REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA

UNIVERSIDAD PABLO DE OLAVIDE SEVILLA

Número 2
Diciembre de 2006
ISSN: 1886-516X
D.L: SE-2927-06

REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA

Journal of Quantitative Methods for Business and Administration

Número 2. Diciembre de 2006.
ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: http://www.upo.es/RevMetCuant/

REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (2). Páginas 3–26.
Diciembre de 2006. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: http://www.upo.es/RevMetCuant/art4.pdf

Una introducción a la computación evolutiva y algunas de sus aplicaciones en Economía y Finanzas

Santana Quintero, Luis Vicente
Departamento de Computación. CINVESTAV-IPN (Grupo de Computación Evolutiva)
Correo electrónico: lvspenny@hotmail.com

Coello Coello, Carlos A.
Departamento de Computación. CINVESTAV-IPN (Grupo de Computación Evolutiva)
Correo electrónico: ccoello@cs.cinvestav.mx

RESUMEN

Este artículo pretende proporcionar un panorama general de la computación evolutiva, sus orígenes, sus paradigmas principales y algunas de sus aplicaciones en Economía y Finanzas. Se discuten, entre otras cosas, los descubrimientos científicos más importantes que originaron el denominado Neo-Darwinismo, que es la teoría en la que se basa la computación evolutiva. También se proporciona una breve cronología de acontecimientos clave que desembocaron en los tres paradigmas en uso más común dentro de la computación evolutiva moderna: los Algoritmos Genéticos, la Programación Evolutiva y las Estrategias Evolutivas. En la segunda parte del artículo se proporcionan algunas aplicaciones representativas del uso de algoritmos evolutivos en Economía y Finanzas, así como algunas de las tendencias de investigación en el Área.

Palabras clave: algoritmos evolutivos; algoritmos genéticos; programación evolutiva; estrategias evolutivas.
Clasificación JEL: C61; C63.
2000MSC: 90C59; 91E28; 68T20.

Artículo recibido el 20 de noviembre de 2006 y aceptado el 2 de diciembre de 2006.

An Introduction to Evolutionary Computation and Some of its Applications in Economics and Finance

ABSTRACT

This paper attempts to provide a general view of evolutionary computation, its origins, its main paradigms, and some of its applications in Economics and Finance. Among other topics, we discuss the most important scientific discoveries that originated the so called Neo-Darwinism, which is the theory on which evolutionary computation is based. We also provide a brief chronology of the key facts that culminated in the three paradigms in most common use within evolutionary computation today: genetic algorithms, evolutionary programming and evolution strategies. In the second part of the paper, we provide some applications that are representative of the use of evolutionary algorithms in Economics and Finance, as well as some of the research trends within this area.

Keywords: evolutionary algorithms; genetic algorithms; evolutionary programming; evolution strategies.
JEL classification: C61; C63.
2000MSC: 90C59; 91E28; 68T20.

1. Introducción

Desde los años 1930s, algunos investigadores comenzaron a ver el proceso de evolución de las especies como un proceso de aprendizaje, mediante el cual la naturaleza dota a las especies de diferentes mecanismos, buscando hacerlas más aptas para sobrevivir. Partiendo de estos preceptos no resulta entonces difícil percatarse de que pueden desarrollarse algoritmos que traten de resolver problemas de búsqueda y optimización guiados por el principio de la "supervivencia del más apto" que postulara Charles Darwin en su famosa (y controversial) teoría de la evolución de las especies. Dichos algoritmos son denominados, hoy en día, algoritmos evolutivos y su estudio conforma la computación evolutiva, que es el tema del que se ocupa este artículo.

Los algoritmos evolutivos, en sus diferentes variantes, han resultado muy exitosos en la solución de una amplia gama de problemas del mundo real. Nuestro objetivo principal es motivar el interés de los especialistas en economía y finanzas por utilizar algoritmos evolutivos. Para ello, además de describir brevemente su funcionamiento y sus ventajas principales, proporcionamos algunos ejemplos de su uso en economía y finanzas.

El resto del artículo está organizado de la siguiente forma. La sección 2 describe brevemente el Neo-Darwinismo, que es la teoría en la que se basa la computación evolutiva. En la sección 3 se proporciona una breve semblanza histórica de la computación evolutiva. Los 3 paradigmas principales que conforman la computación evolutiva se describen en la sección 4, incluyendo el algoritmo básico de cada uno y algunas de sus principales aplicaciones. En la sección 5 se describen algunas de las ventajas principales de los algoritmos evolutivos con respecto a otras técnicas de búsqueda y optimización. En la sección 6 se abordan algunos ejemplos representativos del uso de los algoritmos evolutivos en la economía y las finanzas. Finalmente, nuestras conclusiones se presentan en la sección 7.

2. Neo-Darwinismo

La teoría evolutiva propuesta originalmente por Charles Darwin en combinación con el seleccionismo de August Weismann y la genética de Gregor Mendel, se conoce hoy en día como el paradigma Neo-Darwiniano. El Neo-Darwinismo establece que la historia de la vasta mayoría de la vida en nuestro planeta puede ser explicada a través de una serie de procesos estadísticos que actúan sobre y dentro de las poblaciones y especies [40]: la reproducción, la mutación, la competencia y la selección.

La reproducción es una propiedad obvia de todas las formas de vida de nuestro planeta, pues de no contar con un mecanismo de este tipo, la vida misma no tendría forma de producirse. En cualquier sistema que se reproduce a sí mismo continuamente y que está en constante equilibrio, la mutación está garantizada [27]. El contar con una cantidad finita de espacio para albergar la vida en la Tierra garantiza la existencia de la competencia. La selección se vuelve la consecuencia natural del exceso de organismos que han llenado el espacio de recursos disponibles. La evolución es, por lo tanto, el resultado de estos procesos estocásticos (es decir, probabilísticos) fundamentales que interactúan entre sí en las poblaciones, generación tras generación.

3. Una breve historia de la Computación Evolutiva

La evolución natural fue vista como un proceso de aprendizaje desde los 1930s. Walter D. Cannon, por ejemplo, plantea en su libro *The Wisdom of the Body* [19] que el proceso evolutivo es algo similar al aprendizaje por ensayo y error que suele manifestarse en los humanos. El célebre matemático inglés Alan Mathison Turing reconoció también una conexión "obvia" entre la evolución y el aprendizaje de máquina en su artículo (considerado hoy clásico en Inteligencia Artificial) titulado "*Computing Machinery and Intelligence*" [65].

A fines de los 1950s y principios de los 1960s, el biólogo Alexander S. Fraser [31, 32, 33] publicó una serie de trabajos sobre la evolución de sistemas biológicos en una computadora digital, dando la inspiración para lo que se convertiría más tarde en el algoritmo genético [41]. El trabajo de Fraser incluye, entre otras cosas, el uso de una representación binaria, de un operador de cruce probabilístico, de una población de padres que generaban una nueva población de hijos tras recombinarse y el empleo de un mecanismo de selección. Además, Fraser estudió el efecto de la epístasis[1], la segregación[2], los porcentajes de cruce y varios otros mecanismos biológicos que hoy son de sumo interés para la comunidad de computación evolutiva. Su trabajo de más de 10 años en este tema se resume en un libro titulado *Computer Models in Genetics* [34]. De tal forma, puede decirse que el trabajo de Fraser anticipó la propuesta del algoritmo genético simple de John Holland y la de la estrategia evolutiva de dos miembros de Hans-Paul Schwefel [26]. Fraser además llegó a utilizar el término "aprendizaje" para referirse al proceso evolutivo efectuado en sus simulaciones, y anticipó el operador de inversión, la definición de una función de aptitud y el análisis estadístico de la convergencia del proceso de selección [30].

