tiempo de caída) y v (rapidez), los cuales son controlados manualmente por medio de herramientas del GeoGebra.

Consideraciones curriculares.

En lo curricular, consideramos los propósitos de la enseñanza del movimiento en caída libre dentro de los programas y textos escolares oficiales en Venezuela como elementos que pueden justificar la propuesta del simulador. Por un lado, se destaca la presencia de este contenido en los programas vigentes de Física del nivel medio (Ministerio de Educación, 1987) y otras propuestas de reforma curricular más actuales (Ministerio del Poder Popular para la Educación, 2007). En estos documentos se plantea que los estudiantes del tercer año (14-15 años) deben ser capaces de establecer las características y regularidades cinemáticas del MRUV, para lo cual el profesor debe propiciar situaciones de aprendizaje que involucre a los estudiantes en procesos de interpretación física de las variaciones de la velocidad y discutan la situación planteada en términos de la trayectoria, los cambios de posición, la velocidad y la aceleración.

Por otro lado, el movimiento en caída libre es tratado especialmente en el tomo 1 del libro "Ciencias Naturales" de tercer año de la *Colección Bicentenario* (Ministerio del Poder Popular para la Educación, 2014). La información aportada por el texto procura que los estudiantes avancen en la comprensión de este fenómeno, cotejando sus conocimientos y experiencias previas de tal movimiento con los saberes expuestos en el texto. Con esta información se decide por el diseño de un simulador que posibilite a los estudiantes la construcción de significados del concepto de **gravedad** como una regularidad presente en el movimiento en caída libre.



Consideraciones del contexto

En lo contextual, consideramos conveniente representar una escena de la realidad que aludiera al movimiento en caída libre y pudiera ser simulada con el GeoGebra, de manera que el recurso resultara atractivo para los estudiantes y profesores. En concreto hemos optado por recrear una escena de rescate en la que un salvavidas es lanzado desde un helicóptero a un hombre que se encuentra en medio del mar. Ignorando la resistencia del aire y las variaciones de la gravedad en los distintos puntos del planeta, el movimiento del salvavidas en caída libre ha de regirse por las fórmulas antes descritas (ver Cuadro 1).

La recreación de la escena de rescate con el GeoGebra ha supuesto la consideración de dos tipos de elementos contextuales: (i) *estáticos*, que son diagramas que sirven para ambientar o decorar la escena de rescate en sí, y (ii) *dinámicos*, que cumplen la función de otorgarle movimiento al salvavidas. La atención de los elementos estáticos y dinámicos del simulador se hace a través del planteamiento y resolución de un conjunto de tareas de construcción con GeoGebra que dan forma al diseño y que se describen a continuación.

Descripción de la secuencia de construcción.

A partir de lo anterior, se procedió a la elaboración del simulador con GeoGebra. Una reflexión sobre el proceso de construcción llevado a cabo nos condujo al establecimiento de una secuencia de pasos de construcción estructurada en siete tareas principales. Las tareas 1, 2, 6 y 7 dan cuenta de los elementos decorativos del simulador, mientras que el resto de tareas se refieren más a los elementos dinámicos. Para abordar las tareas se utilizó la interfaz del programa con apariencia *Álgebra* dadas las facilidades que brinda para introducir y manipular los objetos de la construcción. En la descripción de cada tarea se busca resaltar los contenidos matemáticos implícitos en las acciones que se emprenden para responder a las demandas del diseño.

Tarea No. 1: Construcción del paisaje de fondo.

La construcción de paisaje de fondo consistió en representar al cielo y al mar en la *Vista Gráfica* del GeoGebra. Para ello consideramos al horizonte como una línea divisoria entre el cielo y el mar, representado por medio de una **recta horizontal** que sirve de referencia durante la construcción. A conveniencia se seleccionó al *eje x* como esta recta de referencia, siendo dibujada al introducir la ecuación $y = 0$ en la *Barra de entrada* del software.

Luego de esto, el cielo y el mar fueron dibujados mediante **semiplanos** que resultan de introducir las inecuaciones $y > 0$ y $y < 0$ en la *Barra de entrada*. De manera predeterminada, los semiplanos obtenidos se ubican en la *capa 0* del recurso y se muestran en un mismo color que luego fue modificado para asemejarlos con la realidad. Para mejorar aún más la estética del simulador, a la recta $y = 0$ se le asignó el color usado para el semiplano que representa al mar. La ambientación del cielo culminó con la colocación de dos imágenes de nubes a la izquierda y derecha de la interfaz, usando para ello la herramienta *Imagen*. Ambas imágenes fueron trasladadas a la *capa 1* para ser apreciadas.





El mar fue ambientado por cinco curvas del tipo **senoide** que simulaban unas olas. Estas curvas se crearon a partir de traslaciones hechas a una senoide de referencia cuya fórmula fue establecida luego de analizar la forma general de la **función seno**, en atención al aspecto que deberían tener las olas del mar. La fórmula general de la función seno considerada en este trabajo es:

$$f(x) = k \cdot \text{Sen}(a \cdot x + b) + c, \text{ con } k, a \in \mathbb{R}^* \text{ y } b, c \in \mathbb{R}$$

Los parámetros incluidos en la función permiten caracterizar a la curva asociada en relación a su forma y posición (Gutiérrez & Prieto, 2015). En el caso de la senoide, por un lado, el valor k define su **amplitud**, esto es, la distancia de cualquier punto máximo o mínimo de la curva hasta el eje horizontal que la divide en partes iguales. Por otro lado, el valor a define la **frecuencia** de la senoide y permite determinar su **período**. La frecuencia se refiere a la cantidad de **ciclos** presentes en 2π radianes y el período, denotado con la letra T , representa la cantidad de radianes que abarca un ciclo. Finalmente, los parámetros b y c definen la **traslación** de la senoide en la dirección horizontal y/o vertical, respectivamente. Con esta información se decidió por una curva de referencia con una amplitud igual a la mitad de la correspondiente a una senoide natural, cuya fórmula es $r(x) = 0,5 \cdot \text{Sen}(x)$. De esta manera, nos aseguramos de dar a la senoide la apariencia de olas deseada. Las fórmulas de las senoides que son trasladadas en la dirección horizontal o vertical se muestran en el cuadro 2.

