REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (2). Páginas 67–108.
Diciembre de 2006. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: http://www.upo.es/RevMetCuant/art6.pdf

La desigualdad económica medida a través de las curvas de Lorenz

Núñez Velázquez, José Javier
Departamento de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.
Universidad de Alcalá de Henares
Correo electrónico: josej.nunez@uah.es

RESUMEN

En el presente trabajo se analiza la influencia de las curvas de Lorenz, el Principio de Transferencias y las relaciones de mayoración entre vectores de renta sobre las medidas de desigualdad. De esta forma, se pasa revista al desarrollo histórico que ha permitido diseñar el conjunto actual de *axiomas* o propiedades deseables para que una medida de desigualdad se comporte razonablemente. Además, se analiza la problemática de la ordenación en desigualdad de los vectores de renta. Ante la imposibilidad de selección de una única medida de desigualdad, se presenta la construcción de un indicador sintético dinámico construido a partir de una batería de índices simples de desigualdad, compatibles con el criterio de dominación de Lorenz. Finalmente, se incluye como ilustración el estudio de la evolución de la desigualdad y el nivel de vida en los países de la Unión Europea, durante el período 1993-1999.

Palabras clave: curvas de Lorenz; medidas de desigualdad; distribución de la renta.
Clasificación JEL: D63; D31; C43.
2000MSC: 60E15; 91B82; 62H25; 62P20.

Artículo recibido el 5 de diciembre de 2006 y aceptado el 15 de diciembre de 2006.

Economic Inequality Measurement Through Lorenz Curves

ABSTRACT

This paper focuses both on the foundations of income inequality measures and on their relations with Lorenz curves, the Pigou-Dalton's transfer principle and majorization relations among income vectors. So the historic development of these concepts is surveyed to show how the current broad-accepted set of properties and axioms was generated, in order to define whether an inequality measure has a good perform or not. In doing so, it will be possible to check out when a particular inequality measure performs in a suitable way. Furthermore, an analysis on the problems related to inequality orders and dominance relations among income vectors is included. Because of choosing a unique inequality indicator is highly arguable, the construction of a Lorenz-compatible synthetic dynamic inequality indicator is presented, using an initial set with basic Lorenz-compatible inequality indices as starting point. Finally, as an illustration, an analysis of both inequality and well-being trends in the European Union countries during 1993-1999 is included.

Keywords: Lorenz curves; income inequality measures; income distribution.
JEL classification: D63; D31; C43.
2000MSC: 60E15; 91B82; 62H25; 62P20.

1. Introducción

Puede considerarse que el renovado interés suscitado en la comunidad investigadora, en relación con la problemática de la desigualdad económica, tiene sus puntos de partida en el artículo de Atkinson (1970) y el libro de Sen (1973), ambos de gran repercusión en dicho campo de investigación. Desde estas fechas, los artículos y libros sobre este tema aparecen con bastante regularidad, habiéndose extendido este interés a multitud de problemas cercanos, de indudable interés social, como son los estudios sobre pobreza, movilidad, polarización y privación, entre otros.

A lo largo de este tiempo, varias han sido las aproximaciones al problema, incluyendo postulados de bienestar social que pudieran dotar de un apoyo procedente de la Teoría Económica a las diversas medidas de desigualdad[1], cuyo número y variedad se ha incrementado notablemente, lo que ha sido motivo regular de fuertes controversias, como puede apreciarse en Cowell (1995), Foster (1985), Nygard y Sandström (1981) y Dagum (2001), entre otros, por citar solo algunos de los trabajos más relevantes o, en el caso español, los trabajos de Zubiri (1985), Ruiz-Castillo (1987) y Pena, Callealta, Casas, Merediz y Núñez (1996).

Sin embargo, pese a la ingente cantidad de literatura referida, en el análisis de la desigualdad económica sigue primando el paradigma de la curva de Lorenz, como el elemento básico que sirve de apoyo a este análisis, aun teniendo en cuenta que esta propuesta ya viene desarrollada en Lorenz (1905), por lo que permanece resistiendo los embates de la teoría, durante más de un siglo.

En el presente trabajo, se trata, en primer lugar, de encontrar la base que permite la cuantificación de la desigualdad económica. Para ello, se efectuará una revisión de los conceptos clásicos relacionados con la mayoración de rentas que permitirá especificar el fundamento teórico que sirve de apoyo a las curvas de Lorenz y a las medidas de desigualdad económica, tal y como se entienden actualmente. Este intento queda justificado por la necesidad de volver a plantear los contenidos básicos, desde un punto de vista estadístico, lo que permitirá una mejor comprensión a la hora de entender los mecanismos que actúan al medir la desigualdad económica y podrán, por lo tanto,

[1] Cuando se hace referencia a las medidas de desigualdad, deben entenderse como funciones o indicadores de una distribución de rentas que pretenden *medir* la desigualdad existente en el reparto de los recursos. Por tanto, no significa que exista conexión con el concepto habitual de la Teoría de la Medida.

servir de apoyo a una selección más eficaz de las medidas de desigualdad más adecuadas. Para ello, comenzaremos efectuando una síntesis histórica que recoja los principales hitos registrados en el estudio de la desigualdad económica, recuperando conceptos como la convexidad en el sentido de Schur, o S-convexidad, las transferencias progresivas y regresivas en el sentido de Pigou-Dalton, y la relación de mayoración entre distribuciones de renta. A continuación, se citan los principales resultados relacionados con la desigualdad económica, para terminar sintetizando los elementos clave que actúan sobre esta manera de entender el análisis de la desigualdad económica.

Los primeros estudios sobre la desigualdad económica se remontan a su planteamiento mediante la relación de mayoración entre distribuciones de renta. En este sentido, ya Muirhead (1903) relaciona el concepto de mayoración con las transferencias progresivas de renta, que serían formalizadas más tarde. En 1905, M.O. Lorenz propone sus curvas para analizar la desigualdad de la renta y de la riqueza, indicando que el *abombamiento* de las mismas es un indicador de la desigualdad existente en la distribución.

Al haberse cumplido recientemente el centenario de la publicación en la Revista *Journal of the American Statistical Association,* del artículo en el que M.O. Lorenz presenta las curvas que tanta repercusión han tenido posteriormente en el análisis de la desigualdad, y al que este artículo quisiera rendir tributo, no queda por menos que asombrarse al comprobar cómo la descripción de las curvas de Lorenz ocupa apenas 3 páginas, teniendo en cuenta cuál ha sido su influencia posterior.

En 1912, C. Gini propone el indicador que lleva su nombre para medir desigualdad, a partir de la medida de la diferencia media de las rentas de la distribución. En este mismo año, Pigou sugiere las ideas que más tarde se formalizarán mediante el Principio de Transferencias, que H. Dalton formula, en términos rigurosos en 1920, entre sus cuatro principios, que incluyen el conocido posteriormente como Principio de Población. Un poco más adelante, y de nuevo en relación con el concepto de mayoración, Schur presenta, en 1923, su concepto de convexidad, íntimamente relacionado con las matrices biestocásticas y, a través de ellas, con el concepto de transferencia progresiva.

En 1929, Hardy, Littlewood y Polya publican sus primeros resultados sobre desigualdades en un artículo de la revista *The Messenger of Mathematics.* Son el precedente de su trascendente libro *Inequalities*, cuya primera edición apareció en 1934. Sin embargo, es en 1932 cuando Karamata demuestra el Teorema que lleva su nombre, que ya había sido propuesto sin demostración por Hardy, Littlewood y Polya en 1929, y cuyo contenido es una de las piedras angulares de la medición de la desigualdad económica.

Como extensión de la propuesta original, J. Gastwirth propone, en 1971, la expresión explícita de las curvas de Lorenz para variables aleatorias de carácter general, lo que permite el tratamiento riguroso de las mismas.

Obviamente, la relación anterior no estaría completa sin la mención del ya reseñado artículo de A. B. Atkinson, en 1970, en el que sienta las bases, aunque no exentas de polémica, sobre el contenido normativo de las medidas de desigualdad que llevan su nombre y que se basan en la función general de promedios. Además, debe reseñarse, de nuevo, la aparición, en 1973, del libro de A.K. Sen cuyo título es *On economic inequality*, que ha sido objeto, en 1999, de una reimpresión que incluye un amplio anexo que recoge diversos avances en la medición de la desigualdad, a cargo del mismo autor y de J.E. Foster (Sen y Foster, 1999). Este último autor publica, en 1985, el Teorema que lleva su nombre, en el que explicita las condiciones que debe cumplir un indicador de desigualdad económica para que sea compatible con la curva de Lorenz, en términos notablemente distintos a los precedentes, iniciando, de manera ya decidida, el estudio de la adecuación de las medidas de desigualdad a partir de sus propiedades, también denominadas *axiomas de la desigualdad,* aunque esta aproximación ya contaba con referentes previos en la literatura.

Por fin, en 2001, C. Dagum publica en la revista *Estudios de Economía Aplicada*, una síntesis a partir de diversos artículos ya publicados en varias revistas desde 1981, en el que pone de manifiesto su visión del fundamento económico de las distintas medidas de desigualdad, como contrapunto a la visión normativa derivada del enfoque de Atkinson.

En esta revisión, necesariamente breve, se ha tratado de señalar la evolución que ha registrado el estudio de la desigualdad económica, teniendo en cuenta los diversos conceptos que se han configurado como fundamentales en el tratamiento del fenómeno, si bien la tendencia actual tiende a presentar estos contenidos en forma de propiedades o *axiomas*, como ya se ha indicado, aunque algo desligados de los conceptos que, históricamente, les sirvieron de soporte y que se desarrollarán en los siguientes epígrafes. Este tratamiento permitirá una selección más fundamentada de medidas de desigualdad, así como una guía para la presentación de propuestas alternativas, tanto para la comparación como para la cuantificación de la desigualdad incluida en las distribuciones de renta.

Con todas las consideraciones anteriores, a continuación se presentan en la Sección 2 las definiciones básicas para introducir el concepto de desigualdad, que se aborda junto con la exposición de las curvas de Lorenz y su problemática, en la Sección 3. En la Sección 4, se analiza el Principio de Transferencias de Dalton-Pigou y su relación con conceptos clave como la S-convexidad y los indicadores de desigualdad. La Sección 5 analiza el planteamiento axiomático del concepto de desigualdad, para pasar revista a otros criterios alternativos de comparación en la Sección 6. La Sección 7 presenta los indicadores sintéticos dinámicos de desigualdad y nivel de vida como alternativa al problema de la selección de un único indicador de desigualdad. La Sección 8 revisa la evolución de la desigualdad y el nivel de vida en los países de la Unión Europea, durante 1993-1999, como ilustración de la aplicabilidad de los conceptos desarrollados en la sección anterior. El artículo termina extrayendo las principales conclusiones en su Sección 9.

2. El espacio de distribuciones de renta y el concepto de mayoración [2]

En primer lugar, pasemos a definir el espacio de distribuciones de renta que servirá de soporte a todos los conceptos posteriores. Así, una distribución de renta en una población con N individuos es cualquier vector de $\Re^N$, de modo que todas sus

[2] Nos referimos exclusivamente al concepto económico de renta, aunque el análisis se puede aplicar de manera análoga a otros conceptos como el ingreso, el gasto o la riqueza, que pueden servir para fijar la posición económica de los individuos o de los hogares. En la práctica, esta selección genera una polémica basada tanto en elementos de índole teórica, como de fiabilidad de los datos disponibles (Ruiz-Castillo, 1987; Pena, Callealta, Casas, Merediz y Núñez, 1996, entre otros).

componentes sean no negativas, siendo la suma de todas estrictamente positiva, para que exista un reparto de recursos entre los individuos que componen la población. Es decir:

$$D_N^* = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_N) : x_i \geq 0,\ i = 1, ..., N;\ \sum_{i=1}^{N} x_i > 0 \right\}.$$

Ahora bien, desde el punto de vista de la desigualdad existente en el reparto, cualquier permutación de estos vectores ofrece la misma distribución, sin más cambios que la identidad o el lugar que ocupa cada receptor[3]. Para plasmar esta idea, sea Π_{NxN} el conjunto de matrices de permutación de orden N y definamos la siguiente relación de equivalencia en D_N^*:

$$x \approx y \quad \Leftrightarrow \quad x = \Pi \cdot y\ ,\ \ \Pi \in \Pi_{NxN}\ ,$$

de manera que elegiremos como representante canónico de las clases de equivalencia los vectores de rentas ordenadas de menor a mayor:

$$D_N = \ D_N^* / \approx \ \ = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_N) : x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_N \right\}. \qquad (2.1)$$

Así pues, el espacio considerado de distribuciones de renta será:

$$D = \bigcup_{N=2}^{\infty} D_N\ .$$

Una vez definido el espacio de distribuciones de renta, pasemos a definir la relación de *mayoración* entre las mismas. Sean *x* e *y* dos distribuciones de renta de D_N, entonces se dirá que *x* está mayorada por *y* $(x \prec y)$ si presenta una distribución más igualitaria; es decir:

$$x \prec y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} x_i \geq \sum_{i=1}^{k} y_i, & k = 1, 2, ..., (N-1) \\ \sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} y_i \end{cases} \qquad (2.2)$$

[3] Este enunciado se denomina también *axioma de simetría o anonimato* en relación con la medida de la desigualdad (Foster, 1985).