A lo largo del siglo XX, diversos investigadores desarrollaron algoritmos inspirados en la evolución natural para resolver diferentes tipos de problemas. Por ejemplo, R. M. Friedberg [24,35,39] fue pionero en la tarea de evolucionar programas de computadora. El trabajo de Friedberg consistió en generar un conjunto de instrucciones en lenguaje máquina que pudiesen efectuar ciertos cálculos sencillos (por ejemplo, sumar dos números) [26]. Fogel [26] considera que Friedberg fue el primero en enunciar de manera informal los conceptos de *paralelismo implícito*[3] y *esquemas*[4], que popularizara Holland en los 1970s [41].

[1] En biología se dice que un gen es "epistático" cuando su presencia suprime el efecto de un gen que se encuentra en otra posición.

[2] Cuando se forman los gametos y tenemos más de un par de cromosomas en el genotipo, entonces, para fines de la reproducción sexual, es necesario elegir uno de los cromosomas existentes. A este proceso se le llama *segregación.*

[3] El paralelismo implícito que demostrara Holland para los Algoritmos Genéticos se refiere al hecho de que mientras el algoritmo calcula las aptitudes de los individuos de una población, estima de forma implícita las aptitudes promedio de un número mucho más alto de cadenas cromosómicas a través del cálculo de las aptitudes promedio observadas en los "bloques constructores" que se detectan en la población.

[4] Un esquema es un patrón de valores de los genes de un cromosoma.

Friedberg [35] utilizó un algoritmo de asignación de crédito para dividir la influencia de diferentes instrucciones individuales en un programa. Este procedimiento fue comparado con una búsqueda puramente aleatoria, y en algunos casos fue superado por ésta. Tras ciertas modificaciones al procedimiento, Friedberg fue capaz de superar a una búsqueda totalmente aleatoria, pero no pudo resolver satisfactoriamente el problema de "estancamiento" (*stagnation*, en inglés) de la población que se le presentó y por ello fue cruelmente criticado por investigadores de la talla de Marvin Minsky, quien en un artículo de 1961 [51] indicó que el trabajo de Friedberg era "una falla total". Minsky atribuyó el fracaso del método de Friedberg a lo que él denominó el "fenómeno de mesa" [52], según el cual el estancamiento de la población se debía al hecho de que sólo una instrucción del programa era modificada a la vez, y eso no permitía explorar una porción significativa del espacio de búsqueda. Aunque estas observaciones no son del todo precisas [26], el problema del estancamiento siguió siendo el principal inconveniente del procedimiento de Friedberg, aunque Fogel [26] considera que su trabajo precedió el uso de los sistemas de clasificadores que popularizara varios años después John Holland [41].

George J. Friedman [37] fue tal vez el primero en proponer una aplicación de técnicas evolutivas a la robótica: su tesis de maestría propuso evolucionar una serie de circuitos de control similares a lo que hoy conocemos como redes neuronales, usando lo que él denominaba "retroalimentación selectiva", en un proceso análogo a la selección natural. Muchos consideran a este trabajo como el origen mismo de la denominada "robótica evolutiva", que es una disciplina en la que se intentan aplicar técnicas evolutivas a diferentes aspectos de la robótica (planeación de movimientos, control, navegación, etc.). Desgraciadamente, las ideas de Friedman nunca se llevaron a la práctica, pero aparentemente fueron redescubiertas por algunos investigadores varios años después [26].

Los circuitos de control que utilizara Friedman en su trabajo modelaban a las neuronas humanas, y eran capaces de ser excitadas o inhibidas. Además, era posible agrupar estos circuitos simples (o neuronas) para formar circuitos más complejos. Lo interesante es que Friedman propuso un mecanismo para construir, probar y evaluar estos circuitos de forma automática, utilizando mutaciones aleatorias y un proceso de selección. Este es probablemente el primer trabajo en torno a lo que hoy se denomina "hardware evolutivo".

Friedman [36] también especuló que la simulación del proceso de reproducción sexual (o cruza) y el de mutación nos conduciría al diseño de "máquinas pensantes", remarcando específicamente que podrían diseñarse programas para jugar al ajedrez con este método.

Hans Joachim Bremermann [14] fue tal vez el primero en ver a la evolución como un proceso de optimización, además de realizar una de las primeras simulaciones de la evolución usando cadenas binarias que se procesaban por medio de reproducción (sexual o asexual), selección y mutación, en lo que sería otro claro predecesor del algoritmo genético. Bremermann [16] y Bremermann y Rogson [17] utilizaron una técnica evolutiva para problemas de optimización con restricciones lineales. La idea principal de su propuesta era usar un individuo factible el cual se modificaba a través de un operador de mutación hacia un conjunto de direcciones posibles de movimiento. Al extender esta técnica a problemas más complejos, Bremermann y Rogson utilizaron además operadores de recombinación especializados [18]. Bremermann fue uno de los primeros en utilizar el concepto de "población" en la simulación de procesos evolutivos, además de intuir la importancia de la co-evolución [14] (es decir, el uso de dos poblaciones que evolucionan en paralelo y cuyas aptitudes están relacionadas entre sí) y visualizar el potencial de las técnicas evolutivas para entrenar redes neuronales [15].

Otros investigadores hicieron también importantes contribuciones para forjar lo que hoy se conoce como "computación evolutiva", aunque en aras de la brevedad, no hablaremos sobre ellos en este artículo (los interesados, favor de consultar a Fogel en sus trabajos de 1995 [27], de 1998 [26] y a Ray en su trabajo de 1992 [56]).

4. Principales paradigmas de la Computación Evolutiva

El término "computación evolutiva" o "algoritmos evolutivos" engloba una serie de técnicas inspiradas en los principios de la teoría Neo-Darwiniana de la evolución natural. En términos generales, para simular el proceso evolutivo en una computadora se requiere:

- Codificar las estructuras que se replicarán (o sea, una estructura de datos que se utilice para almacenar a un "individuo").
- Operaciones que afecten a los "individuos" (típicamente, se usa cruce y mutación).
- Una función de aptitud que nos indique qué tan buena es una solución con respecto a las demás.
- Un mecanismo de selección que implemente el principio de "supervivencia del más apto" de la teoría de Darwin.

Aunque hoy en día es cada vez más difícil distinguir las diferencias entre los distintos tipos de algoritmos evolutivos existentes, por razones sobre todo históricas, suele hablarse de tres paradigmas principales:

- Programación Evolutiva
- Estrategias Evolutivas
- Algoritmos Genéticos

Cada uno de estos paradigmas se originó de manera independiente y con motivaciones muy distintas, por lo que procederemos a describir brevemente a cada uno de ellos de forma totalmente independiente.