Parámetros		Fórmula obtenida	Apariencia
b	c		
0	-1	$f(x) = 0,5 \cdot \text{Sen}(x) - 1$	$f(x)$ resulta de trasladar la curva $r(x)$ una unidad hacia abajo
-1	-2	$g(x) = 0,5 \cdot \text{Sen}(x - 1) - 2$	$g(x)$ resulta de trasladar la curva $r(x)$ una unidad hacia la izquierda y dos unidades hacia abajo
-0,3	-0,5	$h(x) = 0,5 \cdot \text{Sen}(x - 0,3) - 0,5$	$h(x)$ resulta de trasladar la curva $r(x)$ 3 décimas de unidad hacia la izquierda y cinco décimas de unidad hacia abajo
0	-3	$p(x) = 0,5 \cdot \text{sen}(x) - 3$	$p(x)$ resulta de trasladar la curva $r(x)$ 3 unidades hacia abajo
-0,7	-4	$q(x) = 0,5 \cdot \text{sen}(x - 0,7) - 4$	$q(x)$ resulta de trasladar la curva $r(x)$ 7 décimas de unidad hacia la izquierda y cuatro unidades hacia abajo

Cuadro 2. Fórmulas de las senoides usadas en la representación de las olas del mar.





Cada senoide del cuadro 2 fue creada con el GeoGebra introduciendo su fórmula en la *Barra de entrada*. Posteriormente se modificó el color de las curvas adoptando un tono claro que contrasta con el azul del mar. Para evitar otros cambios en las senoides como consecuencia de posar el puntero del ratón sobre ellas, la opción *Selección habilitada* fue desactivada sobre estos objetos y los creados anteriormente, sin incluir la recta $y = 0$ para hacer uso de ella en el resto de la construcción. Esta herramienta se encuentra ubicada en la pestaña *Avanzado* del menú *Propiedades*. La figura 2 muestra el producto obtenido tras la construcción.

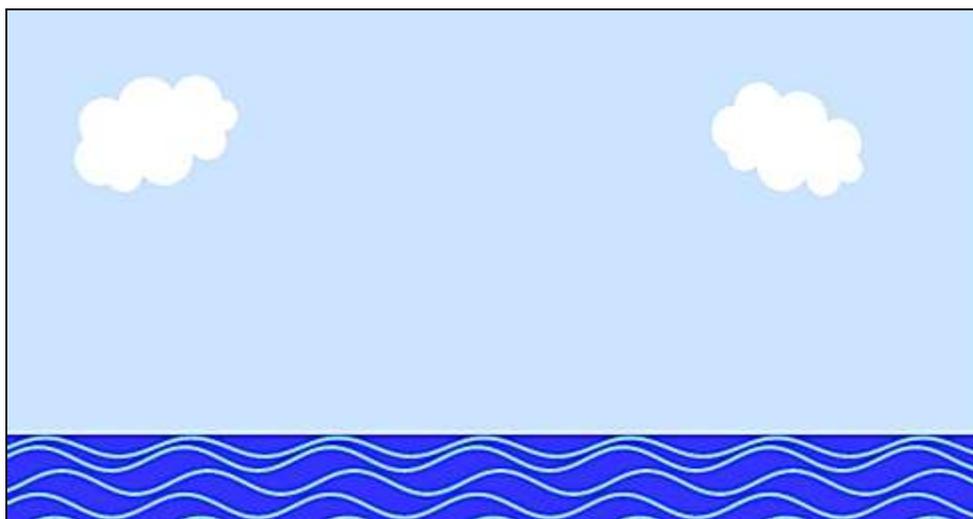


Figura 2. Paisaje de fondo.

Para continuar la construcción fue conveniente ocultar temporalmente los semiplanos, funciones seno e imágenes.

Tarea No. 2: Posicionamiento del panel de control.

La creación del panel de control en este simulador respondió a la necesidad de brindar al usuario la oportunidad de manipular los parámetros de la simulación. Además, el panel de control separa el paisaje de fondo de los parámetros cinemáticos: y (altura), t (tiempo) y v (rapidez); evitando así que las herramientas de control de estos parámetros –deslizadores, botones y campos de entrada– obstaculizaran la visión de la caída al usar el recurso con distintas resoluciones de pantalla. En este sentido, se tomó la decisión de usar la *Vista Gráfica 2* del GeoGebra para dividir la pantalla en dos zonas de trabajo bien definidas. En esta nueva vista gráfica, ubicada a la derecha de la pantalla, se organizaron los controles para cada parámetro del movimiento.