Puede observarse cómo esta relación se convierte en el precedente directo de la comparación mediante curvas de Lorenz, que se presentará más tarde, aunque es más restrictiva ya que solo permite comparar distribuciones de renta en poblaciones igualmente numerosas y en las que la cantidad total de recursos distribuidos es la misma. Se comprueba sin dificultad que esta relación entre vectores de D_N tiene estructura de ordenación parcial o cuasi-ordenación.

3. Desigualdad económica y curvas de Lorenz

Puede encontrarse un precedente del concepto de desigualdad cuando V. Pareto (1897) identifica una *menor desigualdad* con la situación en que los ingresos personales tienden a ser más parecidos, lo que, como afirman Castagnoli y Muliere (1990), constituye una versión temprana del Principio de Transferencias, aunque aún sin formalizar.

Por otra parte, como ya se ha visto, la relación de mayoración incluye el concepto de distribución más igualitaria, en el sentido de que sus componentes sean más similares que en el otro vector con el que se compara. Este hecho induce a clarificar definitivamente el concepto de desigualdad que tratamos de medir. En este sentido, resulta muy adecuada la siguiente frase, con la que describe el concepto Simon Kuznets: *Cuando hablamos de desigualdad de renta, simplemente nos referimos a diferencia de rentas, sin tener en cuenta su deseabilidad como sistema de recompensas o su indeseabilidad como sistema que contradice cierto esquema de igualdad* (S. Kuznets, 1953, pág. xxvii). Así pues, de acuerdo con lo expresado, una medida de desigualdad económica no valora lo adecuado que es el reparto, sino cuán cerca o lejos se encuentra de la igualdad, entendiendo por tal la situación en la que todos los individuos de la población perciben idéntica renta, sin que esto signifique un fin en sí mismo. Esta última argumentación conduce a Bartels (1977) a postular la necesidad de que una medida de desigualdad explicite una distribución de referencia como patrón con respecto al que se compara, que sirva como paradigma de lo que debiera ser una distribución justa, si bien esta propuesta no ha encontrado excesivo eco en la literatura, ya que la distribución de referencia utilizada es aquella en la que todas las componentes son idénticas e iguales a la renta media, lo que corresponde a la distribución igualitaria.

Y, sin embargo, las aseveraciones sobre desigualdad generan una amplia repercusión, lo que Amartya Sen expresa de la siguiente forma: *La idea de desigualdad es muy simple y muy compleja a la vez. Por una parte, es la más simple de todas las ideas y ha motivado a la gente con un atractivo inmediato difícilmente comparable con ningún otro concepto. Por otra parte, sin embargo, es una noción extraordinariamente compleja que hace las aseveraciones sobre desigualdad altamente problemáticas y ha sido, por tanto, objeto de amplia investigación por parte de filósofos, estadísticos, teóricos de la política, sociólogos y economistas* (A. Sen, 1973, pág. vii). Pues bien, más de treinta años después, no puede decirse que haya un método para medir la desigualdad de rentas que haya sido capaz de suscitar el consenso en la comunidad investigadora, siendo el instrumento que más cerca se encuentra de ello la curva de Lorenz, que se presenta a continuación.

3.1. Curvas de Lorenz y el criterio de dominación asociado

La curva propuesta por Lorenz (1905) se construye de la siguiente forma. Sea x un una distribución de renta del espacio D. A partir de ella, se construyen los porcentajes acumulados de individuos y de rentas repartidas, recordando que los vectores tienen sus componentes ordenadas de menor a mayor, que son no negativas y denotando por $\overline{x}$ a la media aritmética:

$$\left.\begin{array}{l} p_0 = 0;\ p_i = \dfrac{i}{N},\ \ i = 1,2,...,N \\ q_0 = 0;\ q_i = \dfrac{1}{N\overline{x}} \cdot \displaystyle\sum_{j=1}^{i} x_j \ \ ,i = 1,2,...,N \end{array}\right\} \qquad (3.1)$$

Con tales porcentajes, la curva de Lorenz, L(p), es la poligonal que une los puntos del conjunto $\{(p_i,q_i);\ i = 0,1,...,N\}$, que claramente estará inscrita en el cuadrado unidad, de manera que la proximidad a la situación de un reparto igualitario viene determinada por la cercanía de la curva a la diagonal del cuadrado en que se haya inscrita, y siendo, por lo tanto, su abombamiento el que indica un aumento paulatino en la desigualdad del reparto.

Evidentemente, esta definición es descriptiva y puede generalizarse al caso en que la renta sea una variable aleatoria X, no negativa, cuya esperanza matemática es μ y cuya función de distribución es F(x) (Kendall y Stuart, 1977, por ejemplo):

$$\left.\begin{array}{l} p = F(x) = \int_0^x dF(t) \\ q = L\left[F(x)\right] = \dfrac{1}{\mu}\int_0^x t \cdot dF(t) \end{array}\right\} \qquad (3.2)$$

En este contexto, Gastwirth (1971) sugiere un enfoque unificador, que permite expresar la curva de Lorenz de forma explícita mediante:

$$L(p) = \frac{1}{\mu}\int_0^p F^{-1}(t) \cdot dt\,, \qquad (3.3)$$

siendo $F^{-1}(p) = \inf\left\{x : F(x) \geq p\right\}$.

Las propiedades de la curva de Lorenz son ampliamente conocidas (Casas y Núñez, 1987, por ejemplo, o Nygard y Sändstrom, 1981, para mayor amplitud), pero, entre ellas, merece destacarse que la pendiente de L(p), si es derivable, viene determinada por la función:

$$t(p) = \frac{F^{-1}(p)}{\mu} \quad , \quad p \in (0,1)\,,$$

que la función *diferencia con respecto a la diagonal*:

$$A(p) = p - L(p) \quad , \quad p \in \left[0,1\right],$$

presenta un máximo en el punto p=F(μ), y es particularmente interesante el siguiente resultado de naturaleza más general, que caracteriza el conjunto de funciones que pueden ser curvas de Lorenz:

Teorema 3.1 (Iritani y Kuga, 1983): Una función *q = L(p)*, definida en [0,1], es la curva de Lorenz de alguna variable aleatoria no negativa, X; *si y solo si* verifica las siguientes propiedades:

i) *L(0) = 0 ; L(1) = 1;*

ii) *L(p)* es no decreciente y convexa.

Ahora bien, toda la discusión previa a la introducción de las curvas de Lorenz gravitó en relación con la comparación de distribuciones de renta, en términos de la desigualdad que exhiben. Así pues, de acuerdo con lo ya expresado, se establece la siguiente relación, denominada genéricamente *criterio de dominación de Lorenz.*

Definición 3.1: Sean x e y dos distribuciones de renta del espacio D; entonces, se dice que *x es menos desigual que y en el sentido de Lorenz* ($x \leq_L y$) cuando la curva de Lorenz de y encierra completamente a la de x:

$$x \leq_L y \Leftrightarrow L_x(p) \geq L_y(p) \quad , \quad \forall p \in [0,1] . \tag{3.4}$$

Frente a la relación de mayoración, esta resulta ser más versátil, ya que no precisa que las poblaciones tengan el mismo número de integrantes. Ahora bien, en este último caso, es evidente que:

$$x \leq_L y \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{\bar{x}}\right) \prec \left(\frac{y}{\bar{y}}\right) \quad ; \quad x, y \in D_N , \tag{3.5}$$

siendo, por lo tanto, el concepto de mayoración el que está presente en la génesis del criterio de dominación de Lorenz. Esta relación presenta ahora estructura de preorden (reflexiva y transitiva) o de orden parcial, si se define entre clases de distribuciones de renta proporcionales, de manera que, si dos curvas de Lorenz se cortan, las distribuciones de renta que las generan resultan *no comparables*, situación que aparece con mucha frecuencia en la práctica, como es bien conocido. Para presentar esta estructura, se acostumbra a utilizar los *diagramas de Hesse*, tal y como puede verse en Pena, Callealta, Casas, Merediz y Núñez (1996), por ejemplo.

Precisamente, es ésta la razón para la búsqueda de las denominadas medidas de desigualdad, que permitan una ordenación total de distribuciones, aunque lo consigan a costa de introducir esquemas de ponderación sobre los tramos de las distribuciones de renta, lo que provoca ordenaciones contradictorias en muchos casos, cuando se comparan las proporcionadas por diferentes medidas de desigualdad.

3.2. Formas funcionales para estimar la curva de Lorenz

El Teorema 3.1 caracteriza al conjunto de funciones que pueden ser curvas de Lorenz, lo que resulta de gran utilidad en la línea de investigación que propone el ajuste directo de las curvas de Lorenz, mediante familias de formas funcionales que corresponderán a los modelos probabilísticos asociados de la distribución de la renta. Algunas de las propuestas más simples son las siguientes:

- Potencial: $L(p) = p^b$, $b \geq 1$ (Casas y Núñez, 1991).
- Exponencial: $L(p) = p \cdot a^{p-1}$, $a > 1$ (Gupta, 1984).
- Potencial-Exponencial:

  $L(p) = p^b \cdot e^{-c(1-p)}$, $b \geq 1,\ c > 0$ (Kakwani y Podder, 1973).

Por supuesto, se han propuesto una gran cantidad de formas funcionales más complejas en la literatura. Además, es útil el siguiente resultado, que permite ampliar la gama de posibilidades:

Cualquier combinación lineal convexa de curvas que verifican el Teorema 3.1, lo verifica a su vez (Casas, Herrerías y Núñez, 1997).

Por otra parte, también es posible encontrar nuevas formas funcionales, mediante transformaciones. En este sentido, es útil el siguiente resultado[4]:

Teorema 3.2 (Sarabia, Castillo y Slottje, 1999): Sea L(p) una curva de Lorenz. Entonces, las siguientes transformaciones son también curvas de Lorenz:

a) $L_\alpha(p) = p^\alpha \cdot L(p)$, $\alpha \geq 1$;

b) $L_\alpha(p) = p^\alpha \cdot L(p)$, $0 \leq \alpha \leq 1,\ L''_\alpha(p) \geq 0$;

c) $L_\alpha(p) = L(p)^\gamma$, $\gamma \geq 1$.

También se han obtenido resultados, utilizando como base un modelo para la distribución de la renta, como los modelos de McDonald (Sarabia, Castillo y Slottje, 2002), o bien partiendo de la función cuantil asociada, como en el caso de la distribución de Wakeby (Houghton, 1978), por ejemplo.

Un modo de conseguir un orden total en la comparación de curvas de Lorenz, consiste en ajustar formas funcionales que solo dependan de un parámetro. Entre las diversas posibilidades existentes, pueden utilizarse las *distribuciones fuertemente unimodales* (Arnold, Robertson, Brockett y Shu, 1987), que son aquellas cuya función de densidad *f(.)* es log-cóncava; es decir:

[4] En relación con los métodos de estimación necesarios, puede verse Castillo, Hadi y Sarabia (1998).

X es fuertemente unimodal $\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) \leq 0, \quad \forall x \in \Re$.

Estas distribuciones permiten generar curvas de Lorenz del tipo $L_\tau(p) = F(F^{-1}(p) - \tau), \ \tau \geq 0$, siempre que el dominio de X sea del tipo (a,+∞), donde *F(.)* es la función de distribución asociada. Ejemplos de curvas así generadas son las del modelo log-normal, obtenido cuando X sigue una distribución normal, o la correspondiente al modelo de Pareto, que se obtiene cuando X es de valor extremo, con función de distribución $F(x) = 1 - exp(-e^x)$. El principal inconveniente que generan las curvas de Lorenz así obtenidas es que vienen determinadas por modelos excesivamente rígidos para la renta, tal y como se aprecia en los ejemplos comentados[5].

4. S-convexidad y el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton

Ya se ha hecho referencia anteriormente al precedente del Principio de Transferencias presente en Pareto (1897), aunque aún sin formalizar. Sin embargo, H. Dalton (1920, pág. 351) lo plantea en estos términos apoyándose en lo expuesto por Pigou (1912, pág. 24): *Si hay solo dos receptores de renta, y se produce una transferencia de renta del más rico al más pobre, la desigualdad disminuye.* Más adelante, impone la restricción obvia de que la cantidad transferida no debe alterar la posición relativa de ambos perceptores, lo que le conduce a afirmar que la transferencia más igualadora asciende a la mitad de la diferencia de renta que ostentan ambos.