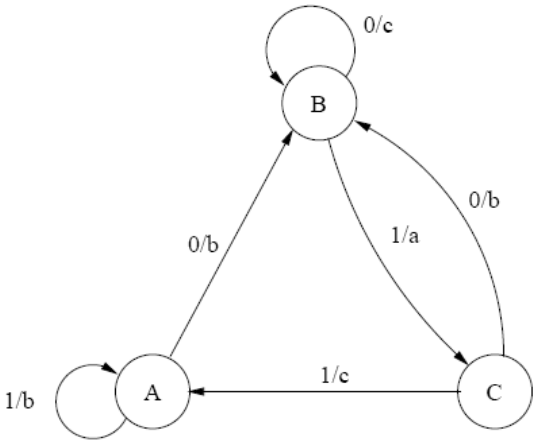


Figura 1: Autómata finito de 3 estados. Los símbolos a la izquierda de "/" son de entrada y los de la derecha son de salida. El estado inicial es C.

4.1. Programación Evolutiva

Lawrence J. Fogel propuso en los 1960s una técnica denominada "Programación Evolutiva", en la cual la inteligencia se ve como un comportamiento adaptativo [29]. La Programación Evolutiva enfatiza los nexos de comportamiento entre padres e hijos, en vez de buscar emular operadores genéticos específicos (como en el caso de los Algoritmos Genéticos).

El algoritmo básico de la Programación Evolutiva es el siguiente:

- Generar aleatoriamente una población inicial.
- Se aplica mutación.
- Se calcula la aptitud de cada hijo y se usa un proceso de selección mediante torneo (normalmente estocástico) para determinar cuáles serán las soluciones que se retendrán.

La Programación Evolutiva es una abstracción de la evolución al nivel de las especies, por lo que no se requiere el uso de un operador de recombinación (diferentes especies no se pueden cruzar entre sí). Asimismo, usa selección probabilística. Resulta un tanto más fácil entender la Programación Evolutiva analizando un ejemplo como el que se muestra en la figura 1. La tabla de transiciones de este autómata es la siguiente:

Estado Actual	**C**	**B**	**C**	**A**	**A**	**B**
Símbolo de Entrada	0	1	1	1	0	0
Estado Siguiente	B	C	A	A	B	B
Símbolo de Salida	b	a	c	b	b	c

En este autómata pueden ahora aplicarse cinco diferentes tipos de mutaciones: cambiar un símbolo de salida, cambiar una transición, agregar un estado, borrar un estado y cambiar el estado inicial. El objetivo es hacer que el autómata reconozca un cierto conjunto de entradas (o sea, una cierta expresión regular) sin equivocarse ni una sola vez.

Algunas aplicaciones de la Programación Evolutiva son [27]:

- Predicción
- Generalización
- Juegos
- Control automático
- Problema del viajero
- Planeación de rutas
- Diseño y entrenamiento de redes neuronales
- Reconocimiento de patrones

4.2. Estrategias Evolutivas

Las Estrategias Evolutivas fueron desarrolladas en 1964 en Alemania para resolver problemas hidrodinámicos de alto grado de complejidad por un grupo de estudiantes de ingeniería encabezado por Ingo Rechenberg [9].

La versión original (1+1)-EE usaba un solo padre y con él se generaba un solo hijo. Este hijo se mantenía si era mejor que el padre, o de lo contrario se eliminaba (a este tipo de selección se le llama *extintiva*, porque los peores individuos tienen una probabilidad cero de ser seleccionados).

En la (1+1)-EE, un individuo nuevo es generado usando:

$$\bar{x}^{t+1} = \bar{x}^{t} + N(0, \bar{\sigma})$$

donde *t* se refiere a la *generación* (o iteración) en la que nos encontramos, y N(0,σ) es un vector de números Gaussianos independientes con una media cero y desviación estándar σ.

Rechenberg [57] introdujo el concepto de población, al proponer una estrategia evolutiva llamada (λ +1)-EE, en la cual hay λ padres y se genera un solo hijo, el cual puede reemplazar al peor padre de la población (selección extintiva).

Schwefel [60, 61] introdujo el uso de múltiples hijos en las denominadas (μ+λ)-EEs y (μ,λ)-EEs. La notación se refiere al mecanismo de selección utilizado:

- En el primer caso, los μ mejores individuos obtenidos de la unión de padres e hijos sobreviven.
- En el segundo caso, sólo los μ mejores hijos de la siguiente generación sobreviven.

Rechenberg [57] formuló una regla para ajustar la desviación estándar de forma determinista durante el proceso evolutivo de tal manera que el procedimiento convergiera hacia el óptimo. Esta se conoce como la “regla del éxito 1/5”, que indica que:

"La razón entre mutaciones exitosas y el total de mutaciones debe ser 1/5. Si es mayor, entonces debe incrementarse la desviación estándar. Si es menor, entonces debe decrementarse".

Formalmente:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma(t-n)/c & si\ p_s > 1/5 \\ \sigma(t-n)*c & si\ p_s < 1/5 \\ \sigma(t-n) & si\ p_s = 1/5 \end{cases}$$

donde n es el número de dimensiones, t es la generación, p_s es la frecuencia relativa de mutaciones exitosas medida sobre intervalos de por ejemplo *10n* individuos, y *c =0.817* (este valor fue derivado teóricamente por Schwefel [60]). σ(t) se ajusta cada *n* mutaciones.

Los operadores de recombinación de las Estrategias Evolutivas pueden ser:

- **Sexuales**: el operador actúa sobre 2 individuos elegidos aleatoriamente de la población de padres.
- **Panmíticos**: se elige un solo padre al azar, y se mantiene fijo mientras se elige al azar un segundo padre (de entre toda la población) para cada componente de sus vectores.

Algunas aplicaciones de las Estrategias Evolutivas son [60]:

- Problemas de rutas y redes
- Bioquímica
- Óptica
- Diseño en ingeniería
- Magnetismo

4.3. Algoritmos Genéticos

Los Algoritmos Genéticos (denominados originalmente "planes reproductivos genéticos") fueron desarrollados por John H. Holland a principios de los 1960s [42, 43], motivado por su interés en resolver problemas de aprendizaje de máquina.

El algoritmo genético enfatiza la importancia de la cruza sexual (operador principal) sobre el de la mutación (operador secundario) y usa selección probabilística. El algoritmo básico es el siguiente:

- Generar (aleatoriamente) una población inicial.
- Calcular la aptitud de cada individuo.
- Seleccionar (probabilísticamente) con base a la aptitud.
- Aplicar operadores genéticos (cruza y mutación) para generar la siguiente población.
- Ciclar hasta que cierta condición se satisfaga.

La representación tradicional es la binaria, tal y como se ejemplifica en la figura 2. A la cadena binaria se le llama “cromosoma”. Al bloque de bits que codifica una sola variable del problema se le denomina “gen” y al valor dentro de cada posición cromosómica se le llama “alelo”.

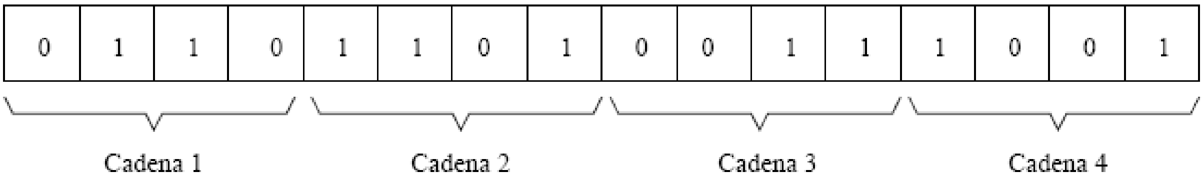


Figura 2: Ejemplo de la codificación (mediante cadenas binarias) usada tradicionalmente con los Algoritmos Genéticos.