En atención a la cantidad de parámetros del estudio, la *Vista gráfica 2* fue dividida en tres subregiones del plano usando para ello **semiplanos** creados por medio de las inecuaciones $y > 3,5$ y $y < -1$. Luego de introducir cada inecuación en la *Barra de entrada* se obtuvieron



dos semiplanos o subregiones matizadas de color verde y celeste, entre los cuales quedaba al descubierto una subregión que posteriormente se matiza de color rosa (ver Figura 3).

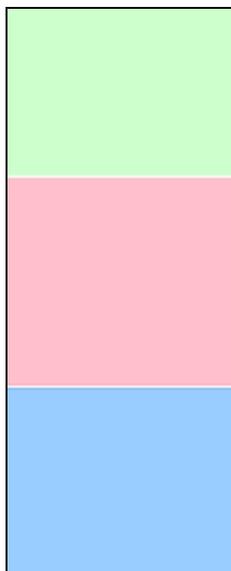


Figura 3. Panel de control.

Finalmente, se dibujaron las rectas $y = 3,5$ y $y = -1$, ambas de color blanco, para marcar los bordes de los semiplanos. Adicionalmente, y al igual que para la tarea anterior, se procedió a desactivar la opción *Selección habilitada* para estos objetos. La incorporación de los controles del panel, es decir, deslizadores, botones y campos de entrada, se explica en la *Tarea No. 6*.

Tarea No. 3: Determinación de la altura.

Para determinar la altura de la caída fue necesario definir esta variable y representar la trayectoria del movimiento del salvavidas. En relación con lo primero, es decir, la altura; se debió establecer un **intervalo** de valores posibles para esta variable, de manera que el usuario pueda ajustar convenientemente tal medida según lo requiera. La representación de este rango de valores se hizo a través de un *deslizador* llamado *altura* con un valor mínimo igual a 0, un máximo indeterminado y un incremento de **0,01**. Se decidió usar un valor máximo indeterminado para asegurar que toda opción del usuario fuera procesada por el programa. A pesar de que este deslizador no se aprecia en la *Vista Gráfica*, ya que no se limita a un intervalo finito, el mismo si se muestra en la *Vista Algebraica* como una variable. A continuación se asoció al deslizador una *Casilla de entrada* colocada en la *Vista Gráfica 2*, con la cual es posible modificar a conveniencia el valor que toma la *altura*.

En cuanto a lo segundo, es decir, la representación de la trayectoria por la que se desplaza el salvavidas al caer, se hizo por medio de una **recta**, llamada *k*, perpendicular a la recta $y = 0$ por el punto de origen del sistema, denotado con la letra *E*. Atendidas estas dos cuestiones, se procedió a ubicaren la *Vista Gráfica* la posición inicial que ocuparía el





salvavidas mediante una **circunferencia** llamada r , centrada en E y de radio iguala la **altura**. Vale destacar que, mientras no se modifique, este deslizador toma el valor 1 de forma predeterminada. De la **intersección** de k y r se tomó el punto F , localizado por encima del **eje x** , como representante de la posición inicial del salvavidas (ver Figura 4).

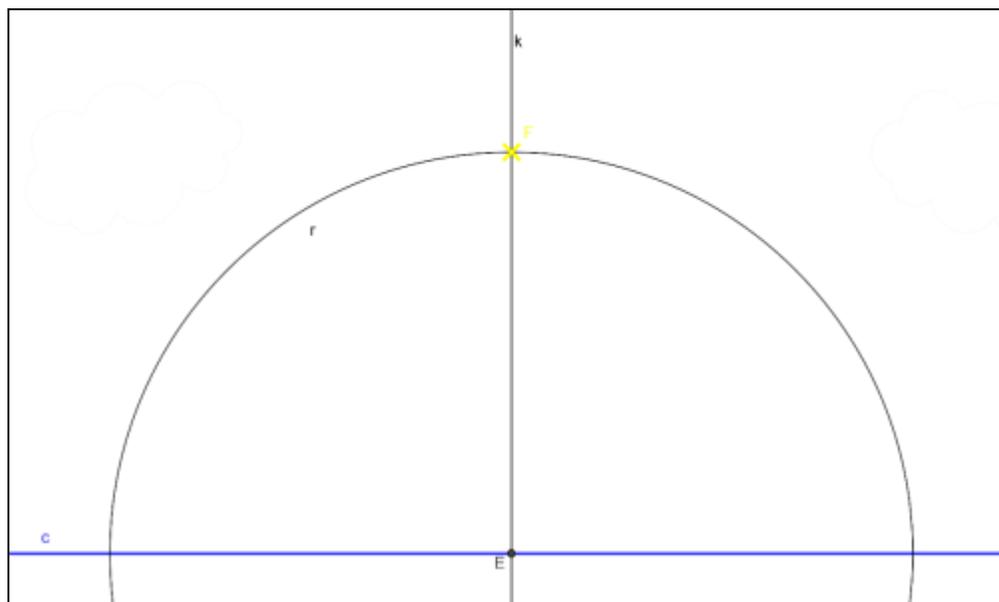


Figura 4. Construcción asociada a la altura de la caída.

Tarea No. 4: Creación del efecto de caída libre.