En su versión más general, podemos establecer el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton de la siguiente manera: *Si la distribución de renta y se obtiene de x mediante una transferencia progresiva (regresiva) de renta, o una sucesión finita no vacía de ellas, entonces la desigualdad disminuye (aumenta).* Pasemos ahora a plantear el concepto de transferencia progresiva de forma más rigurosa.

[5] Por supuesto, existen esquemas más complejos y con mayor número de parámetros. En este sentido, puede verse Sarabia, Castillo y Slottje (1999), entre otros.

Definición 4.1: Sean $x,y \in D_N$, dos distribuciones de renta en una población con N individuos, ordenadas en sentido no decreciente, entonces se dice que *y* se obtiene de *x* mediante una *transferencia progresiva de renta* si:

$$x = (x_1,...,x_i,...,x_j,...,x_N)' \Rightarrow y = (x_1,...,x_i + \delta,...,x_j - \delta,...,x_N)' \ , \qquad \delta \in \left(0, \frac{x_j - x_i}{2}\right)$$

y, en tal caso, se dirá que *x* se obtiene de *y* mediante una *transferencia regresiva*.

A continuación, tratemos de asociar este nuevo concepto con la relación de mayoración. A este propósito responde un resultado de 1903 que, expresado en la terminología ya presentada, establece lo siguiente:

Teorema 4.1 (Muirhead, 1903): Sean $x,y \in D_N$, dos distribuciones de renta en una población con N individuos, ordenadas en sentido no decreciente. Entonces, *x* está mayorado por *y* $(x \prec y)$ *si y solo si* *x* se puede obtener de *y* mediante un número finito de transferencias progresivas.

Por lo tanto, debemos concluir que el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton representa la esencia de la relación de mayoración definida entre distribuciones de renta y, por lo tanto, de la relación de dominación en el sentido de Lorenz y la medida de la desigualdad. No obstante, sin menospreciar el interés de la afirmación anterior, debe admitirse que la formulación actual resulta aún escasamente operativa, por lo que, a continuación, se tratará de obtener una caracterización más eficaz de ambos conceptos. Para conseguir este objetivo, recurriremos al conjunto de las matrices biestocásticas, cuya definición se expresa a continuación.

Definición 4.2: Una matriz P_{NxN} se dice *biestocástica* o *doblemente estocástica,* si verifica las siguientes condiciones:

i) $0 \leq p_{ij} \leq 1 \ , \quad \forall i,j = 1,2,...,N$;

ii) $\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1 \ , \quad \forall i = 1,2,...,N$;

iii) $\sum_{i=1}^{N} p_{ij} = 1 \ , \quad \forall j = 1,2,...,N$.

Así pues, se trata de matrices finitas, de manera que cada una de sus filas o columnas constituye una distribución de probabilidad. El conjunto de estas matrices está muy relacionado con el de matrices de permutación, como muestra el resultado que se reproduce a continuación.

Teorema 4.2 (Birkhoff, 1976): El conjunto de las matrices biestocásticas de dimensión (NxN) constituye la cápsula convexa del conjunto de matrices de permutación de la misma dimensión.

Así pues, es fácil comprobar que una matriz biestocástica produce un efecto igualador al aplicarla sobre una distribución de rentas, ya que, si *P* es una matriz (NxN) de este tipo y se tienen dos vectores de renta $x,y \in D_N$, de modo que $x=P.y$, entonces las componentes de x serán combinaciones lineales convexas de las de y. Por lo tanto, se obtiene una redistribución progresiva en el sentido expresado por el Principio de Transferencias. En efecto:

$$x_i = \sum_{j \neq i} y_j p_{ij} + y_i \left(1 - \sum_{j \neq i} p_{ij} \right) = y_i + \sum_{j \neq i} \left(y_j - y_i \right) p_{ij} \ , \quad i = 1,2,...,N \ .$$

Tras esta comprobación, resulta evidente el siguiente resultado, que significó, en su momento, un gran avance en este campo.

Teorema 4.3 (Hardy, Littlewood y Pólya, 1952):

$$(x \prec y) \ \Leftrightarrow \ x = P \cdot y \ , \ \ \forall x, y \in D_N \, ,$$

siendo *P* alguna matriz biestocástica de dimensión (NxN).

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, quedan caracterizadas las transferencias progresivas de renta a través de operaciones de los vectores de renta con matrices biestocásticas, que permiten una mayor facilidad de manejo algebraico.

Seguidamente, se pretende obtener funciones compatibles con la relación de mayoración, que permitan generar medidas de la desigualdad entre distribuciones de renta, habida cuenta de las intensas relaciones existentes con el Principio de Transferencias y la dominación de Lorenz. Tales funciones se presentan a continuación y dan lugar al concepto de S-convexidad.

Definición 4.3: Una función real *φ(.)*, definida sobre D_N, se dice *convexa en el sentido de Schur* o *S-convexa* cuando es isótona con respecto a la relación de mayoración[6]. Es decir:

$$(x \prec y) \;\Rightarrow\; \varphi(x) \leq \varphi(y).$$

Si la desigualdad es estricta, la función se denomina *estrictamente S-convexa.*

Para facilitar el manejo de las funciones presentadas, es necesaria una caracterización útil, mereciendo destacarse, en este sentido, el siguiente resultado.

Teorema 4.4 (Schur y Ostrowski)[7]: Sea I un intervalo real y *φ(.)* una función definida sobre I^N, diferenciable con continuidad[8]. Entonces, *φ(.)* es S-convexa *si y solo si* se cumplen las siguientes condiciones:

a) *φ(.)* es simétrica sobre I^N.

b) Condición de Schur:

$$\left(x_i - x_j\right)\cdot\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)\right] \geq 0 \;, \quad \forall i \neq j,\;\; \forall x \in D_N \cap I^N \,.$$

Esta caracterización permite una manipulación más ágil de este tipo de funciones. Así, por ejemplo, puede comprobarse que cualquier función simétrica y convexa es también S-convexa (Marshall y Olkin, 1979, pág. 67).

En estas condiciones, parece evidente que las medidas de desigualdad deben ser funciones S-convexas, teniendo en cuenta las equivalencias expuestas. Así, por ejemplo, el índice de Gini (Gini, 1912, 1921) es una función estrictamente S-convexa[9]. Sin embargo, la construcción de las medidas de desigualdad más usuales se asienta en el siguiente resultado, que permite redondear la cadena de implicaciones relacionadas con los conceptos de mayoración y desigualdad.

Teorema 4.5 (Karamata, 1932):

$$(x \prec y) \;\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} g\left(x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} g\left(y_i\right) \;, \quad \forall x, y \in D_N$$

[6] Recuérdese que una función es isótona si mantiene la relación binaria definida, de tipo ordinal.
[7] En Ostrowski (1952).
[8] Se entiende que existen todas las derivadas parciales y son continuas.
[9] Marshall y Olkin (1979) ofrecen un amplio tratamiento de las funciones S-convexas y, en particular, el resultado indicado en el texto.

para todas las funciones reales *g(.)*, convexas y continuas.

Una función del tipo $h(x)=\sum_{i=1}^{N} g(x_i)$, donde *g(.)* es convexa, se denomina *separable convexa.* Obviamente, cualquier función de este tipo es S-convexa, sin más que aplicar el Teorema 4.4, pero el recíproco no es cierto. Una consecuencia inmediata del Teorema 4.5 es la siguiente, que lo relaciona directamente con la medición de la desigualdad, a través de la relación de dominación de Lorenz, permitiendo la construcción directa de medidas de desigualdad compatibles con ella.

Corolario 4.1 (Arnold, 1987): Dadas dos variables aleatorias, X e Y, no negativas:

$$X \leq_L Y \quad \Leftrightarrow \quad E\left[g\left(\frac{X}{E(X)}\right)\right] \leq E\left[g\left(\frac{Y}{E(Y)}\right)\right] ,$$

para cualquier función *g(.)*, continua y convexa.

En primer lugar, debe observarse que el Corolario 4.1 se refiere a todas las posibles funciones reales continuas y convexas, de manera que cada selección particular daría como resultado una medida concreta de desigualdad. En este sentido, debe concluirse que la ordenación parcial generada por la dominación de Lorenz sigue, obviamente, estando presente, lo que, por otra parte, establece conexiones inmediatas con la *cuasi-ordenación de intersección* (Sen, 1973, pág.72), que no es más que una ordenación parcial algo menos restrictiva[10]. Evidentemente, la selección de una medida de desigualdad supone obtener una ordenación total, al ser el caso extremo entre los menos restrictivos de la problemática planteada. En dicha selección, el argumento de la compatibilidad con la dominación de Lorenz, aunque sólidamente justificado, enmascara, no obstante, las causas por las que distintas medidas difieren en la ordenación de distribuciones de renta, cuando no están relacionadas mediante la dominación en el sentido de Lorenz, al asumir distintas ponderaciones sobre diferentes tramos de la renta, lo que ha dado lugar a la selección de baterías de medidas de desigualdad compatibles como línea de investigación, que se presentará más adelante.

Por otra parte, el Corolario 4.1 permite la construcción de medidas de desigualdad que comparan distribuciones de renta con igual número de perceptores (D_N), aunque

[10] Evidentemente, siempre que los indicadores considerados sean todos ellos compatibles con la relación de Lorenz. Si no es así, la relación entre ambas aproximaciones no permite la inclusión entre ellas.

pudiera no coincidir el montante total de renta que se reparte, a costa de imponer que la desigualdad deba mantenerse en distribuciones proporcionales de renta y que, por tanto, las medidas deban ser funciones homogéneas de primer grado. Sin embargo, para extender las comparaciones a cualquier pareja de vectores de renta (D), lo que supone que el número de perceptores pueda diferir, este resultado está asumiendo el denominado *Principio de la Población de Dalton,* que el autor presenta en 1920, con el nombre de *Principio de adiciones proporcionales de personas* (Dalton, 1920, pág. 357), que puede expresarse de la siguiente forma: "la desigualdad se mantiene frente a réplicas de la población"[11]. Formalmente, esta restricción impone que las medidas de desigualdad deberán ser funciones de los valores de la función de distribución empírica.

Teniendo en cuenta todas las consideraciones anteriores, puede establecerse, como colofón, el siguiente resultado, que permite, además, explicitar la sensibilidad de las diversas medidas a las transferencias de renta.

Teorema 4.6 (Atkinson, 1970; Kakwani, 1980): Si *V(.)* es una función real estrictamente convexa, entonces cualquier medida de desigualdad del tipo $I(x) = E\left[V(x)\right]$ satisface el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton en todos los niveles de renta. Si, además, *V(.)* es diferenciable, su sensibilidad relativa a las transferencias es proporcional a:

$$T(x) = V'(x) - V'(x-\delta), \quad \delta>0.$$

5. Planteamiento axiomático de la desigualdad

No obstante el desarrollo riguroso expuesto con anterioridad, actualmente resulta más pujante el planteamiento axiomático. Consiste en la formulación de propiedades deseables que una buena medida de desigualdad debería cumplir para poder ser seleccionada entre el amplio abanico de posibilidades existentes y es, en este sentido, en el que debe entenderse la nomenclatura de *axiomas*, en este caso. Así pues, esta aproximación permite imponer propiedades más restrictivas en relación con las básicas, para que sirva de ayuda en la selección de medidas de desigualdad que exhiban un buen

[11] Se entiende por réplica de orden r de una población al vector de rentas construido repitiendo r veces cada una de las componentes del vector original, dando lugar a $(x_1,\overset{r)}{\ldots},x_1,x_2,\overset{r)}{\ldots},x_2,\ldots,x_N,\overset{r)}{\ldots},x_N)'$.

comportamiento. Sin ánimo de exhaustividad[12], se exponen a continuación aquellas que son más comúnmente aceptadas, aunque en algún caso se generen también ciertas controversias, con el objetivo de establecer claramente la relación entre esta aproximación y el desarrollo analítico anterior. Obviamente, se entiende que el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton también figura entre ellos, aunque ya se presentó con anterioridad y, por ello, no se repite su formulación en esta sección[13]. En todos ellos, $I(.)$ representa una medida de desigualdad que no es más que una función real definida sobre D, que cumplirá el correspondiente axioma si verifica el contenido que se explicita.