Para poder aplicar el algoritmo genético se requiere de los 5 componentes básicos siguientes:

- Una representación de las soluciones potenciales del problema.
- Una forma de crear una población inicial de posibles soluciones (normalmente un proceso aleatorio).
- Una función de evaluación que clasifique las soluciones en términos de su “aptitud”.
- Operadores genéticos que alteren la composición de los hijos que se producirán para las siguientes generaciones (normalmente cruce sexual y mutación).
- Valores para los diferentes parámetros que utiliza el algoritmo genético (tamaño de la población, probabilidad de cruza, probabilidad de mutación, número máximo de generaciones, etc.)

Bajo representación binaria, suelen usarse 3 tipos principales de cruce: de un punto (ver figura 3), de dos puntos (ver figura 4) y uniforme (ver figura 5).

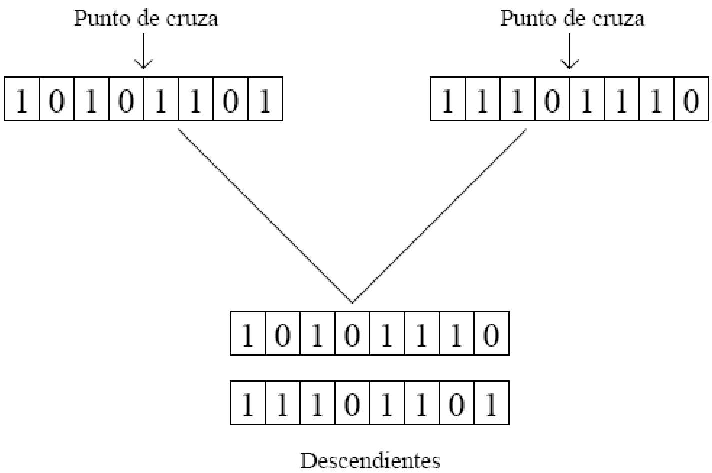


Figura 3: Cruce de un punto.

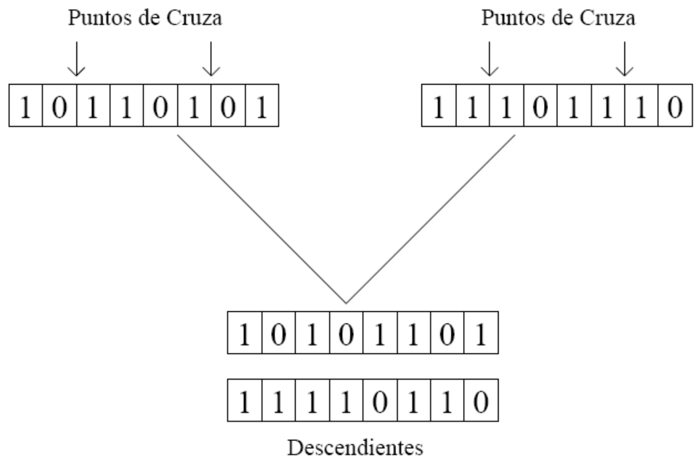


Figura 4: Cruce de dos puntos.

En la Figura 5 se observa la cruza uniforma con una probabilidad de 50%. Nótese que la mitad de los bits del Hijo 1 se tomaron del Padre 1 y la otra mitad, del Padre 2. El Hijo 2 obtiene sus bits de manera opuesta a como las obtiene el Hijo 1.

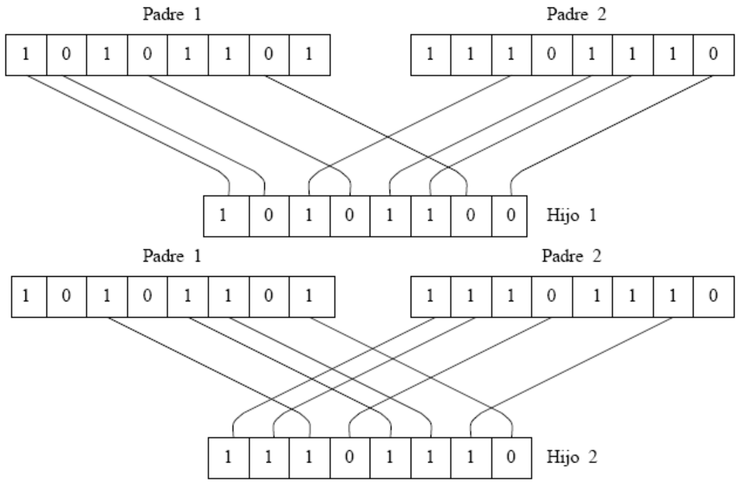


Figura 5: Cruce uniforme.

Algunas aplicaciones de los Algoritmos Genéticos son las siguientes [39]:

- Optimización (estructural, de topologías, numérica, combinatoria, etc.)
- Aprendizaje de máquina (sistemas clasificadores)
- Bases de datos (optimización de consultas)
- Reconocimiento de patrones (por ejemplo, imágenes o letras)
- Generación de gramáticas (regulares, libres de contexto, etc.)
- Planeación de movimientos de robots
- Predicción

5. Ventajas de las técnicas evolutivas

Es importante destacar las diversas ventajas que presenta el uso de técnicas evolutivas para resolver problemas de búsqueda y optimización [39, 27]:

- Simplicidad Conceptual.
- Amplia aplicabilidad.
- Superiores a las técnicas tradicionales en muchos problemas del mundo real.
- Tienen el potencial para incorporar conocimiento sobre el dominio y para hibridarse con otras técnicas de búsqueda/optimización.
- Pueden explotar fácilmente las arquitecturas en paralelo.
- Son robustas a los cambios dinámicos.

Para finalizar, es importante mencionar que la computación evolutiva, como disciplina de estudio, ha atraído la atención de un número cada vez mayor de investigadores de todo el mundo. Esta popularidad se debe, en gran medida, al enorme éxito que han tenido los algoritmos evolutivos en la solución de problemas del mundo real de gran complejidad. De tal forma, es de esperarse que en los años siguientes el uso de este tipo de técnicas prolifere aún más. Nótese, sin embargo, que es importante tener en mente que los algoritmos evolutivos son técnicas heurísticas. Por tanto, no garantizan que convergerán al óptimo de un problema dado, aunque en la práctica suelen aproximar razonablemente bien el óptimo de un problema en un tiempo promedio considerablemente menor que los algoritmos deterministas. Esta distinción es importante, pues el papel de las técnicas heurísticas es el de servir normalmente como último recurso para resolver un problema en el que los algoritmos convencionales (típicamente deterministas) no funcionan o tienen un costo computacional prohibitivo. Esto implica que antes de decidir recurrir a los algoritmos evolutivos, debe analizarse la factibilidad de utilizar otro tipo de técnicas. Este paso, que pudiese parecer obvio para muchos, en la práctica suele omitirse en muchos casos y de ahí que exista bastante escepticismo por parte de aquellos que acostumbran a trabajar únicamente con algoritmos deterministas. El uso apropiado y pertinente de los algoritmos evolutivos será sin duda la base de su futuro como alternativa para la solución de problemas complejos y de ahí que se enfatice su importancia.