Lograr que el salvavidas amarizara atendiendo a principios de la Física implicó realizar un análisis del efecto de caída libre desde el punto de vista de la teoría detrás de este movimiento. En este sentido, recordamos que todo cuerpo sometido a caída libre aumenta su rapidez uniformemente en cada intervalo de tiempo. Dado que esta variable relaciona la distancia recorrida por el móvil con el tiempo que tarda en recorrerla, centramos nuestra atención en la determinación del recorrido del salvavidas (y) para cualquier instante de tiempo (t). Teniendo esto en cuenta, para resolver la tarea fue necesario fijar el **intervalo** de tiempo de duración de la caída acorde a cualquier altura que se fije con anterioridad, esto es, establecer sus extremos en función de la variable altura y luego representarlo con el GeoGebra.

Para establecer los extremos del intervalo recurrimos a la fórmula $y = \frac{g \cdot t^2}{2}$, la cual define la relación entre las variables y y t . Al despejar t en esta fórmula se obtiene la expresión

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

que da cuenta del tiempo que tarda el salvavidas en recorrer cierta distancia y con la cual fue posible determinar a cada extremo del intervalo. El extremo inferior se obtuvo al sustituir en la fórmula el valor $y = 0$, representativo del desplazamiento “nulo” del salvavidas





en su posición inicial, obteniéndose así el valor $t = 0$ que es el mínimo del intervalo. El extremo superior se dedujo al considerar que el recorrido total del salvavidas se corresponde con el valor $y = altura$ que es definido por el usuario, por lo tanto, el máximo del intervalo estaba definido por la fórmula $t = \sqrt{\frac{2 \cdot altura}{9.8}}$.

La representación de este intervalo de tiempo con el GeoGebra se realizó por medio de un *deslizador* al que llamamos *tiempo*, con un valor mínimo de cero y máximo definido por la expresión $\sqrt{2 \cdot altura / 9.8}$, que se introduce en la casilla respectiva. En su construcción, al deslizador le fue asignado un valor de *incremento* igual a 0,001.

Definido el deslizador *tiempo*, lo siguiente fue determinar la posición del salvavidas en cada instante de la caída. Considerando que para cada valor de *tiempo* existe un valor de recorrido, fue conveniente fijar de nuevo la atención en la fórmula $y = \frac{g \cdot t^2}{2}$, esta vez considerándola como una **función cuadrática** de y con respecto a t , específicamente como $y(t) = \frac{9.8}{2} \cdot t^2$. La curva asociada a esta función es una **porción de parábola**, ya que su dominio está acotado por el intervalo *tiempo*. Los puntos sobre esta curva tienen la forma $(t, y(t))$, siendo $y(t)$ el recorrido asociado a un valor de t del dominio. Esta reflexión nos condujo a crear un punto G con coordenadas $(tiempo, \frac{9.8}{2} \cdot tiempo^2)$, que describe a la curva a medida que el deslizador *tiempo* cambia de valor. Lo que siguió a continuación fue **trasladar la medida** de la ordenada de G —denotada por el programa como $y(G)$ — hacia la recta k que representa la trayectoria del salvavidas.

Esto se hizo por medio de una circunferencia centrada en F y de radio $y(G)$. De la intersección entre la circunferencia y k se seleccionó el punto H , localizado por debajo de F , el cual representaba la posición del salvavidas en cada instante de tiempo. Al activar la opción *Animación automática* al deslizador *tiempo* podía apreciarse cómo el punto H se desplazaba por la recta k , atendiendo a las condiciones del movimiento (ver Figura 5).



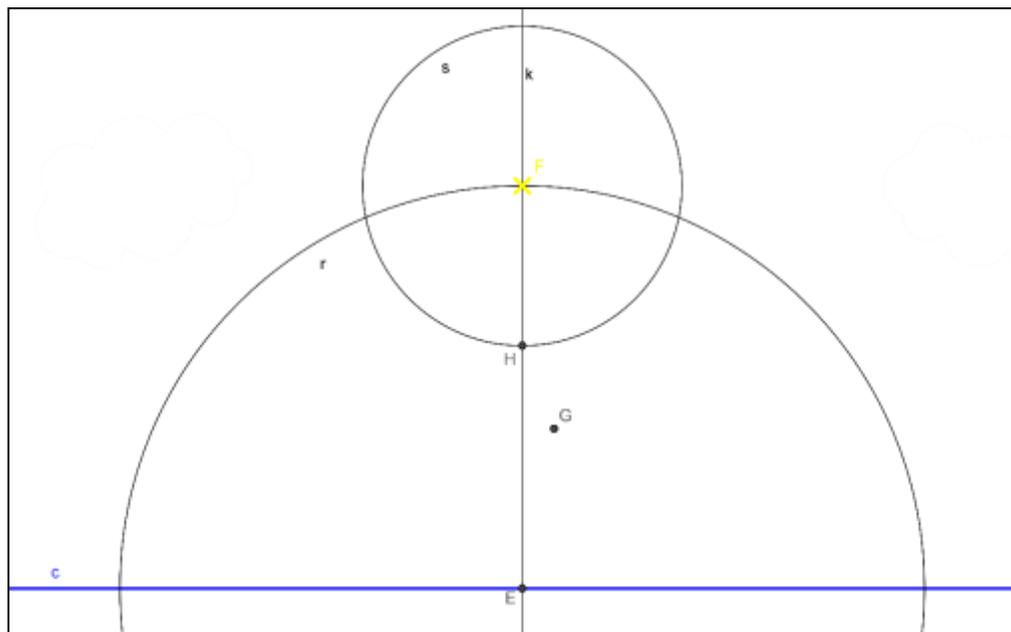


Figura 5. Construcción asociada al efecto de caída libre.