1. Axioma de Simetría o Imparcialidad: Sea $x = (x_1,x_2,...,x_N)' \in$ D y sea $y = (x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},...,x_{\sigma(N)})'$, donde $\sigma(.)$ es una permutación en el conjunto {1,2,...,N}. Entonces, $I(x)=I(y)$.

2. Axioma de Invarianza frente a Homotecias o Cambios de Escala:

$$I(\lambda x) = I(x), \quad \forall x \in D,\ \forall \lambda > 0.$$

3. Principio de la Población de Dalton: Sean $x,y \in$ D, de manera que y sea una réplica de orden m de la distribución x; es decir, $y = (x',x',...^{m)},x')'$, convenientemente ordenado en sentido no decreciente. Entonces, $I(x) = I(y)$.

4. Axioma de Normalización: En su versión débil, expresa que $I(x) \geq 0,\ \forall x \in D$ y que, además:

$$I(x) = 0 \Leftrightarrow \exists c \geq 0 : x = (c,c,...,c)'.$$

Una versión más fuerte (*normalización del rango*) exige que la medida tome el valor 1 en el caso de extrema desigualdad.

5. Axioma de Adición Constante[14]: Sean $x,y \in$ D, de manera que $x = (x_1,x_2,...,x_N)'$, $y = (x_1+c, x_2+c, ..., x_N+c)'$. Entonces, $I(y) \leq I(x),\ \forall c \geq 0$.

Por otra parte, para armonizar este planteamiento con el desarrollado en los epígrafes precedentes, se presenta la siguiente definición, que introduce en el análisis el

[12] Una exposición amplia de axiomas propuestos en la literatura puede verse en Nygard y Sandström (1981) o en Ruiz-Castillo (1986), por ejemplo.
[13] Por ello, los axiomas que se presentan se consideran básicos por su relación con la dominación de Lorenz. Entre los omitidos, destaca por su repercusión y controversia el *axioma de descomponibilidad aditiva* (Bourguignon, 1979), que permite caracterizar una familia de medidas de desigualdad.
[14] Esta propiedad ya está presente en Dalton (1920, pág. 357), razón de su inclusión aquí.

criterio de dominación de Lorenz, a través de la formulación de medidas de desigualdad.

Definición 5.1: Una función real *I(.)*, definida sobre *D*, se dice que es una *medida de desigualdad compatible con la dominación de Lorenz,* cuando es isótona con respecto a esta relación. Es decir:

$$I(x) \geq I(y) \Leftrightarrow x \geq_L y \Leftrightarrow L_x(p) \leq L_y(p), \forall p \in [0,1].$$

En estas condiciones, puede reconocerse cómo los tres primeros axiomas precedentes constituyen una formulación de las restricciones introducidas en el desarrollo analítico para la construcción de medidas de desigualdad, sobre la base original del Principio de Transferencias de Pigou-Dalton, tal y como lo pone de manifiesto el siguiente resultado.

Teorema 5.1 (Foster, 1985): Una función real *I(.)*, definida sobre *D*, es una medida de desigualdad compatible con la dominación de Lorenz *si y solo si* verifica los cuatro siguientes axiomas:

i) Simetría.
ii) Invarianza frente a Homotecias.
iii) Principio de la Población de Dalton.
iv) Principio de Transferencias de Pigou-Dalton.

Como puede verse, se trata de una reformulación en términos axiomáticos del desarrollo precedente. Como es de esperar, existe una amplia variedad de medidas de desigualdad compatibles con la dominación de Lorenz, entre las que cabe citar el Coeficiente de Variación, el Índice de Gini, la familia de medidas de Atkinson o la de Theil, como las más conocidas.

Este enfoque axiomático ha permitido, como ya se ha expresado, la posibilidad de definir axiomas más restrictivos que intenten caracterizar o singularizar alguna medida concreta, siendo el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton el que más se ha prestado a este tratamiento, por el carácter más instrumental del resto[15]. Estas

---

[15] No obstante, también se ha sugerido el uso de medidas absolutas, lo que supone eliminar el Axioma de Invarianza frente a Homotecias (Moyes, 1987), aunque están más en consonancia con la denominada relación de dominación generalizada de Lorenz (Shorrocks, 1983).

restricciones tratan de enfatizar el esquema de ponderaciones que las correspondientes medidas incorporan sobre los tramos de la distribución, de manera que suele admitirse habitualmente que las medidas ponderen con más intensidad los tramos más bajos de la distribución, siendo el límite de este planteamiento el correspondiente al paradigma *rawlsiano* que actúa solo sobre la mínima renta (Rawls, 1972), aunque cabe argumentar que este enfoque mide aspectos más relacionados con la pobreza que con la desigualdad asociadas a la distribución[16].

En este sentido, Kolm (1976a y b) enuncia su *Principio de Transferencias Decrecientes*, de la siguiente manera: "Si la distribución de renta *y* se obtiene de *x*, mediante una transferencia progresiva, entonces la desigualdad se reduce más cuanto más pobre sea el individuo que la recibe (transferencias decrecientes)". Así pues, si se eligen 4 rentas, de manera que $x_i < x_j < x_h$; $x_i < x_k < x_h$, de modo que las diferencias entre transmisores y receptores se mantengan: $x_j - x_i = x_h - x_k$, el enunciado del Principio se expresa mediante:

$$I(x_1,\dots, x_i+\delta,\ \dots, x_j- \delta,\ \dots, x_N) < I(x_1,\dots, x_k+\delta,\ \dots, x_h- \delta,\ \dots, x_N),\quad \delta>0,$$

donde $I(.)$ es un indicador de desigualdad. Como puede observarse, este tipo de transferencias también dejan invariante la media de la distribución. Se comprueba cómo la familia de índices de Atkinson y los de entropía (para $c<2$) verifican este Principio, mientras que no lo hacen ni el índice de Gini ni el Coeficiente de Variación. Por lo tanto, si se acepta el contenido normativo de esta formulación, la elección de medidas de desigualdad queda restringida, aunque no permite caracterizar a ninguna de ellas en particular.

Algo más restrictivas resultan las transferencias compuestas favorables, propuestas por Shorrocks y Foster (1987) que, siguiendo esta idea, componen una transferencia progresiva y una regresiva de la misma cuantía, haciendo que ejerza un mayor impacto sobre la desigualdad aquella que se realiza en el tramo más bajo de rentas. En este caso, los autores prueban que, si las curvas de Lorenz asociadas se

[16] Con esta idea, y teniendo en cuenta que el índice de Gini coincide con el doble del área que encierra la curva de Lorenz (Kakwani, 1980, por ejemplo), se ha sugerido la posibilidad de utilizar indicadores basados en elementos geométricos sobre la curva de Lorenz, como la máxima distancia a la diagonal (Pietra, 1914-15, 1948; Schutz, 1951), su longitud (Kakwani, 1980) o áreas ponderadas mediante funciones específicas (Mehran, 1976; Casas y Núñez, 1991, entre otros).

cruzan una sola vez, este *Principio de Sensibilidad a las Transferencias* equivale a la utilización del Coeficiente de Variación.

En cualquier caso, resulta difícil caracterizar una única medida de desigualdad utilizando planteamientos de este tipo que, además, implican un fuerte contenido normativo, lo que dificulta el que sean admitidos con un notable grado de consenso[17].

6. Criterios alternativos de comparación

Dadas las características de las relaciones de mayoración y de dominación de Lorenz entre distribuciones de renta, se han propuesto otras alternativas, buscando una ordenación más fina que las parciales que inducen las relaciones anteriores. En este sentido, se exponen a continuación algunas de ellas, aunque no debe olvidarse que la ordenación parcial obtenida es, de algún modo, inherente a la problemática de definir un orden vectorial.

La primera relación que se presenta es la de dominación mediante *curvas de Lorenz generalizadas* (Shorrocks, 1983), que tiene características similares a la de Lorenz, pero construida sobre las curvas generalizadas de Shorrocks:

$$LG_x(p) = \bar{x} \cdot L_x(p)\ ,\quad p \in [0,1]\ ,\ x \in D\ ,$$

de manera que la relación de dominación se establece mediante:

$$x \leq_{LG} y \Leftrightarrow LG_x(p) \geq LG_y(p)\ ,\quad \forall p \in [0,1],$$

de la que su autor argumenta que, pese a tener también estructura de orden parcial, permite obtener un número superior de comparaciones válidas que la de Lorenz. Sin embargo, el cambio de escala inducido con la multiplicación por la renta media provoca que estas curvas ya no midan desigualdad, sino que asuman postulados relacionados con la valoración social del bienestar, aunque desde un punto de vista estrictamente monetario, a través de funciones del tipo $W(x) = \bar{x}.(1-I_D)$ donde I_D es un indicador de desigualdad, por lo que a veces se les llaman curvas de *nivel de vida-renta* (Pena,

[17] Otras aportaciones en esta misma línea de restricción del Principio de Transferencias pueden verse en Fleurbaey y Michel (2001), entre otros.

Callealta, Casas, Merediz y Núñez, 1996). Estas curvas *LG(.)* son no decrecientes, convexas y pasan por los puntos (0,0) y $(1,\overline{\mathrm{x}})$.

Otra alternativa considerada ha sido el denominado *criterio de dominación por rangos* (Nygard y Sandström, 1981), cuya definición se presenta a continuación para dos vectores de renta $x,y \in D_N$:

$$x \leq_R y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \;, \quad \forall i = 1,2,...,N \,.$$

Como puede observarse, está muy relacionado con la mayoración. Por otra parte, sigue generando una estructura de orden parcial y está también estrechamente vinculado con la dominación generalizada de Lorenz, ya que puede comprobarse fácilmente que:

$$x \leq_R y \quad \Rightarrow \quad x \leq_{LG} y \,.$$

Una de las propuestas que mayor atención está recibiendo actualmente la constituye la *dominación estocástica* de diversos órdenes (Muliere y Scarsini, 1989, entre otros). Se trata de una relación definida entre las funciones de distribución de las variables aleatorias que representan las diversas rentas. En este sentido, sea X una variable aleatoria no negativa que representa la renta de una sociedad, y sea *F(.)* su función de distribución; entonces las funciones de distribución de órdenes sucesivos se definen a través de:

$$F_1(z) \;=\; F(z) \;=\; P(X \leq z) \;, \quad \forall z \geq 0$$
$$F_j(z) = \int_{-\infty}^{z} F_{j\text{-}1}(t)dt \;, \quad \forall z \geq 0, \quad \forall j = 2,3,....$$

y, en estas condiciones, se define la relación de *dominación estocástica de orden j* mediante la siguiente expresión, para dos distribuciones de renta *x* e *y*, con funciones de distribución *F(.)* y *G(.)*, respectivamente:

$$x \leq_{D_j} y \quad \Leftrightarrow \quad F_j(z) \geq G_j(z) \;, \quad \forall z \geq 0 \,.$$

En sus órdenes primero y segundo, mantiene una estrecha relación con las dominaciones de rangos y generalizada de Lorenz, respectivamente. De nuevo, las relaciones generadas presentan estructuras de orden parcial, aunque más finas progresivamente, a medida que se aproximan al paradigma *rawlsiano*. En la actualidad, la investigación se centra principalmente en las implicaciones normativas de la relación de dominación estocástica de tercer orden (Shorrocks y Foster, 1987; Davies y Hoy, 1994, entre otros).

Una manera de alcanzar un ordenación total sería asumir el ideal *rawlsiano* (Rawls, 1972), definiendo la siguiente relación para dos distribuciones de renta $x,y \in D$:

$$x \leq_{rw} y \quad \Leftrightarrow \quad \underset{i}{Mín}\{x_i\} \leq \underset{j}{Mín}\{y_j\},$$

pero, obviamente, solo tiene en cuenta la renta del perceptor más pobre y está más cercano al análisis de la pobreza que al de la desigualdad.

Sin embargo, existen otras propuestas más sofisticadas en la literatura como, por ejemplo, la relación de dominación de Lorenz de órdenes sucesivos, pero existen dudas de que estén midiendo desigualdad (Nygard y Sandström, 1981; Ramos y Sordo, 2001).

Otra alternativa muy diferente supone poner el énfasis más en las diferencias acumuladas de rentas con respecto a la media que en la proporción acumulada de recursos repartidos, a diferencia de las curvas de Lorenz, definiendo lo que se ha dado en llamar *curvas absolutas de Lorenz* (Moyes, 1987):

$$A_X(p) = \int_0^p \left[F^{-1}(t) - E(X)\right] dt, \quad p \in [0,1].$$

En este caso, los resultados obtenidos ya no son directamente compatibles con la curva de Lorenz, y los axiomas que caracterizan sus resultados son distintos a los aquí expuestos. Esta línea de investigación está recibiendo cierta atención en los últimos años (Ramos y Sordo, 2003).