6. Aplicaciones de la Computación Evolutiva en Economía y Finanzas

Aunque la computación evolutiva ha sido estudiada desde hace unos 40 años, su aplicación en el área de la Economía y las Finanzas es muy reciente, pues fue apenas en el año 1987 en el que comenzaron los primeros trabajos orientados a la Teoría de Juegos [8], para después crecer y extenderse al área de modelado macroeconómico [6, 48] y más recientemente en la ingeniería financiera [1, 10, 11]. A continuación se mencionan brevemente cada una de estas áreas y se discutirán los trabajos más importantes que se han desarrollado en cada una de ellas utilizando algoritmos evolutivos.

6.1. Teoría de Juegos

La primera aplicación de los Algoritmos Genéticos a las Ciencias Sociales fue un trabajo de Axelrod en el área de Teoría de Juegos que data de 1984 [7, 8]. Axelrod usó un Algoritmo Genético (AG) [39] para estudiar el Problema del Prisionero cuando se juega en repetidas ocasiones. Axelrod realizó un torneo entre diferentes computadoras, cada una de las cuales jugaba al Problema del Prisionero durante un número “n” de veces y en cada juego intenta jugar con la mejor estrategia para mejorar su ganancia. Se realizaban comparaciones de los resultados obtenidos por dos computadoras (jugadores), y con base en los resultados obtenidos se modificaba la estrategia para declararse culpable o inocente con cierta probabilidad, esto es, permitía que la estrategia fuese “evolucionando” con base en los resultados obtenidos. Su objetivo era encontrar una estrategia para los jugadores más robusta que la mejor conocida en aquel entonces para el Problema del Prisionero. Axelrod era un experto en Ciencias Políticas, pero estaba influenciado por el biólogo William Hamilton, quien utilizaba un modelo de competencia muy parecido a la selección natural (en la que se observa que una especie compite con otras en un nicho ecológico). John Miller, en su tesis doctoral de 1988 [50] (de la Universidad de Michigan), modeló también a un conjunto de jugadores como individuos en un algoritmo genético, los cuales respondían a estímulos de eventos externos. Este fue el inicio de la denominada “Escuela Michigan”, que iniciara y liderara por varios años John H. Holland. El trabajo pionero que realizara John Holland en los años 1960s y que luego continuara David Goldberg en los 1980s, tuvo una profunda influencia en diversas áreas del conocimiento, y la Economía no fue la excepción.

Otro trabajo pionero interesante ha sido el de Thomas Riechmann [58], que se ha enfocado a demostrar que la Teoría de Juegos puede arrojar luz sobre los fundamentos de los AGs. Motivado por el éxito que han tenido los AGs en la solución de problemas en Economía, Reichman se interesó en saber si habían ciertas propiedades en los AGs que fuesen las responsables de su éxito. Durante varios años, los teóricos de la computación evolutiva han usado cadenas de Markov para modelar el comportamiento de un algoritmo genético y para estudiar aspectos tales como su convergencia [23, 59]. El enfoque de Reichman, sin embargo, consiste en interpretar un AG como un juego de N-personas repetitivo. De tal forma, Riechmann [58] utiliza la estructura básica del algoritmo genético como modelo de aprendizaje en el que utiliza una población como algo más que una distribución de economías o un comportamiento en las estrategias a seguir por diferentes jugadores (o agentes). Así entonces, un agente económico intenta resolver un problema el cual utiliza una función que lidia directamente con el concepto del equilibrio de Nash. Una estrategia de Nash está definida como la mejor estrategia que pueden seguir los jugadores (o agentes); y es lo que todo agente económico busca encontrar al resolver cualquier problema, es decir, encontrar un equilibrio en el que se sienta satisfecho o ha encontrado la ganancia máxima del problema. Por tanto, Riechmann usa un algoritmo genético para modelar un sistema completo de agentes económicos, cada uno intentando llegar a un equilibrio de Nash. En términos económicos, esto significa que cada agente intenta coordinar una estrategia con los demás agentes, y la mejor forma de hacer esto es maximizando su beneficio (o utilidad o ganancia o todo lo que el modelo quiere que el agente maximice). Por tanto, una población de individuos genéticos se interpreta como una población de agentes, en la que cada una está tratando de jugar una estrategia diferente, y los individuos más aptos son aquellos que obtienen un mayor beneficio.

Otro juego que se ha utilizado con algoritmos evolutivos, es el juego del ultimátum. Este problema ha sido un tema muy utilizado por economistas. En los últimos 20 años, varios laboratorios han experimentado con comportamientos humanos y éstos han conducido a la similitud de esos comportamientos con este juego. Este juego es interesante porque muestra la importancia de la imparcialidad, percibida subjetivamente por los jugadores y formando endógenos por medio de la interacción en sus estrategias en el trato final. John Duffy y Engle-Warnick [24] utilizan la Programación Matemática en vez de los análisis estadísticos comúnmente adoptados para inferir de datos experimentales las reglas de decisión que entes humanos podrían aplicar. Marimon [49] utiliza la regresión lineal para calcular las variables que cada humano puede usar para formar sus expectativas de ganancia.

La aplicación de Duffy y Feltovich [25] utiliza la programación genética para resolver el problema del juego del ultimátum, donde unos sujetos juegan el mismo juego durante 40 periodos. En el juego del ultimátum, dos jugadores, A y B, son denominados el proponente y el replicador, respectivamente, y éstos deben decidir cómo dividir un lote de $10. El proponente propone una división del lote y el jugador B puede aceptar o rechazar la oferta o propuesta. Si se acepta, entonces cada quien se lleva la parte acordada del lote y si la oferta es rechazada, entonces ninguno se lleva nada del lote.

6.2. Uso de agentes artificiales para la Bolsa de Valores

En esta área es donde más trabajos se han publicado en los últimos años y donde se muestra el mayor potencial para el uso de los algoritmos evolutivos. En 1988, cuando John Holland y Brian Arthur establecieron el programa de Economía en el Instituto Santa Fe, el problema de simulación de mercados o mercados artificiales se escogió como el punto de partida para este proyecto de investigación.

Yang [66] siguiendo el trabajo de Chan [20] utilizó una Red Neuronal para un problema de doble subasta en el que desarrolló una estrategia que los agentes o jugadores deben seguir para maximizar las ganancias en un mercado artificial. Este mercado artificial lo modeló con una red neuronal la cual reducía la línea existente entre los mercados simulados y los reales. El mercado simulado de Yang es capaz de tener un comportamiento parecido a un equilibrio de esperanzas homogéneas racionales (*homogeneous rational expectations equilibrium*) en el que los consumidores de un mercado simulado se comportan igual de racionales que los consumidores de un mercado real.

Shu-Heng Chen [21], propuso un software llamado AIE-ASM, el cual realiza simulaciones de acciones en bolsa basadas en algunos modelos de precios activos. Una característica distinguible de este software es que el comportamiento de los agentes es modelado utilizando la programación genética en vez de los Algoritmos Genéticos. La programación genética es realmente una variante del algoritmo genético en la cual los individuos son representados mediante árboles (o programas de computadora), en vez de usar cadenas binarias, como en los Algoritmos Genéticos. La principal motivación de este trabajo radica en la reproducibilidad de los diferentes trabajos que se hacen en cuanto al tema de modelos económicos, pues estos trabajos carecen de la información necesaria para reproducir los mismos resultados de los experimentos que cada uno reporta en sus artículos. De tal forma, este software aborda el problema de las acciones en bolsa simulando los agentes artificialmente. La programación genética se utiliza para guiar el aprendizaje dinámico de los varios comerciantes, que son los que toman las decisiones de compra y venta en una bolsa.