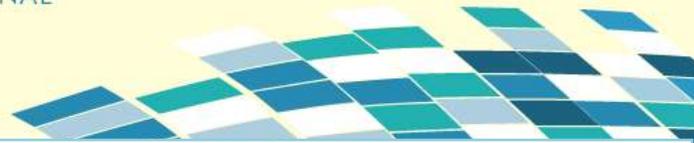
Tarea No. 5: Colocación de la cuerda.

La cuerda que sujeta el salvavidas fue representada a través de una **porción de senoide**, creada al acotar el dominio de una función seno particular. Para dibujar esta curva, GeoGebra ofrece el comando $Si[\langle \text{condición} \rangle, \langle \text{entonces} \rangle]$ que permite, entre otras cosas, restringir el dominio de una función. En nuestro caso, la función seno considerada, a la que denominamos $t(x)$, tiene por *condición* un intervalo que define su **dominio** y por *entonces* a la **fórmula** que le corresponde. De esta manera, resolver la tarea de colocar la cuerda suponía establecer previamente un intervalo del dominio y una fórmula adecuada a la situación que se trata de representar.

En cuanto al **dominio** de la función, se tomó como extremo inferior del intervalo al 0 y como extremo superior un valor l definido a partir de la distancia entre F y H , esto es $l = FH$. En efecto, la figura 4 muestra que la distancia entre los extremos de la cuerda varía de 0 – cuando el salvavidas se encuentra en posición inicial– al valor l –cuando el salvavidas ocupa una posición y – en cada instante de tiempo. Luego de construir a l como un segmento de extremos F y H , el intervalo usado para la función fue definido como sigue:
 $0 \leq x \leq l$.

Para establecer la **fórmula** de $t(x)$ fue necesario determinar un valor de **amplitud** y **frecuencia** de la senoide, de tal forma que dieran a la cuerda un aspecto de onda que se sometiese a una deformación progresiva –un cambio en su amplitud y periodo– a lo largo del movimiento. Siendo así, tanto la amplitud como el periodo de la función debían ser considerados como parámetros cuya formulación se apoyó en el análisis siguiente:





- La **amplitud** de la función debe variar con el movimiento, haciéndose menor a medida que el tiempo transcurre. Esto se logró a través de una relación de **proporcionalidad directa** entre las variables amplitud y altura. Antes de establecer esta relación fue conveniente definir los valores de amplitud máxima y mínima que tomaría la senoide a lo largo del movimiento, siendo éstos de **0,625** cuando H coincide con F –el salvavidas está en posición inicial –y de **0,125** cuando H coincide con E – el salvavidas llega al mar. La diferencia entre estos valores de **0,5** se tomó como el rango de variación de amplitud de la cuerda que disminuye a medida que el salvavidas cae desde una altura igual a $y(F)$. De esta manera, la senoide adquiere una amplitud relacionada con la altura del salvavidas en cada instante de tiempo, esto es, con $y(H)$. Para acercarnos a este valor se establece la siguiente **regla de tres** y su solución:

$$\begin{array}{l} y(F) \rightarrow 0,5 \\ y(H) \rightarrow x \end{array} \rightarrow x = \frac{y(H) \cdot 0,5}{y(F)}$$

A partir de este cálculo, la expresión $\left(\frac{y(H) \cdot 0,5}{y(F)}\right) + 0,125$ nos permite determinar la amplitud de la senoide en relación a la altura $y(H)$ durante su movimiento. Para facilitar el manejo de esta expresión al momento de elaborar la fórmula de la función, se consideró conveniente crear la variable **amplitud** por medio de la *Barra de entrada*.

- La **frecuencia** de la función se determinó a partir del valor de su **período**, el cual cambia a medida que se modifica el valor de l . Para determinar estas cantidades fue necesario decidir que la porción de senoide contuviera $2\frac{1}{2}$ ciclos durante todo el movimiento, lo que garantizaba que esta mantuviera sus extremos en los puntos F y H . La decisión anterior daba como resultado un valor del periodo igual a $T = \frac{2}{5} \cdot l$. Dado que la relación entre el periodo y la frecuencia en una función seno viene dada por la fórmula $T = \frac{2\pi}{a}$, se procedió a igualar ambas expresiones para determinar el valor del parámetro a que define a la frecuencia, como se indica a continuación:

$$\frac{2}{5} \cdot l = \frac{2\pi}{a} \rightarrow \frac{l}{5} = \frac{\pi}{a} \rightarrow \frac{5}{l} = \frac{a}{\pi} \rightarrow a = \frac{5\pi}{l}$$

Al igual que se hizo con la amplitud, en este caso fue conveniente crear la variable $ca = \frac{5\pi}{l}$ por medio de la *Barra de entrada*, con el fin de facilitar el establecimiento de la fórmula de $t(x)$.



Tras determinar estos valores, lo siguiente fue introducir la fórmula $t(x) = Si[0 \leq x \leq l, (amplitud \cdot sen(ca \cdot x))]$ en la *Barra de entrada* para generar una porción de senoide ubicada sobre el *eje x* y con extremos en *E* y un punto a la derecha del *eje y*. Para posicionarla la curva entre los puntos *F* y *H* fue necesario aplicar a ésta dos **transformaciones isométricas** distintas. En primer lugar, se aplicó a la gráfica una **rotación** de 90° en torno a *E* y en sentido contra horario, obteniéndose una figura homóloga en dirección vertical. En segundo lugar, se aplicó una **traslación** a la figura homóloga según el vector \overline{EH} . Esta traslación se replicó con la intención de darle más textura a la cuerda usando dos estilos de trazo diferentes (ver Figura 6).