7. Indicadores sintéticos de desigualdad y nivel de vida

De los epígrafes anteriores, se deduce la imposibilidad de aislar una medida de desigualdad que resulte claramente superior al resto. Por esta razón, García, Núñez, Rivera y Zamora (2002) proponen considerar una batería de indicadores de desigualdad que presenten buenas propiedades, y utilizar la primera componente principal como indicador para medir la información común que contienen que, obviamente, deberá ser la desigualdad. Este indicador de desigualdad dependerá críticamente del período en que se lleve a cabo el estudio y, por ello, Domínguez, Núñez y Rivera (2004) y Domínguez y Núñez (2005) proponen cómo adaptar este indicador para afrontar análisis de naturaleza dinámica.[18]

Así pues, supongamos que se dispone de p indicadores de desigualdad, que proporcionan valores en diferentes instantes del tiempo, para una serie de casos que se desea comparar como pudieran ser, por ejemplo, unidades geográficas:

$$\left\{I_1(x,t), I_2(x,t), ..., I_p(x,t)\right\}, \quad x \in S, t \in T = \left\{t_1, t_2, ..., t_k\right\},$$

donde S es el conjunto de casos considerados. Por lo tanto, en cada instante temporal se dispone de un conjunto de datos cuya dimensión viene determinada por p y el cardinal del conjunto S, de manera que la descomposición espectral de la matriz de correlaciones será:

$$R(t) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j(t) \cdot u_j(t) \cdot u_j'(t) \quad , \lambda_1(t) \geq \lambda_2(t) \geq ... \geq \lambda_p(t), t \in T,$$

siendo $\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_p(t)$ los correspondientes autovalores, mientras que $u_1(t), u_2(t), ..., u_p(t)$ serán los autovectores. En estas condiciones, el predictor lineal óptimo, en el sentido de que proporciona el mínimo error cuadrático medio, será (Peña, 2002):

$$Z_1(x,t) = Y(x,t) \cdot u_1(t) = \sum_{j=1}^{p} u_{1j}(t) \cdot Y_j(x,t) = \sum_{j=1}^{p} u_{1j}(t) \cdot \frac{I_j(x,t) - \overline{I}_j(t)}{S_{I_j}(t)},$$

donde, obviamente, $Y_j(t)$ son los indicadores de desigualdad de base tipificados. Además, el error cometido decrece cuando la proporción de varianza explicada por la primera componente principal crece. A partir de aquí, siguiendo las directrices básicas expuestas en García, Núñez, Rivera y Zamora (2002), pero adaptadas a la situación aquí planteada como en Domínguez, Núñez y Rivera (2004), se obtiene:

$$Z_1(x,t) = \sum_{j=1}^{p} \frac{u_{1j}(t)}{S_{I_j}(t)} \cdot I_j(x,t) - \sum_{j=1}^{p} \frac{u_{1j}(t)}{S_{I_j}(t)} \cdot \overline{I}_j(t) = \sum_{j=1}^{p} a_j(t) \cdot I_j(x,t) - K(t).$$

[18] También es posible adaptar la distancia DP2 de Ivanovic-Pena, aunque ésta funciona mejor cuando los indicadores de base están poco correlacionados, como ocurre al medir bienestar social a partir de baterías de indicadores (García, Núñez, Rivera y Zamora, 2002).

Y, por lo tanto, el indicador sintético de desigualdad basado en la primera componente principal que se propone es:

$$Z^*(x,t) = \frac{Z_1(x,t) + K(t)}{\sum_{j=1}^{p} a_j(t)} = \sum_{j=1}^{p} a_j^*(t) \cdot I_j(x,t) .$$

Puede observarse cómo el indicador sintético *Z*(x,t)* es una combinación lineal convexa de los indicadores de desigualdad de partida.

Sin embargo, el indicador obtenido está diseñado para efectuar comparaciones entre los casos que componen S, pero de manera transversal (*cross section*), debido a la dependencia del tiempo que exhiben sus coeficientes. Este rasgo resta posibilidades de utilización al indicador sintético, ya que éste será diferente en cada instante temporal considerado. Sin embargo, Domínguez, Núñez y Rivera (2004) y Domínguez y Núñez (2005) sugieren una adaptación que supera este inconveniente.

En efecto, para ello se considera la hipótesis de que la estructura de correlación de los indicadores de partida es similar a lo largo del tiempo. Para ello, se utiliza un contraste de hipótesis basado en el estadístico M de Box (Rencher, 1995) para contrastar la hipótesis nula de igualdad de matrices de covarianzas. Si se admite la hipótesis nula, se puede obtener un indicador sintético dinámico de desigualdad, utilizando el razonamiento anterior sobre la primera componente principal común, obtenida para la matriz de correlaciones muestral combinada (Flury, 1984)[19]. Dicha matriz de correlaciones se obtiene considerando los datos de todos los instantes temporales conjuntamente. De esta manera, desaparece la dependencia temporal:

$$Z_1(x,t) = Y(x,t) \cdot u_1 = \sum_{j=1}^{p} u_{1j} \cdot Y_j(x,t) = \sum_{j=1}^{p} u_{1j} \cdot \frac{I_j(x,t) - \overline{I}_j}{S_{I_j}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \frac{u_{1j}}{S_{I_j}} \cdot I_j(x,t) - \sum_{j=1}^{p} \frac{u_{1j}}{S_{I_j}} \cdot \overline{I}_j = \sum_{j=1}^{p} a_j \cdot I_j(x,t) - K .$$

[19] Si no se acepta la hipótesis nula de igualdad de matrices de correlaciones, aún puede utilizarse una adaptación del Análisis del Espacio Común (Krzanowski, 1979), para conseguir un vector lo más próximo posible a todos los primeros autovectores obtenidos para los indicadores sintéticos transversales. Este vector será útil para la construcción de un indicador sintético dinámico de desigualdad, siempre que la distancia entre dichos autovectores no sea excesivamente grande (Domínguez, Núñez y Rivera, 2004; Domínguez y Núñez, 2005).

Por lo tanto, ahora el indicador sintético dinámico de desigualdad será:

$$Z^*(x,t) = \frac{Z_1(x,t)+K}{\sum_{j=1}^{p} a_j} = \sum_{j=1}^{p} a_j^* \cdot I_j(x,t) \, .$$

De nuevo, se obtiene una combinación lineal convexa de los indicadores de partida, pero ahora los coeficientes son constantes en el tiempo, lo que permite las comparaciones longitudinales, además de las transversales.

En este sentido, en Pena, Callealta, Casas, Merediz y Núñez (1996) y en García, Núñez, Rivera y Zamora (2002) se argumenta la selección de la siguiente batería de indicadores de desigualdad, de acuerdo con las propiedades que estos satisfacen:

- Medida de Desigualdad de Atkinson de orden 0.5 (ATKIN0.5):

$$ATKIN0.5 = 1 - \frac{1}{\mu}\left(\sum_{i=1}^{k} f_i \sqrt{x_i}\right)^2 ,$$

  donde μ es la media aritmética de la distribución de ingresos.

- Medida de Desigualdad de Atkinson de orden 1 (ATKIN1):

$$ATKIN1 = 1 - \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{x_i}{\mu}\right)^{f_i} .$$

- Medida de Desigualdad de Atkinson de orden 2 (ATKIN2):

$$ATKIN2 = 1 - \left(\frac{\mu_A}{\mu}\right),$$

  donde μ_A es la media armónica de la distribución de ingresos.

- Coeficiente de Variación al Cuadrado Normalizado (CV2.NORM):

$$CV2.NORM = \frac{CV^2}{1+CV^2},$$

  donde CV es el coeficiente de variación de la distribución de ingresos.

- Índice de Gini (GINI):

$$GINI = \frac{1}{2\mu}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left|x_i - x_j\right| f_i f_j \, .$$

- Índice de Pietra (PIETRA):

$$PIETRA = \frac{1}{2\mu}\sum_{i=1}^{k}\left|x_i - \mu\right| f_i \ .$$

- Medida de Desigualdad de Theil de Orden 1 Normalizada (TH1.NORM):

$$TH1.NORM = 1 - \exp\left(-\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{k} x_i \log\left(x_i/\mu\right) f_i\right).$$

donde f_i indica la correspondiente distribución de frecuencias relativas.

En estas condiciones, el indicador sintético de desigualdad obtenido será compatible con el criterio de dominación de Lorenz, ya que todos los indicadores seleccionados cumplen las condiciones expuestas en el Teorema 5.1, aunque en una versión débil, ya que el índice de Pietra solo satisface el Principio de Transferencias de Dalton-Pigou de manera débil[20]. La demostración es inmediata teniendo en cuenta que los indicadores sintéticos propuestos son combinaciones lineales convexas de la batería inicial compuesta por los indicadores de desigualdad expuestos en la lista anterior.

En relación con el nivel de vida, debe indicarse que, al igual que ocurre con el bienestar social, la construcción de indicadores presenta numerosas dificultades metodológicas, como puede verse, por ejemplo, en Pena (1977). En cualquier caso, es norma habitual valorar el nivel de vida de las unidades perceptoras a partir de su posición económica, en lo que ha venido en llamarse *nivel de vida-renta* (Pena, Callealta, Casas, Merediz y Núñez, 1996). En este sentido, se propone el estudio del nivel de vida a partir de funciones de valoración social de la forma:

$$W(x) = W\left[\mu(x), I_D(x)\right],$$

de manera que sean no decrecientes con relación a la renta media, $\mu(x)$, y no crecientes con el nivel de desigualdad, cuantificado a través de un indicador de desigualdad adecuado $I_D(x)$. Esta propuesta implica asumir que la sociedad prefiere disponer de mayor renta, en situaciones similares de desigualdad, y que presenta aversión a la presencia de desigualdad en el reparto de la renta (u otras posibilidades de medir la

[20] El índice de Pietra solo satisface el Principio de Transferencias, admitiendo que transferencias progresivas que supongan la misma cuantía con relación a la renta media, dejan inalterado el indicador y, por lo tanto, la desigualdad entre los valores antes y después de la transferencia no es estricta.

posición económica como el gasto o el ingreso). Como se recordará, las funciones de valoración social asociadas a las curvas generalizadas de Shorrocks, presentadas al discutir criterios alternativos de comparación de desigualdad, son casos particulares de esta formulación general.

Por lo tanto, será dicho caso particular el propuesto aquí, junto con la selección del indicador sintético dinámico como indicador de desigualdad. Así pues, el indicador sintético de nivel de vida que se propone es el siguiente:

$$INV(x,t) = \mu(x,t) \cdot \left[1 - Z^*(x,t)\right], \quad x \in S, t \in T,$$

siendo $\mu(x,t)$ la renta media del caso x en el instante t, y $Z^*(x,t)$ el indicador sintético dinámico de desigualdad, valorado en los mismos elementos, siempre que sea posible su construcción porque las estructuras dinámicas de correlación de los indicadores de base se puedan admitir similares.

8. Evolución de la desigualdad y el nivel de vida en los países de la Unión Europea, durante 1993-1999

Como ilustración de los conceptos y la metodología expuesta a lo largo de este trabajo, se presenta el análisis de la desigualdad y el nivel de vida derivado de los ingresos netos por hogar en los países de la Unión Europea. Un análisis más detallado puede verse en Domínguez, Núñez y Rivera (2005).

Los datos utilizados proceden del Panel de Hogares de la Unión Europea (PHOGUE), para el período 1994-2000. Esta Encuesta está diseñada y coordinada por EUROSTAT, que es la Oficina de Estadística de la Unión Europea (U.E.)[21]. Puesto que los ingresos de cada oleada vienen referidos siempre al año anterior, el período de estudio será el 1993-1999, que cubre casi la última década del siglo XX, lo que convierte al estudio en claramente relevante.

[21] Una descripción detallada del PHOGUE puede verse en Peracchi (2002) o en Ayala y Sastre (2002), por ejemplo.