Jasmina Arifovic [4], fue la primer persona en obtener un doctorado con una tesis relacionada con aplicaciones de los Algoritmos Genéticos en macroeconomía. Arifovic publicó también varios artículos en el tema de intercambio de divisas [2, 3]. En estos estudios, utilizó los Algoritmos Genéticos para entrenar agentes simulados en varios modelos con dos diferentes monedas. Implementó los Algoritmos Genéticos en el método de aprendizaje y consideró varias alternativas posibles, como por ejemplo optimizar el aprendizaje y utilizar el conocimiento adquirido para realizar predicciones en este tipo de problemas de intercambio de divisas. En estos problemas se pretende optimizar las ganancias obtenidas de la toma de decisiones al elegir un portafolio de inversiones adecuado.

También existen aplicaciones en las que se utilizan los algoritmos evolutivos para abordar problemas de microeconomía como el control de la contaminación en un ambiente de simulación de problemas económicos, y el problema de encontrar el rol adecuado de las instituciones en el ámbito social; estos trabajos se describen brevemente a continuación.

Bell y Beare [12] se ocupan del problema del control de la contaminación ambiental. En esta propuesta se utiliza un algoritmo genético para emular una subasta mercantil de emisiones contaminantes. El proceso se modeló utilizando un juego evolutivo no cooperativo, en el que los agentes aprenden la mejor estrategia de apuesta (que es independiente de las demás estrategias). En particular, el valor de un "permiso" (así se le llama al agente) depende de ambos factores: precio y cantidad de emisiones contaminantes que se venden a otros participantes en el juego. Los resultados en las simulaciones muestran que un simple intercambio de emisiones resulta más efectivo cuando el número de participantes es pequeño. Cuanto más grande es el número de participantes, el desempeño disminuye. Los resultados indican que un simple impuesto es una medida más efectiva que un mecanismo de mercado para evitar una mayor contaminación en el ambiente.

Francesco Luna [47] se concentra en el problema del rol de las instituciones en un proceso de aprendizaje en agentes económicos. En este trabajo se utiliza una red neuronal para modelar el proceso de aprendizaje, y el algoritmo genético se usa para desarrollar y obtener los pesos en esta red de la mejor forma posible para optimizar el aprendizaje.

David Fogel [28] realizó un estudio sobre la representación de los agentes inteligentes que se suelen utilizar en problemas económicos. Fogel indica que existen clases de modelos que se usan para representar a los agentes inteligentes, y demostró que estos modelos afectan considerablemente el desempeño del mismo. Este estudio lo valida en dos diferentes problemas muy utilizados por los economistas como lo son "el problema del Farol" [5] y el problema del Prisionero [55]. También demuestra que el uso de diferentes ajustes en los parámetros de simulación como cambiar de una respuesta discreta a una continua, o el incluir un proceso inteligente a los agentes (jugadores) es suficiente para obtener un comportamiento muy diferente en los resultados.

6.3. Ingeniería Financiera

La primera aplicación de los algoritmos evolutivos en econometría fue desarrollada por John Koza [45]. En ella se dice que un problema importante en Economía es encontrar una relación matemática entre las variables observadas empíricamente para medirlas en un sistema. En las técnicas tradicionales de modelado, uno necesita escoger el tamaño y la forma del modelo para después encontrar los valores de algunos coeficientes necesarios para utilizar un modelo en particular y poder obtener el mejor ajuste entre los datos observados y el modelo real. Para Koza, el encontrar la forma de un modelo puede ser vista como el buscar en un espacio de búsqueda conformado por ciertos programas de computadora que produzcan una salida para ciertas entradas. Koza hizo uso de la programación genética para formular una ley fundamental en Economía llamada "la ecuación de intercambio o la teoría cuántica del dinero".

George Szpiro [63], propone el uso de Algoritmos Genéticos para buscar dependencias entre conjuntos de datos para problemas en Finanzas y Economía. Se usan los algorimos genéticos para problemas en minería de datos. Éstos se muestran idóneos para detectar e identificar relaciones ocultas en espacios multi-dimensionales que son caracterizados por la existencia de múltiples óptimos. De tal forma, se deja que los Algoritmos Genéticos descubran ecuaciones matemáticas que recrean, o al menos, imitan las fórmulas reales de generación de datos.

En [54], Robert Pereira muestra como es que la computación evolutiva resulta relevante en el estudio de las estrategias comerciales. Comienza con la revisión de dos clases básicas de reglas comerciales, llamadas reglas de moving-average (MA) y reglas de order-statistics (OS). Luego, utiliza los Algoritmos Genéticos para encontrar los parámetros óptimos que se utilizan en estas dos últimas reglas comerciales. En este trabajo, se utilizaron datos reales del mercado Australiano comprendidos del 4 de Enero de 1982 al 31 de Diciembre de 1989. Las reglas óptimas que se encontraron, se utilizaron después para evaluarlas y probar su habilidad de pronosticar el beneficio económico durante el periodo comprendido entre el 2 de Enero de 1990 al 31 de Diciembre de 1997. Los resultados indicaron que las reglas encontradas por el algoritmo genético mejoraron las estrategias seguidas por un simple mecanismo de "ajuste de riesgo".

Raymond Tsang y Paul Lajbcygier [64] ofrecen una alternativa al uso de los Algoritmos Genéticos estándar. Ellos proponen dividir el algoritmo genético en un modelo de islas, en el que la población de soluciones se divide en un número fijo de subpoblaciones, cada una evolucionando de forma independiente, pero todas resolviendo el mismo problema. Así pues, proponen el uso de un operador de migración el cual periódicamente intercambia soluciones entre las subpoblaciones. Adoptando este tipo de Algoritmos Genéticos, se pueden diferenciar las subpoblaciones con diferentes parámetros de control y la búsqueda se hace más extensa y mucho más efectiva. Las simulaciones en problemas de estrategias comerciales evidencian una superioridad de los Algoritmos Genéticos con esquemas de islas sobre los Algoritmos Genéticos tradicionales.

Existe un artículo de Nemara Chidambaran [22] en el que éste lidia con el problema de la elección de precios con Programación Genética (PG). Primero se examina cómo es que la programación genética mejora el modelo de "Black-Scholes" bajo ciertas condiciones, y después utiliza este modelo para resolver un problema con datos del mundo real. En el estudio de la simulación que se hace, muestra que las fórmulas de la programación genética obtienen mejores resultados que el modelo de Black-Scholes en los diez casos de estudio que proponen. En problemas de índices S&P, la propuesta de programación genética gana en 9 de 10 diferentes casos. El modelo de Black-Scholes pretende medir variación de los instrumentos financieros en el tiempo, puede usarse para determinar el precio de algún producto en un tiempo determinado. Este modelo es uno de los más importantes en la teoría financiera moderna. Desarrollado por Fisher Black y Myron Scholes en 1973 [13] como una de las mejores opciones para determinar precios justos.