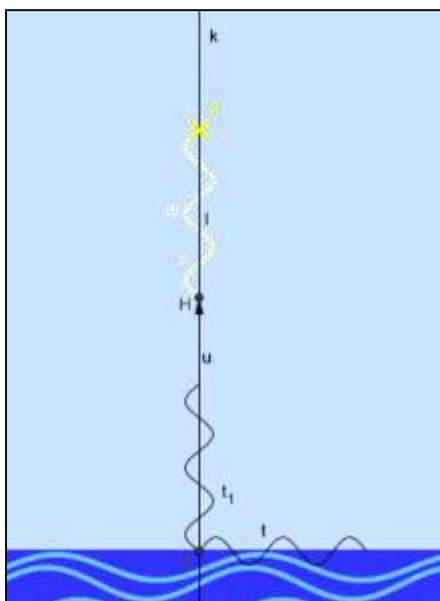


Figura 6. Construcciones relacionadas con la colocación de la cuerda.

Tarea No. 6: Creación de los controles del panel.

La creación de los controles del panel consistió en asociar imágenes, deslizadores, textos dinámicos, botones y campos de entrada a los parámetros y (altura), t (tiempo) y v (rapidez) para su manipulación conveniente por parte del usuario.

En el caso del parámetro y (altura), junto al campo de entrada insertado en la *Tarea No. 3* se añadió un texto dinámico que muestra la cantidad de metros que recorre el salvavidas mientras desciende y dos imágenes con texto que aludían al nombre de la variable y la distancia recorrida. En el caso del parámetro t (tiempo), se incluyó una imagen con texto que aludía al nombre de esta variable, un texto dinámico para mostrar la cantidad de segundos que va tomando el deslizador *tiempo* construido en la *Tarea No. 4*, así como tres botones que animan, pausan y reinician este deslizador. Estos botones fueron creados

usando los guiones *Inicia Animación (tiempo)*, *Inicia Animación (tiempo, false)* y *Valor (tiempo, 0)*.

Adicionalmente se agregó un deslizador que controla la velocidad en la que puede apreciarse la caída, ofreciendo con ello un efecto de “cámara lenta” sobre el movimiento. Finalmente, en el caso del parámetro v (rapidez), se agregó una imagen con texto que indicaba el nombre de esta variable, así como un texto dinámico que muestra la cantidad de metros por segundo a la que viaja el salvavidas y que podía ocultarse y mostrarse a conveniencia por medio de un botón. La apariencia final de los controles del panel se muestra en la figura 7.



Figura 7. Controles del panel.

Tarea No. 7: Colocación del hombre, el helicóptero y el salvavidas.

Esta tarea se redujo a colocar dos imágenes, una correspondiente al helicóptero y otra al hombre en situación de peligro, y luego construir una circunferencia que representara al salvavidas. Todos estos objetos fueron ubicados en la *capa 2*. En el caso del helicóptero fue necesario asegurarnos que (i) este estuviera localizado en un punto donde el salvavidas pareciera salir de una de sus puertas, (ii) se desplazara junto con el punto F al fijar la altura de la caída y (iii) que su tamaño fuera proporcional con las dimensiones del simulador.

Tomando en cuenta estos requerimientos, la imagen fue insertada en la *Vista Gráfica* a la espera de posicionarla. Para ello fue necesario determinar dos de los vértices del **rectángulo** que la bordea, en este caso se optó por las esquinas inferiores de la imagen. Las dimensiones del rectángulo fueron determinadas a partir de dos circunferencias concéntricas en F , una de radio 3,5 y otra de radio 2. Seguidamente, se determinó el punto de intersección Q_1 entre la recta k y la circunferencia de radio 2,

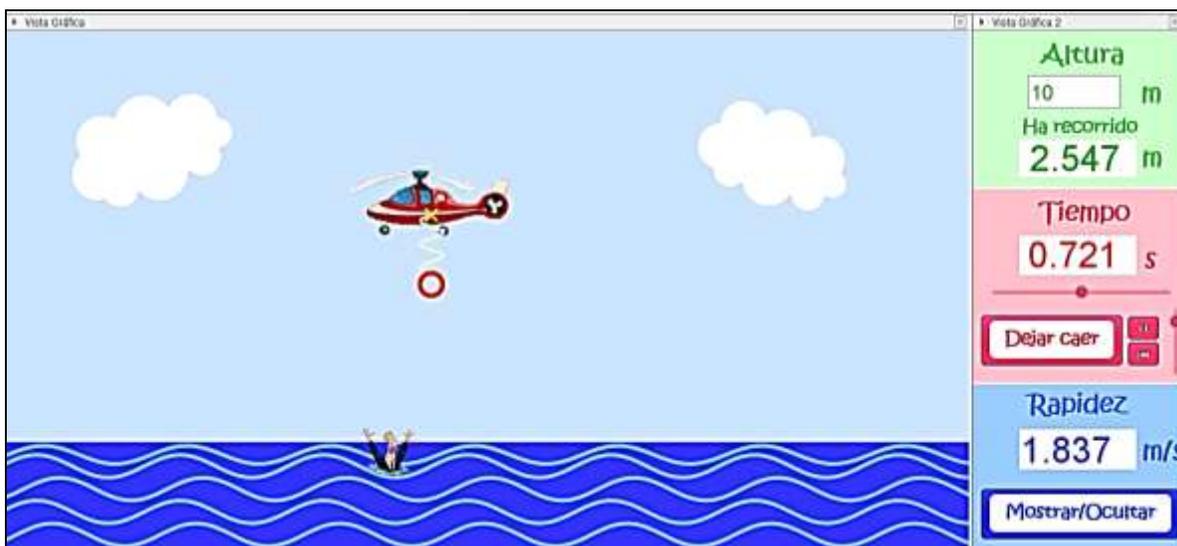


Figura 9. Aspecto definitivo del simulador.