Tabla 8.1: *Tamaños muestrales totales y tamaños muestrales considerados, entre paréntesis.*

PAÍS	Ola 1 1993	Ola 2 1994	Ola 3 1995	Ola 4 1996	Ola 5 1997	Ola 6 1998	Ola 7 1999
Dinamarca (DK)	3482 (3478)	3223 (3218)	2955 (2951)	2745 (2740)	2512 (2505)	2387 (2381)	2281 (2273)
Holanda (NL)	5187 (5139)	5110 (5035)	5179 (5097)	5049 (5019)	4963 (4922)	5023 (4981)	5008 (4976)
Bélgica (BE)	3490 (3454)	3366 (3343)	3210 (3191)	3039 (3013)	2876 (2863)	2712 (2691)	2571 (2555)
Francia (FR)	7344 (7108)	6722 (6679)	6600 (6555)	6176 (6142)	5866 (5849)	5610 (5594)	5345 (5331)
Irlanda (IE)	4048 (4038)	3584 (3569)	3173 (3164)	2945 (2935)	2729 (2723)	2378 (2372)	1951 (1944)
Italia (IT)	7115 (6915)	7128 (7004)	7132 (7026)	6713 (6627)	6571 (6478)	6370 (6273)	6052 (5989)
Grecia (GR)	5523 (5480)	5220 (5173)	4907 (4851)	4604 (4543)	4211 (4171)	3986 (3952)	3918 (3893)
España (ES)	7206 (7142)	6522 (6449)	6267 (6133)	5794 (5714)	5485 (5439)	5418 (5301)	5132 (5048)
Portugal (PT)	4881 (4787)	4916 (4870)	4849 (4807)	4802 (4167)	4716 (4666)	4683 (4645)	4633 (4606)
Austria (AT)	- (-)	3380 (3367)	3292 (3281)	3142 (3130)	2960 (2952)	2815 (2809)	2644 (2637)
Finlandia (FI)	- (-)	- (-)	4139 (4138)	4106 (4103)	3920 (3917)	3822 (3818)	3104 (3101)
Suecia (SE)	- (-)	- (-)	- (-)	5891 (5286)	5807 (5208)	5732 (5165)	5734 (5116)
Alemania (DE)	6207 (6196)	6336 (6329)	6259 (6252)	6163 (6156)	5962 (5955)	5847 (5845)	5693 (5687)
Luxemburgo(LU)	- (-)	2978 (2976)	2472 (2471)	2654 (2651)	2523 (2521)	2552 (2551)	2373 (2373)
Reino Unido (UK)	5126 (5041)	5032 (4999)	5011 (4991)	4965 (4958)	4996 (4975)	4951 (4935)	4890 (4866)

Fuente: *Domínguez, Núñez y Rivera (2005).*

Dado que el diseño de la Encuesta es un panel, uno de los aspectos más preocupantes es la paulatina retirada de hogares de la muestra, fenómeno conocido como *attrition.* En este caso, aunque es patente su presencia, los tamaños muestrales finales parecen suficientemente grandes para que la representatividad de los resultados en un estudio de este tipo no quede demasiado afectada. Por otra parte, no se han eliminado del estudio Luxemburgo, Austria, Finlandia y Suecia, pese a la falta de datos en algunas oleadas, puesto que no hay objeción alguna para utilizar el resto de oleadas donde se dispone de datos. Un resumen de estos aspectos puede verse en la Tabla 1 anterior, donde aparecen los tamaños muestrales por oleadas de todos los países que integran el estudio. Entre paréntesis figura el tamaño muestral efectivo, después de eliminar aquellos hogares para los que no hay información sobre el ingreso neto.

Por otra parte, las economías de escala internas del hogar se han ajustado utilizando como escala de equivalencia el ingreso neto *per capita*, como aquella que proporciona una interpretación más clara (Pena, Callealta, Casas, Merediz y Núñez, 1996)[22]. Además, para homogeneizar las comparaciones, los ingresos netos se han expresado en dólares USA de 1996, utilizando los tipos de cambio facilitados por EUROSTAT.

La batería de indicadores simples de desigualdad que se ha utilizado coincide con la presentada en el epígrafe anterior. De esta manera, los resultados del contraste M de Box sobre la igualdad de las matrices de correlación transversales se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 8.2: *Resultados de la prueba M de Box.*

Box's M		126.017
F	Aprox.	0.818
	df1	126.000
	df2	12975.749
	Sig.	0.932

Fuente: *Domínguez, Núñez y Rivera (2005).*

Así pues, no puede rechazarse la hipótesis nula de igualdad de matrices de correlaciones transversales. En estas condiciones, de acuerdo con la metodología expuesta en el epígrafe anterior, el indicador sintético dinámico de desigualdad, obtenido a partir de la primera componente principal de la matriz de correlaciones combinada es el siguiente:

$$\begin{aligned} Z^*(x,t) \;=\; & 0.299\, ATKIN0.5(x,t) \;+\; 0.154 ATKIN1(x,t) + 0.025 ATKIN2(x,t) + \\ & + 0.047 CV2.NORM(x,t) + 0.102 GINI(x,t) + 0.219 PIETRA(x,t) + 0.154 TH1.NORM(x,t) \end{aligned}$$

y, además, la primera componente principal absorbe un porcentaje de varianza superior al 80%. Una vez calculados sus valores para todos los países y oleadas considerados, los resultados obtenidos se presentan en el Gráfico 8.1 que se reproduce a continuación.

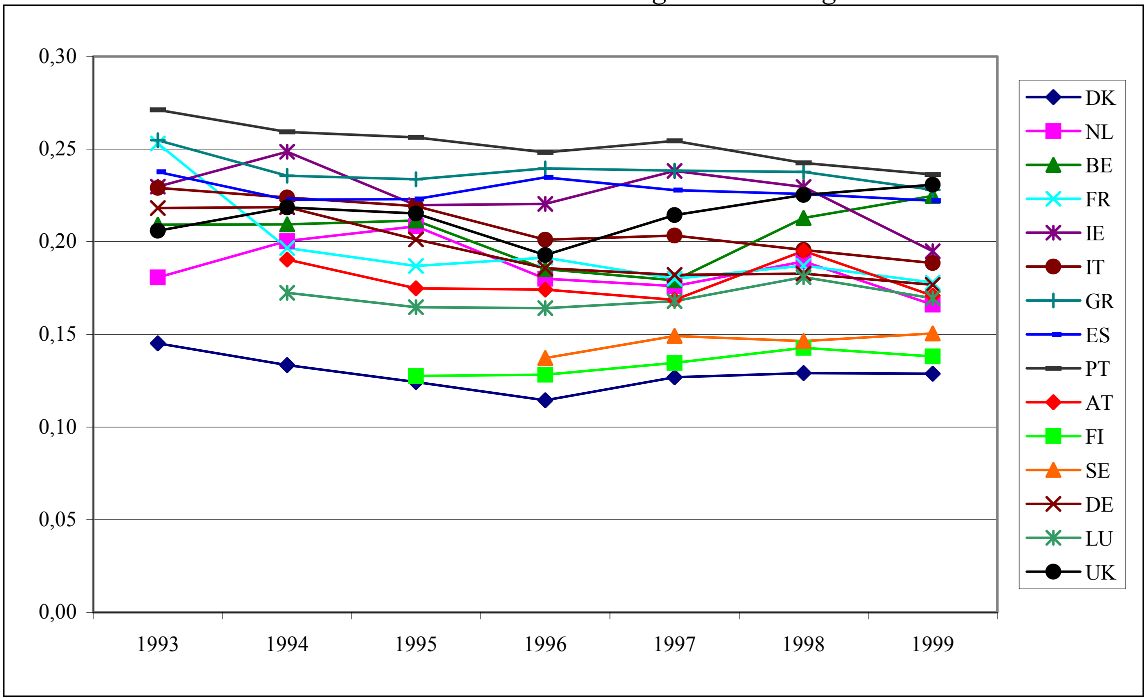
---

[22] La gama de escalas de equivalencia utilizadas en la literatura es muy amplia, sin que existan criterios claros que permitan la selección de una frente al resto. Por otra parte, la selección de cada una de ellas condiciona los resultados obtenidos, tal y como puede verse en Casas, Domínguez y Núñez (2001) o en Domínguez, Núñez y Rivera (2002), por ejemplo, donde también puede verse una panorámica más amplia en relación con las diversas escalas de equivalencia.

Como puede observarse[23], se aprecia que los mayores niveles de desigualdad aparecen, por este orden, en Portugal, Grecia y España, mientras que Italia es el país que les sigue. Todos ellos presentan una tendencia prácticamente decreciente en el periodo analizado. Sin embargo, Dinamarca es el país que presenta menor desigualdad, seguido de Finlandia y Suecia durante todo el periodo.

El resto de países de la U.E. se sitúan en una franja central, pero con tendencias diversas. Así, Luxemburgo presenta una estabilidad en sus niveles de desigualdad, que contrasta con los repuntes sufridos por el Reino Unido y Bélgica, hacia la mitad del periodo. Sin embargo, Alemania, Francia y Austria presentan una tendencia decreciente, mientras que Irlanda muestra unos resultados oscilatorios, pero con una acusada disminución en la fase final del periodo.

Gráfico 8.1: *Evolución del índice sintético de desigualdad del ingreso. Años 1993 a 1999.*



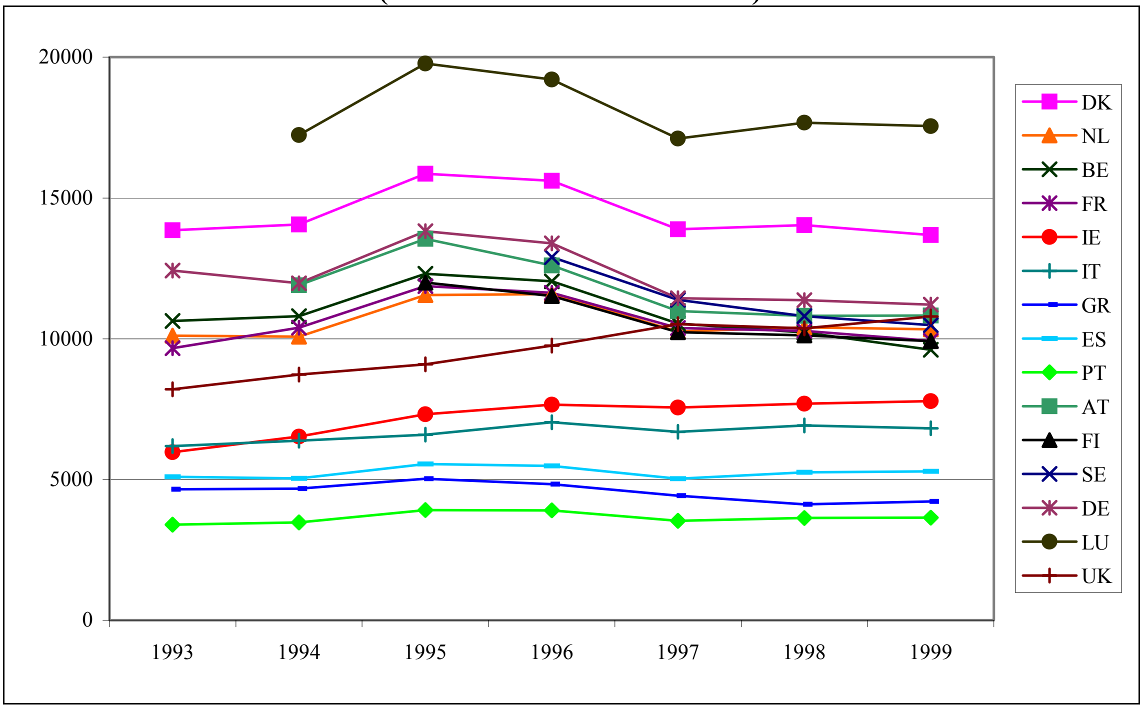
Fuente: *Domínguez, Núñez y Rivera (2005).*

Por otra parte, se ha utilizado como indicador de nivel de vida el presentado en el epígrafe anterior, incluyendo el indicador sintético dinámico de desigualdad en su formulación.

[23] Domínguez, Núñez y Rivera (2005) comprueban la robustez de los grupos descritos de países en relación con sus niveles de desigualdad, utilizando un Análisis de Conglomerados (*Cluster Analysis)* Jerárquico.

De esta manera, a partir de los ingresos netos *per cápita*, expresados en dólares USA de 1996, se han obtenido los ingresos netos medios que, junto con los valores obtenidos para el indicador sintético dinámico de desigualdad, han permitido elaborar las trayectorias que componen el Gráfico 8.2, que se muestra a continuación. Obviamente, los valores del que podríamos denominar *indicador sintético dinámico de nivel de vida,* vienen expresados en dólares USA de 1996.