Otra aplicación relacionada con el problema de elección de precios es en la que se involucra la *volatilidad.* Medir la volatilidad financiera es uno de los problemas más difíciles en las Finanzas económicas de la actualidad. La volatidad implica que para cierto problema de elección de precios se tiene que invertir la función de Black-Scholes, pero esto no es una tarea sencilla y se realiza con varias aproximaciones analíticas para atacar este problema como lo es el método de Newton-Raphson. Christian Keber [44] muestra que la programación genética puede usarse para derivar aproximaciones muy precisas y determinar la volatilidad en este tipo de problemas. Keber genera 1.000 soluciones aleatorias y con base en éstas deriva una expresión analítica utilizando programación genética. La aproximación obtenida se prueba en dos conjuntos de datos tomados en la literatura y en dos más generados artificialmente. Para realizar las comparaciones, se utiliza el modelo de Black-Scholes como el modelo a vencer. Los resultados muestran que las fórmulas dadas por la aproximación evolutiva resultan más precisas en los problemas con más parámetros.

6.4. Otros desarrollos actuales

La Computación Evolutiva se ha convertido en una metodología eficiente para resolver problemas financieros y económicos. Ha demostrado ser una herramienta muy poderosa en problemas que los métodos analíticos no logran resolver. Como resultado, existen varias conferencias y talleres internacionales que intentan cubrir este tópico. Algunos ejemplos son las sesiones especiales en computación evolutiva en Finanzas y Economía que se organizan en el *IEEE Congress on Evolutionary Computation* (CEC), la *Conference on Computacional Intelligence in Economics and Finance* (CIEF); y el *Workshop on Economic Heterogeneous Interacting Agents* (WEHIA).

Hasta ahora, la computación evolutiva ha sido aplicada en problemas de pronóstico financiero, estimación de parámetros econométricos, modelos macroeconómicos, elección de precios, simulación de mercados financieros y procesos sociales. Como sabemos, los problemas del mundo real involucran una alta complejidad, ambientes con ruido, imprecisiones e incertidumbre. Por esta razón, el uso de las técnicas evolutivas se vuelve necesario para problemas en diversas áreas en Finanzas y Economía.

En cuanto a publicaciones recientes sobre uso de algoritmos evolutivos en Finanzas y Economía, algunos de ellos se detallan a continuacióm:

- Streichert, Ulmer y Zell en 2004 [62] realizó un estudio comparativo de distintos tipos de cruce en un algoritmo evolutivo con representación real para resolver problemas de portafolios de inversión basados en el modelo de media-varianza de Markowitz. Este problema trata de elegir un conjunto de activos que tienen un cierto precio, y se busca maximizar las ganancias obtenidas de elegir los activos correctos.
- Asunción Mochón y co-autores en 2005 [53] hicieron un análisis del uso de la computación evolutiva en problemas de subastas. Se diseñó una simulación para examinar el comportamiento de las subastas, buscando encontrar la estrategia óptima de los apostadores para problemas dinámicos de subastas. El algoritmo propuesto se probó en varios experimentos con muchos apostadores y muchas subastas simultáneas, y los resultados indicaron que el algoritmo evolutivo es capaz de encontrar estrategias que mejoran a las estrategias canónicas que usualmente se utilizan.
- García-Almanza y Tsang en 2006 [38] presenta un método para simplificar los árboles de decisión con ayuda de la programación genética. En él se identifican y se eliminan las reglas que causan errores en la clasificación y, como consecuencia, se obtiene un árbol más eficiente para tomar decisiones en problemas de mercados financieros.
- Jin Li en 2006 [46] presenta un algoritmo que utiliza la programación genética para resolver problemas multi-objetivo para pronosticar sistemas financieros. En este caso, se resuelven problemas de pronósticos financieros en los que se hace uso de la dominancia de Pareto para encontrar varias soluciones eficientes en una misma ejecución, permitiendo al usuario tomar una decisión más completa.

7. Conclusiones

En este artículo hemos proporcionado una introducción general a la computación evolutiva, incluyendo su desarrollo histórico y una descripción breve de los tres paradigmas principales que la conforman. En la parte final del artículo se describen diversas aplicaciones de los algoritmos evolutivos en la economía y las finanzas, incluyendo varios trabajos pioneros en el área.

A lo largo del artículo, se ha buscado despertar el interés de los especialistas en economía y finanzas por el uso de los algoritmos evolutivos. La motivación principal para usar estas técnicas radica en su amplia aplicabilidad (pueden usarse para problemas de optimización no lineales de enorme complejidad) y su facilidad de uso. Las aplicaciones aquí reportadas sirven como evidencia tangible de dichas ventajas.

Finalmente, se hace notar que a pesar de existir ya diversos trabajos importantes en economía y finanzas, existen todavía muchas áreas de oportunidad para nuevos desarrollos. Por ejemplo, el uso de algoritmos evolutivos para estudiar patrones de consumo, para esquemas de asignación de crédito o para predecir tendencias de las acciones en la bolsa de valores, son sólo algunas de las muchas áreas de oportunidad que todavía existen para los interesados en trabajar en este apasionante campo.

Referencias

[1] F. Allen and F. Karajalainen, *Using Genetic Algorithms to Find Technical Trading Rules*, White Center for Financial Research, The Wharton School, 1993, pp. 20 - 93.

[2] J. Arifovic, *The Behavior of the Exchange Rate in the Genetic Algorithm and Experimental Economics.*, Journal of Political Economy, 104 (1996), pp. 510-541.

[3] J. Arifovic, *Evolutionary Dynamics of Currency Substitution*, Journal of Economic Dynamics and Control, 25 (2001), pp. 395-417.

[4] J. Arifovic, *Learning by Genetic Algorithms in Economic Environments*, University of Chicago, Chicago, 1991.

[5] W. B. Arthur, *Effective Choice in the Iterated Prisioner's Dilemma*, Journal Conflict Resolution, 24 (1994), pp. 3-25.

[6] W. B. Arthur., *On Learning and Adaptation in the Economy*, Sante FI Economics Research Program Working, 1992.

[7] R. Axelrod, *The Evolution of Cooperation*, Basic Books, New York, 1984.

[8] R. Axelrod, *The Evolution of Strategies in the Iterated Prisoner's Dilemma*, in D. L., ed., *Genetic Algorithms and Simulated Annealing*, Pittmann, London, 1987, pp. 32 - 41.

[9] T. Bäck, *Evolutionary Algorithms in Theory and Practice*, Oxford University Press, New York, 1996.

[10] R. J. Bauer, *Genetic Algorithms and Investment Strategies*, Wiley, New York, 1994.

[11] R. J. Bauer and G. E. Liepins, *Genetic Algorithms and Computerized Trading Strategies*, in D. E. O'leary and R. R. Watkins, eds., *Expert Systems in Finance*, North Holland, 1992.

[12] R. Bell and S. Beare, *Emuating Trade in Emissions Permits: An Application of Genetic Algorithms*, in S.-H. Chen, ed., *Evolutionary Computation in Economics and Finance*, Physica-Verlag, New York, 2002, pp. 159 - 174.

[13] F. Black and M. Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 81 (1973), pp. 637 - 654.

[14] H. J. Bremermann, *The evolution of intelligence. The nervous system as a model of its environment.*, University of Washington, Seattle, 1958.

[15] H. J. Bremermann, *Numerical optimization procedures derived from biological evolution processes.*, in H. L. Oestreicher and D. R. Moore, eds., *Cybernetic Problems in Bionics*, Gordon and Breach, New York, 1968, pp. 543 - 561.