El simulador que ha resultado de todo este proceso se puede consultar, descargar y manipular directamente desde el Canal de GeoGebra: <https://tube.geogebra.org/material/show/id/626609>, un repositorio en la web en la que miles de usuarios comparten materiales y recursos creados con este programa.

Conclusiones.

La experiencia de simulación con GeoGebra descrita en este trabajo da cuenta de una cantidad importante de contenidos matemáticos presentes a lo largo de todo el proceso. Sin embargo, pudiera haber más presencia de otros elementos matemáticos, por lo cual reflexionaremos sobre algunos elementos de este proceso que pueden coadyuvar a mejores prácticas de simulación con GeoGebra en el futuro.

En primer lugar, queremos destacar la complejidad inherente a la elaboración de un simulador con GeoGebra que tenga consistencia con el fenómeno físico representado y que ofrezca un entorno de aprendizaje apropiado. En nuestro caso, advertimos que ciertas tareas de construcción resultaban más difíciles de realizar que otras –por ejemplo, las tareas 4 y 5– debido especialmente al tipo de objetos matemáticos que han entrado en juego y a la demanda de mayores niveles de experiencia en el uso de “modelos computacionales” de estos objetos para representar algún aspecto del fenómeno. En otras palabras, simular el movimiento en caída libre con el GeoGebra, no solo demanda una concepción de la escena de rescate como un fenómeno físico, sino además requiere de capacidades para relacionar las propiedades matemáticas de las variables del movimiento con las herramientas de construcción del software, algo a lo que muchos profesores no están acostumbrados (Pugnaroni, 2008). A pesar de ello, este tipo de experiencias de simulación no dejan de ser interesantes para profesores y estudiantes, debido a las posibilidades que ofrece el medio tecnológico para vincular el conocimiento matemático con la realidad.

En segundo lugar, si bien algunos modelos matemáticos implícitos en la simulación pasaron desapercibidos al momento de usar el GeoGebra –por ejemplo, la gráfica de la función cuadrática en la tarea 4– la reflexión propiciada en torno a cada una de las tareas de la construcción nos ayudó a tomar conciencia de los conceptos y procedimientos matemáticos involucrados en la simulación y del rol que ellos desempeñan en la lógica de construcción del recurso. Esta práctica reflexiva nos ha sido muy útil en cuanto a conocimiento y experticia en el manejo del GeoGebra para modelar fenómenos de la realidad que hemos transferido a otras experiencias similares de elaboración de simuladores llevados a cabo por el Grupo TEM (Cervantes, Rubio & Prieto, 2015; Prieto & Gutiérrez, 2015). Toda esta experiencia nos lleva a confiar que la actividad de simulación con GeoGebra, integrada al aula de clases, posibilita enormemente el establecimiento de nexos entre la modelación matemática y el uso de las tecnologías digitales, impactando favorablemente el aprendizaje.

En tercer lugar, se destaca el “método” utilizado para la concepción de este documento, el cual se basa en una dinámica de trabajo colaborativo. Este método consta de cinco etapas. La primera etapa tiene que ver con la construcción del simulador a partir de una concepción del fenómeno por parte de los autores y que permitió tomar decisiones sobre cuál escena recrear y cómo llegar a representarla con el GeoGebra. Al respecto, Pugnali (2008) plantea que la concepción de un modelo del fenómeno es el primer paso de la simulación y su importancia radica en el cúmulo de propiedades y relaciones que abarca el modelo respecto a los entes que componen al fenómeno. En nuestro caso, el modelo del movimiento de caída libre permitió controlar cada decisión consumada en la interfaz del GeoGebra, conduciendo al logro del producto final. La segunda etapa consistió en la determinación de las tareas de la simulación dentro de una secuencia lógica de construcción y la descripción general de cada una de estas tareas. En la tercera etapa, se elaboraron relatos con la secuencia de pasos de construcción que se siguió para resolver cada una de las tareas de la simulación, tratando de vincular las decisiones y acciones emprendidas con el conocimiento matemático subyacente.

La cuarta etapa tuvo que ver con la revisión y discusión de los relatos por parte del equipo; esto con el fin de profundizar en la descripción de cada tarea y de su proceso de resolución, así como también generar un acuerdo de discurso que diera cuenta del conocimiento matemático implícito en el manejo del GeoGebra. En este acuerdo, se podría afirmar que la elaboración de simuladores es un asunto del conocimiento y habilidades adquiridas previamente que pueden alimentar cualquier esfuerzo conjunto por llevar adelante la simulación con GeoGebra (Fiorentini, 2008). Finalmente, en la quinta etapa se otorgó al relato la forma de un trabajo científico para ser socializado.

Consideramos importante resaltar este método ya que una comprensión clara de este proceso, puesta al servicio de nuevas experiencias de simulación con GeoGebra, puede animar el emprendimiento de estudios que consideren el impacto de este tipo de simuladores en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Para finalizar, si bien este simulador puede ajustarse a las necesidades de los usuarios, un asunto pendiente por atender es la creación de secuencias de enseñanza en donde el simulador pueda ser usado con el propósito de experimentar con el movimiento en caída libre y propiciar aprendizaje.