Gráfico 8.2: *Evolución del índice sintético de nivel de vida. Años 1993 a 1999.*
(En dólares USA del año 1996)



Fuente: *Domínguez, Núñez y Rivera (2005).*

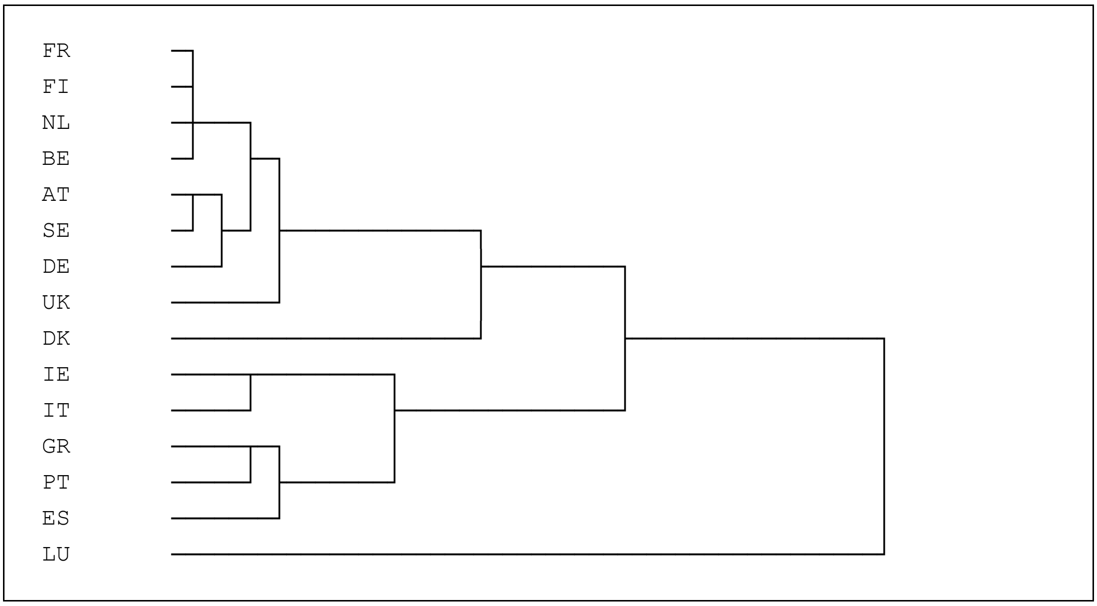
Por lo tanto, al estudiar la evolución de los niveles de vida en los países de la U.E., durante la década de los noventa, se observa un comportamiento claramente diferente a la evolución de la desigualdad. En primer lugar, se aprecia como es claramente Luxemburgo el país que ostenta el nivel de vida más alto, seguido por Dinamarca.

Irlanda e Italia presentan comportamientos similares, aunque siendo claramente creciente la evolución del nivel de vida en el primer caso, mientras que es algo más oscilatorio en el segundo. Los países con menor nivel de vida son, por este orden, España, Grecia y Portugal, en los que tampoco se aprecian mejoras significativas si se comparan con sus niveles al principio del periodo.

Finalmente, el resto de los países se sitúan en una franja central con comportamientos muy parecidos, excepto quizás en el caso del Reino Unido. También parece apreciarse una cierta convergencia entre los niveles de vida de estos países.

Teniendo en cuenta la multiplicidad de trayectorias que se observan en el Gráfico 8.2, se presenta a continuación el dendrograma obtenido utilizando un Análisis de Conglomerados Jerárquico, para comprobar la robustez de los grupos descritos. En concreto, se utilizó el método de aglomeración del centroide y la distancia euclídea al cuadrado, como medida de proximidad. Obviamente, solo se ha utilizado el subperiodo para el que se dispone de datos de todos los países considerados.

Gráfico 8.3: *Dendrograma de clasificación de los países según la evolución del índice sintético de nivel de vida. Años 1996 a 1999.*



Fuente: *Domínguez, Núñez y Rivera (2005).*

Puede comprobarse cómo queda confirmada la existencia de los cinco grupos descritos. Como complemento, se presenta a continuación un mapa ilustrativo de su situación, donde entre paréntesis se indica el número de países que hay en cada grupo.

Gráfico 8.4: *Grupos de países en la Unión Europea, según la evolución de su nivel de vida.*

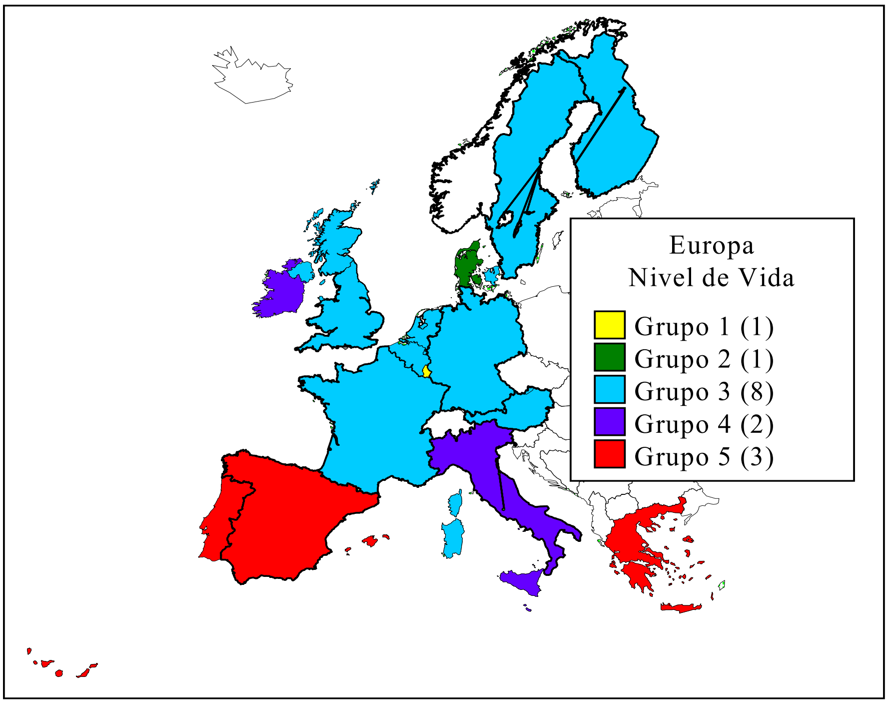
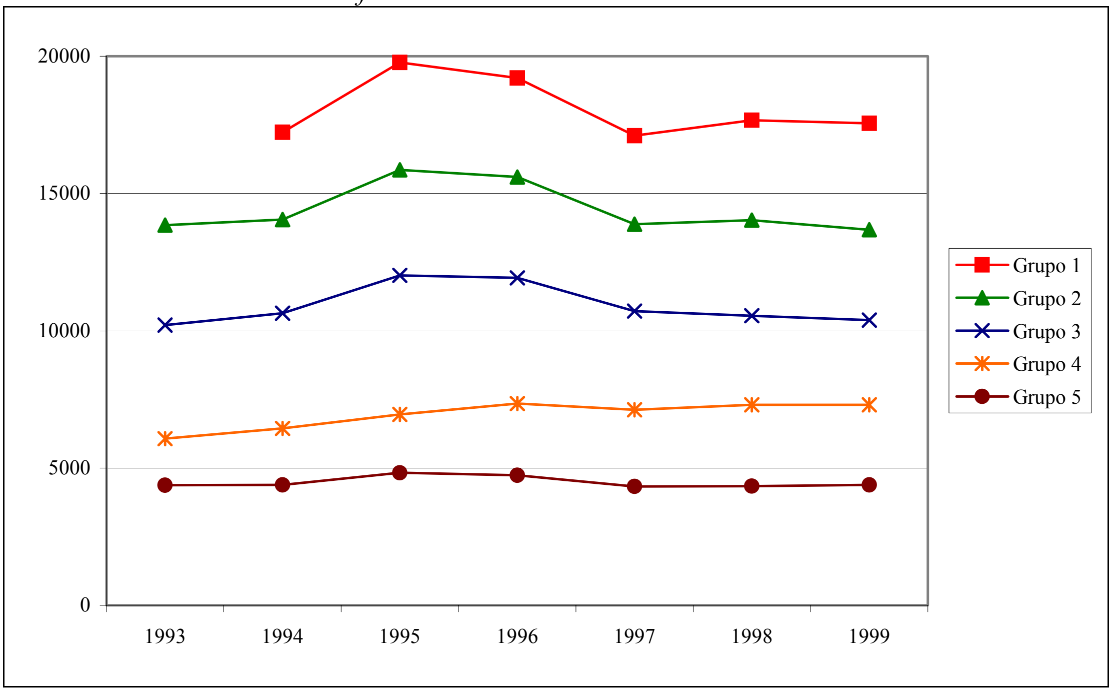


Gráfico 8.5: *Evolución del índice sintético medio de nivel de vida por grupos, según la clasificación realizada. Años 1993 a 1999.*



Fuente: *Domínguez, Núñez y Rivera (2005).*

Finalmente, el Gráfico 8.5 anterior muestra la evolución del valor medio que toma el indicador sintético de nivel de vida, calculado en los cinco grupos encontrados. Puede apreciarse como, a excepción del Grupo 4 (Irlanda e Italia), los niveles de vida en 1999 se mantienen cercanos a las posiciones en que se hallaban en 1993. También debe destacarse cómo estos grupos presentan disparidades pronunciadas, que les hacen aparecer bastante diferenciados, en cuanto a su nivel de vida se refiere.

9. Conclusiones

A lo largo de este trabajo, se ha expuesto la teoría estadística subyacente precisa para una buena comprensión del significado de las medidas de desigualdad económica, resultando que todas ellas están firmemente asentadas sobre las relaciones de mayoración y de dominación de Lorenz entre distribuciones de renta. Estos rasgos condicionan notablemente la propuesta de indicadores que puedan servir como buenas medidas de desigualdad. Para ello, se ha optado por realizar una revisión histórica crítica, que permite recuperar términos poco frecuentes en los estudios actuales sobre desigualdad económica, así como encontrar su relación con las tendencias y propuestas más actuales. Así pues, se ha dejado patente la razón por la que las curvas de Lorenz siguen resistiendo los embates de la teoría, en un campo de notable producción editorial, desde su propuesta que data de más de un siglo de antigüedad.

Además, se ha establecido claramente que es el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton el que se constituye en piedra angular sobre la que asentar las actuales medidas de desigualdad, ya que resulta ser la característica esencial del concepto de mayoración de rentas, a través de las matrices biestocásticas. Esta razón ha conducido a una línea actual de investigación, consistente en restringir este Principio para que llegue a caracterizar o singularizar el comportamiento de medidas concretas de desigualdad, aunque a costa de establecer esquemas de ponderación sobre la distribución de rentas.

La conexión con la dominación en el sentido de Lorenz queda establecida a través de las funciones convexas en el sentido de Schur o S-convexas, que determinan el tipo de indicadores adecuados para medir la desigualdad, tal y como queda patente mediante las funciones separables convexas y el Teorema de Karamata.

Las relajaciones sobre el primitivo concepto de mayoración en el espacio de distribuciones de renta con N perceptores (D_N), para eliminar las restricciones de igualdad en número de perceptores y de cantidad total de recursos al efectuar comparaciones y así pasar al espacio global de rentas (D), son las que determinan los axiomas básicos de la desigualdad, tal y como se configuran en el Teorema de Foster. Requisitos posteriores, como los axiomas de descomposición aditiva, permiten caracterizar familias de medidas de desigualdad y efectuar operaciones útiles, pero lo hacen imponiendo restricciones que no están vinculadas directamente al concepto de desigualdad.

Otras relaciones derivadas de la comparación global de distribuciones de renta no han permitido, hasta la fecha, conseguir una relación de orden total frente a la parcial derivada de la dominación en el sentido de Lorenz. Esto permite dar cuerpo a la afirmación de A. Sen, en el sentido de que la desigualdad es intrínsecamente un concepto gobernado por una *cuasi-ordenación*, al efectuar comparaciones, lo que sugiere la utilización de baterías de medidas de desigualdad como alternativa.

Por lo tanto, la obtención de una medida de desigualdad de consenso implica la imposición de restricciones sobre los axiomas básicos que, no obstante, no hagan perder la conexión con los conceptos básicos que les sirven de soporte.

Finalmente, el indicador sintético dinámico de desigualdad se configura como una alternativa válida frente al problema de la selección de una única medida de desigualdad, al admitir un conjunto de indicadores simples como punto de partida. La propia configuración del indicador sintético como combinación lineal convexa de los indicadores de partida, permite que sea compatible con el criterio de dominación de Lorenz siempre y cuando lo sean todos los indicadores sobre los que está construido.

Agradecimientos

Este artículo se ha beneficiado de la financiación proveniente de los Proyectos de Investigación UAH-PI2004/034, de la Universidad de Alcalá, y PBI-05-004, de la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha y el Fondo Social Europeo. Por otra parte, el autor agradece los comentarios y sugerencias emitidas por los asistentes al *VI Seminario de Investigación del Área de Métodos Cuantitativos,* donde se presentó una versión preliminar de este trabajo, así como a los dos evaluadores anónimos, que han contribuido a mejorar la versión final.

Bibliografía

ARNOLD, B.C. (1987). *Majorization and the Lorenz order: A brief introduction.* Lecture Notes in Statistics. Springer Verlag. New York.