Reconocimiento.

Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto de investigación No. CH-0510-15, adscrito al Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI) y financiado por el Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico (CONDES) de la Universidad del Zulia, Venezuela.

Referencias.

- Artigue, M. (2010). The future of teaching and learning mathematics with digital technologies. En C. Hoyles & J.B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain: The 17th ICMI study* (pp. 463-475). New York: Springer.
- Artigue, M. (2013). L'impact curriculaire des technologies sur l'éducation mathématique. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 8(11), 295-305.
- Blum, W. & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Cervantes, A., Rubio, L. & Prieto, J.L. (2015). Una propuesta para el abordaje de la refracción y reflexión total interna utilizando el GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 4(1), 18-28.
- Clark, D.B., Nelson, B., Sengupta, P., & D'Angelo, C. (2009). *Rethinking science learning through digital games and simulations: Genres, examples, and evidence*. Trabajo presentado en The National Research Council Workshop on Gaming and Simulations, October 6-7, Washington, DC. Recuperado de: http://sites.nationalacademies.org/cs/groups/dbassesite/documents/webpage/dbasse_080068.pdf.
- Fiorentini, D. (2008). ¿Investigar prácticas colaborativas o investigar colaborativamente? En M. Borba & J. Araujo (Comp), *Investigación Cualitativa en Educación Matemática* (pp. 43-71). Mexico: Editorial Limusa.
- González, A.G., Molina, J.G. & Sánchez, M. (2014). La matemática nunca deja de ser un juego: investigaciones sobre los efectos del uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática*, 26 (3), 109-135.
- Greefrath, G. (2011). Using technologies: new possibilities of teaching and learning modelling – overview. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo & G. Stillman, *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling ICTMA 14* (pp. 301-304). New York: Springer.
- Gutiérrez, R.E. & Prieto, J.L. (2015). Deformación y reflexión de funciones con GeoGebra. El caso de las parábolas definidas por la expresión $g(x) = a \cdot x^2$. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 88 (Marzo de 2015), 115-126.
- Hernández, José. (2011). *Herramientas GeoGebra para Física*. Recuperado de: http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/Herramientas_GeoGebra_para_Fisica.
- Hohenwarter, M & Fuchs, K. (2005). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. Trabajo presentado en Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference 2004. Pecs, Hungary. Recuperado de http://archive.geogebra.org/static/publications/pecs_2004.



- Hoyles, C. & Lagrange, J.B. (2010). *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain: The 17th ICMI study*. New York, US: Springer.
- Kaiser, G. (2014). Mathematical Modelling and Applications in Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 396-404). The Netherlands: Springer.
- Ministerio de Educación (1987). *Programa de Estudio y Manual del Docente. Tercera Etapa. Educación Básica. Asignatura: Matemática – Física*. Caracas: Autor.
- Ministerio del Poder Popular para la Educación. (2007). Currículo Nacional Bolivariano: Diseño curricular del Sistema Educativo Bolivariano. *Educere. La Revista Venezolana de Educación*, 11(36), 751-775.
- Ministerio del Poder Popular para la Educación (2014). *Ciencias Naturales, Tomo I, Tercer año*, (Tercera edición, Colección Bicentenario). Caracas: Fundación Editorial El perro y la rana. Recuperado de http://me.gob.ve/coleccion_bicentenario/pdf/media/csnaturales3-1.pdf
- Mora, A., & Ortiz, J. (2012). Formación inicial de profesores de matemáticas y la resolución de problemas reales en ambientes tecnológicos. *Ciencias de la Educación*, 39, 183-206.
- National Research Council (2011). *Learning Science Through Computer Games and Simulations. Committee on Science Learning: Computer Games, Simulations, and Education*. Washington, DC: The National Academies Press.
- Oliveira, C.L. (2013). Incorporando as Tecnologias na sala de aula de Matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 359-366.
- Ortiz, J., Rico, L. & Castro, E. (2008). La enseñanza del álgebra lineal utilizando modelización y calculadora gráfica: Un estudio con profesores en formación. *PNA*, 2(4), 181-189.
- Prieto, J. L. & Gutiérrez, R. E. (Comps.). (2015). *Memorias del I Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. Maracaibo, Venezuela: A.C. Aprender en Red.
- Pugnali, L.A. (2008) Los simuladores. El papel de la simulación en la ciencia. *Ciencia Hoy*, No. 105, 27-34.
- Serway, R. & Jewett, J.W. (2008). *Física. Para ciencias e ingeniería. Volumen 1*. Séptima Edición. México D.F.: CENGAGE Learning.
- Stacey, K. (2015). The real world and the mathematical world. En K. Stacey & R. Turner (Eds.), *Assessing Mathematical Literacy. The PISA Experience* (pp. 57-84). New York: Springer.
- Villa-Ochoa, J. (2007). La Modelación como Proceso en el Aula de Matemáticas: Un Marco de Referencia y un Ejemplo. *Tecno Lógicas*, 19, 63-86.
- Villa-Ochoa, J. A. (2013). *Miradas y actuaciones sobre la modelación matemática en el aula de clase*. Trabajo presentado en la VIII Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, Santa Maria-RS, Brasil. Recuperado de: <http://core.ac.uk/download/pdf/12342348.pdf>.