ARNOLD, B.C.; ROBERTSON, C.A.; BROCKETT, P.L. y SHU, B.-Y. (1987). "Generating ordered families of Lorenz curves by strongly unimodal distributions". *Journal of Business and Economic Statistics,* 5, 2, 305-308.

ATKINSON, A.B. (1970). "On the measurement of inequality". *Journal of Economic Theory,* 2, 244-263.

AYALA, L. y SASTRE, M. (2002) "What determines income mobility differences across the European Union?". *Working Papers of the Institute for Social and Economic Research, 2002-07*. Colchester: University of Essex.

BARTELS, C.P.A. (1977). *Economics Aspects of Regional Welfare.* Martinus Nijhoff Sciences Division.

BIRKHOFF, G. (1976). "Tres observaciones sobre el Álgebra Lineal". *Univ. Nacional de Tucuman Rev.*, Serie A, 5, 147-151.

BOURGUIGNON, F. (1979). "Decomposable income inequality measures". *Econometrica,* 47, 901-920.

CASAS, J.M.; DOMÍNGUEZ, J. y NÚÑEZ, J.J. (2001) "Sobre la utilización de las escalas de equivalencia en el estudio de la desigualdad y la pobreza. El caso de España". *Anales de Economía Aplicada. XV Reunión Anual de ASEPELT-España*. La Coruña. Publicación en CD-ROM (2003).

CASAS, J.M.; HERRERÍAS, R. y NÚÑEZ, J.J. (1997). "Familias de Formas Funcionales para estimar la Curva de Lorenz". *Actas de la IV Reunión Anual de ASEPELT-España.* Servicio de Estudios de Cajamurcia, 171-176. Reimpreso en *Aplicaciones estadísticas y económicas de los sistemas de funciones indicadoras* (Herrerías, R.; Palacios, F. y Callejón, J., eds.). Univ. Granada, 2001, 119-125.

CASAS, J.M. y NÚÑEZ, J.J. (1987). "Algunas Consideraciones sobre las Medidas de Concentración. Aplicaciones". *Actas de las II Jornadas sobre Modelización Económica,* 49-62. Barcelona. Reimpreso en *Aplicaciones estadísticas y económicas de los sistemas de funciones indicadoras* (Herrerías, R.; Palacios, F. y Callejón, J., eds.). Univ. Granada, 2001, 111-118.

CASAS, J.M. y NÚÑEZ, J.J. (1991). "Sobre la Medición de la Desigualdad y Conceptos Afines". *Actas de la V Reunión Anual de ASEPELT-España,* Caja de Canarias. Vol.2, 77-84. Reimpreso en *Aplicaciones estadísticas y económicas de los sistemas de funciones indicadoras* (Herrerías, R.; Palacios, F. y Callejón, J., eds.). Univ. Granada, 2001, 127-133.

CASTAGNOLI, E. y MULIERE, P. (1990). "A note on inequality measures and the Pigou-Dalton Principle of Transfers". Publicado en *Income and Wealth Distribution, Inequality and Poverty.* (Dagum, C. y Zenga, M., eds.) Springer Verlag, 171-182.

CASTILLO, E.; HADI, A.S. y SARABIA, J.M. (1998). "A method for estimating Lorenz curves". *Communications in Statistics. Theory and Methods,* 27, 2037-2063.

COWELL, F.A. (1995). *Measuring inequality.* 2ª ed. LSE Handbooks in Economics. Prentice Hall/Harvester Wheatsheaf.

DAGUM, C. (2001). "Desigualdad del rédito y bienestar social, descomposición, distancia direccional y distancia métrica entre distribuciones". *Estudios de Economía Aplicada,* 17, 5-52.

DAGUM, C. y ZENGA, M., eds. (1990). *Income and Wealth Distribution, Inequality and Poverty.* Springer Verlag.

DALTON, H. (1920). "The measurement of the inequality of incomes". *Economic Journal,* 30, 348-361.

DAVIES, J. y HOY, M. (1994). "The normative significance of using third-degree stochastic dominance in comparing income distributions". *Journal of Economic Theory,* 64, 520-530.

DOMÍNGUEZ, J. y NÚÑEZ, J.J. (2005). "The evolution of economic inequality in the EU countries during the nineties". *First Meeting of the Society for the Study of Economic Inequality (ECINEQ).* Palma de Mallorca. [http://www.ecineq.org].

DOMÍNGUEZ, J.; NÚÑEZ, J.J. y RIVERA, L.F. (2002) "Una perspectiva dinámica del análisis de la desigualdad en España, a través de escalas de equivalencia". *Actas de la XVI Reunión Anual de ASEPELT-España*. Publicación en CD-ROM. Ed. McGraw-Hill, Madrid.

DOMÍNGUEZ, J.; NÚÑEZ, J.J. y RIVERA, L.F. (2004). "A longitudinal synthetic indicator of inequality. The case of EU countries". *XXIX Simposio de Análisis Económico.* Pamplona. [http://www.webmeets.com/files/papers/SAE/2004].

DOMÍNGUEZ, J.; NÚÑEZ, J.J. y RIVERA, L.F. (2005). "Tendencias de los niveles de vida en los países de la UE en la década de los 90". *VII Reunión de Economía Mundial.* Madrid. [http://www.ucm.es /info/sieterem].

FLEURBAEY, M. y MICHEL, P. (2001). "Transfer Principles and inequality aversion, with an application to optimal growth". *Mathematical Social Sciences,* 42, 1-11.

FLURY, B. (1984). "Common principal components in k groups". *Journal of the American Statistical Association,* 79, 388, 892-898.

FOSTER, J.E. (1985). "Inequality measurement". Publicado en *Fair Allocation* (H.P. Young, ed.), Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol.33, Providence, American Mathematical Society, 31-68.

GARCÍA, C.; NÚÑEZ, J.J.; RIVERA, L.F. y ZAMORA, A.I. (2002). "Análisis comparativo de la desigualdad a partir de una batería de indicadores. El caso de las Comunidades Autónomas españolas en el periodo 1973-1991". *Estudios de Economía Aplicada,* Vol. 20, nº1, 137-154.

GASTWIRTH, J.L. (1971). "A general definition of the Lorenz curve". *Econometrica,* 39, 1037-1039.

GINI, C. (1912). "Variabilitá e Mutabilitá: Contributo allo studio delle distribuzioni e relazioni statistiche". *Studi Economico-Giuridici dell'Universitá di Cagliari,* 3, 1-158.

GINI, C. (1921). "Measurement of inequality of incomes". *The Economic Journal,* 31, 124-126.

GUPTA, M.R. (1984). "Functional form for estimating the Lorenz curve". *Econometrica,* 52, 5, 1313-1314.

HARDY, G.H.; LITTLEWOOD, J.E. y POLYA, G. (1929). "Some simple inequalities satisfied by convex functions". *The Messenger of Mathematics,* 26, 145-153.

HARDY, G.H.; LITTLEWOOD, J.E. y POLYA, G. (1952). *Inequalities.* 2ª ed. Cambridge University Press.

HOUGHTON, J.C. (1978). "Birth of a parent: the Wakeby distribution for modelling flood blows". *Water Resources Research,* 14, 1105-1109.

IRITANI, J. y KUGA, K. (1983). "Duality between the Lorenz curves and the income distribution functions". *Economic Studies Quarterly,* 23, 9-21.

KAKWANI, N.C. (1980). *Income Inequality and Poverty. Methods of Estimation and Policy Applications.* Oxford University Press.

KAKWANI, N.C. y PODDER, N. (1973). "On the estimation of Lorenz curves from grouped observations". *International Economic Review,* 14, 2, 278-291.

KARAMATA, J. (1932). "Sur une inégalité rélative aux fonctions convexes". *Publ. Math. Univ. Belgrade,* 1, 145-148.

KENDALL, M. y STUART, A. (1977). *The Advanced Theory of Statistics,* Vol. 1, 4ª ed. C. Griffin. London.

KOLM, S.-Ch. (1976a). "Unequal inequalities I". *Journal of Economic Theory,* 12, 416-442.

KOLM, S.-Ch. (1976b). "Unequal inequalities II". *Journal of Economic Theory,* 13, 82-111.

KRZANOWSKI, W.J. (1979). "Between-groups comparison of principal components". *Journal of the American Statistical Association*, 74, 703-707. Correction note (1981), *Journal of the American Statistical Association*, 76, 1022.

KUZNETS, S. (1953). *Share of upper income groups in income and savings.* National Bureau of Economic Research. New York.

LORENZ, M.O. (1905). "Methods of measuring the concentration of wealth". *Journal of the American Statistical Association*, 9, 209-219.

MARSHALL, A.W. y OLKIN, I. (1979). *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications.* Academic Press. New York.

MEHRAN (1976). "Linear measures of income inequality". *Econometrica,* 44, 805-809.

MOYES, P. (1987). "A new concept of Lorenz domination". *Economics Letters,* 23, 203-207.

MUIRHEAD, R.F. (1903). "Some methods applicable to identities and inequalities of symmetric algebraic functions of n letters". *Proceedings of Edinburgh Mathematical Society,* 21, 144-157.

MULIERE, P. y SCARSINI, M. (1989). "A note on stochastic dominance and inequality measures". *Journal of Economic Theory,* 49, 314-323.

NYGARD, F. y SANDSTROM, A. (1981). *Measuring Income Inequality*. Amqvist & Wiksell International. Stockholm.

OSTROWSKI, A.M. (1952). "Sur quelques applications des fonctions convexes et concaves au sens de I. Schur". *Journal of Math. Pures Appl.,* 9, 253-292.

PARETO, V. (1897). *Cours d'Economie Politique.* Rouge. Lausanne.

PENA, J.B. (1977). *Problemas de la medición del bienestar y conceptos afines*. INE. Madrid.

PENA, J.B. (Dir.); CALLEALTA, F.J.; CASAS, J.M.; MEREDIZ, A. y NÚÑEZ, J.J. (1996). *Distribución Personal de la Renta en España.* Pirámide. Madrid.

PEÑA, D. (2002) *Análisis de datos multivariantes.* McGraw-Hill. Madrid.

PERACCHI, F. (2002) "The European Community Household Panel: A Review". *Empirical Economics*, 27, 63-90.

PIETRA, G. (1914-15). "Delle relazioni tra gli indici di variabilitá". Nota I en *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti,* LXXIV, Parte II, 775-804.

PIETRA, G. (1948). *Studi di statistica metodologica.* Giuffre. Milan.

PIGOU, A. C. (1912). *Wealth and welfare.* McMillan. New York.

RAMOS, H. y SORDO, M.A. (2001). "El orden de Lorenz generalizado de orden j, ¿un orden en desigualdad?". *Estudios de Economía Aplicada,* 19, 139-149.

RAMOS, H. y SORDO, M.A. (2003). "Dispersion measures and dispersive orderings". *Statistics and Probability Letters,* 61, 123-131.

RAWLS, J. (1972). *A theory of justice.* Oxford University Press. London.

RENCHER, A.C. (1995). *Methods of Multivariate Analysis.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York.

RUIZ-CASTILLO, J. (1986). "Problemas conceptuales en la medición de la desigualdad". *Hacienda Pública Española*, 101, 17-31.

RUIZ-CASTILLO, J. (1987). *La medición de la pobreza y de la desigualdad en España, 1980-81.* Estudios Económicos, nº42. Servicio de Estudios del Banco de España. Madrid.

SARABIA, J.M.; CASTILLO, E. y SLOTTJE, D. (1999). "An ordered family of Lorenz curves". *Journal of Econometrics,* 91, 43-60.

SARABIA, J.M.; CASTILLO, E. y SLOTTJE, D. (2002). "Lorenz ordering between McDonald's generalized functions of the income size distribution". *Economics Letters,* 75, 265-270.

SCHUR, I. (1923). "Uber eine klasse von mittelbildungen mit anwendungen die determinaten". *Theorie Sitzungsber Berlin Math. Gesellschaft,* 22, 9-20.

SCHUTZ, R.R. (1951). "On the measurement of income inequality". *American Economic Review*, 41, 107-122.

SEN, A. (1973). *On Economic Inequality.* Clarendon Press, Paperbacks. Oxford.

SEN, A. y FOSTER, J.E. (1999). *On Economic Inequality. Expanded edition.* Clarendon Press Paperbacks. Oxford University Press.

SHORROCKS, A. (1983). "Ranking income distributions". *Economica,* 50, 3-18.

SHORROCKS, A. y FOSTER, J.E. (1987). "Transfer sensitive inequality measures". *Review of Economic Studies,* 54, 485-497.

ZUBIRI, I. (1985). "Una introducción al problema de la medición de la desigualdad". *Hacienda Pública Española,* 95, 291-317.