[16] H. J. Bremermann, *Optimization through evolution and recombination.*, in M. C. Yovits, G. T. Jacobi and G. D. Goldstein, eds., *Self-Organizing Systems*, Spartan Books, Washington D.C., 1962, pp. 93 - 106.

[17] H. J. Bremermann and M. Rogson, *An evolution-type search method for convex sets.*, ONR, Berkeley, California, 1964.

[18] H. J. Bremermann and M. Rogson, *Global properties of evolution processes.*, in H. H. Pattee, E. A. Edlsack, L. Fein and A. B. Callahan, eds., *Natural Automata and Useful Simulations*, Spartan Books, Wasington D.C., 1966, pp. 3 - 41.

[19] W. D. Cannon, *The Wisdom of the Body*, Norton and Company, New York, 1932.

[20] N. T. Chan, B. LeBaron and A. W. Poggio, *Information Dissemination and Aggregation in Asset Markets with Simple Intelligent Traders*, AIM-1646, 1998.

[21] S.-H. Chen, C.-H. Yeh and C.-C. Liao, *On AIE-ASM: Software to Simulate Artificial Stock Markets with Genetic Programming*, in S.-H. Chen, ed., *Evolutionary Computation in Economics and Finance*, Physica-Verlag, New York, 2002, pp. 107 - 122.

[22] N. Chidambaran, J. Triqueros and C.-W. J. Lee, *Option Pricing Via Genetic Programming*, in S.-H. Chen, ed., *Evolutionary Computation in Economics and Finance*, Physica-Verlag, New York, 2002, pp. 383 - 397.

[23] H. Dawid, *Adaptive Learning by Genetic Algorithms*, Springer, Berlin, 1996.

[24] J. Duffy and J. Engle-Warnick, *Using Symbolic Regression to Infer Strategies*, in S.-H. Chen, ed., *Evolutionary Computation in Economics and Finance*, Physica-Verlag, New York, 2002, pp. 61 - 84.

[25] J. Duffy and N. Feltovich, *Observation of Others Affect Learning in Strategic Environments? An Experimental Study*, International Journal of Game Theory, 28 (1999), pp. 131-152.

[26] D. B. Fogel, *Evolutionary Computation. The Fossil Record. Selected Readings on the History of Evolutionary Algorithms.*, New York, 1998.

[27] D. B. Fogel, *Evolutionary Computation. Toward a New Philosophy of Machine Intelligence*, The Institute of Electrical and Electronic Engineers, New York, 1995.

[28] D. B. Fogel, K. Chellapilla and P. Angeline, *Evolutionary Computation and Economic Models: Sensitivity and Unintended Consequences*, in S.-H. Chen, ed., *Evolutionary Computation in Economics and Finance*, Physica-Verlag, New York, 2002, pp. 245 - 269.

[29] L. J. Fogel, A. J. Owens and M. J. Walsh, *Artificial Intelligence through Simulated Evolution.*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.

[30] A. S. Fraser, *The evolution of purposive behavior*, in H. von Foerster, J. D. White, L. J. Peterson and J. K. Russell, eds., *Purposive Systems*, Spartan Books, Washington D.C., 1968, pp. 15 - 23.

[31] A. S. Fraser, *Simulation of Genetic Systems by Automatic Digital Computers I. Introduction*, Australian Journal of Biological Sciences, 10 (1957), pp. 484 - 491.

[32] A. S. Fraser, *Simulation of Genetic Systems by Automatic Digital Computers II. Effects of Linkage on Rates of Advance Under Selection.*, Australian Journal of Biological Sciences, 10 (1957), pp. 150 - 162.

[33] A. S. Fraser, *Simulation of Genetic Systems by Automatic Digital Computers VI. Epistasis*, Australian Journal of Biological Sciences, 13 (1960), pp. 150 - 162.

[34] A. S. Fraser and D. Burnell, *Computer Models in Genetics*, Mc. Graw Hill, New York, 1970.

[35] R. M. Friedberg, *A Learning Machine: Part I*, IBM Journal of Research and Development, 2 (1958), pp. 2 - 13.

[36] G. J. Friedman, *Digital simulation of an evolutionary process*, General Systems: Yearbook of the Society for General Systems Research, 4 (1959), pp. 171 - 184.

[37] G. J. Friedman, *Selective Feedback Computers for Engineering Synthesis and Nervous System Analogy*, University of California, Los Angeles, 1956.

[38] A. L. García-Almanza and E. Tsang, *Simplifying Decision Trees Learned by Genetic Programming*, *IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC 2006)*, Vancouver, Canada, 2006, pp. 7906-7912.

[39] D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachussets, 1989.

[40] A. Hoffmann, *Arguments on Evolution: A Paleontologist's Perspective*, Oxford University Press, New York, 1989.

[41] J. H. Holland, *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, Ann Harbor: University of Michigan Press, 1975.

[42] J. H. Holland, *Concerning efficient adaptive systems*, in M. C. Yovits, G. T. Jacobi and G. D. Goldstein, eds., *Self-Organizing Systems—1962*, Spartan Books, Washington D.C., 1962, pp. 215 - 230.

[43] J. H. Holland, *Outline for a logical theory of adaptive systems*, Journal of the Association for Computing Machinery, 9 (1962), pp. 297 - 314.

[44] C. Keber, *Evolutionary Computatioin in Option Pricing: Determining Implied Volatilities Based on American Put Options*, in S.-H. Chen, ed., *Evolutionary Computation in Economics and Finance*, Physica-Verlag, New York, 2002, pp. 399 - 415.

[45] J. Koza, *A Genetic Approach to Econometric Modelling*, in P. Bourgine and B. Walliser, eds., *Economics and Cognitive Science*, Pergamon Press, 1992, pp. 57-75.

[46] J. Li, *Enhancing Financial Decision Making Using Multi-Objective Financial Genetic Programming*, *IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC 2006)*, Vancouver, Canada, 2006, pp. 7935-7942.

[47] F. Luna, *Computable Learning, Neural Networks and Institutions*, in S.-H. Chen, ed., *Evolutionary Computation in Economics and Finance*, Physica-Verlag, New York, 2002, pp. 211 - 232.

[48] R. Marimon, E. McGrattan and T. J. Sargent, *Money as a Medium of Exchange in an Economy with Artificially Intelligent Agents.*, Journal of Economic Dynamics and Control, 14 (1990), pp. 329-373.

[49] R. Marimon, S. E. Spear and S. Sunder, *Expectationally Driven Market Volatility: An Experimental Study*, Journal of Economic Theory, 61 (1993), pp. 74-103.

[50] J. H. Miller, *Two Essays on the Economics of Imperfect Information*, *University of Michigan, PhD Thesis*, 1988.

[51] M. L. Minsky, *Steps toward artificial intelligence*, Proceedings of the IRE, 49 (1961), pp. 8 - 30.

[52] M. L. Minsky and O. G. Selfridge, *Learning in random nets*, in C. Cherry, ed., *Proceedings of the 4th London Symposium on Information Theory*, London, 1961.

[53] A. Mochón, D. Quintana, Y. Sáez and P. Isasi, *Analysis of Ausubel Auctions by Means of Evolutionary Computation*, *Congress on Evolutionary Computation (CEC 2005)*, Edinburgh, Scotland, 2005, pp. 2645-2652.

[54] R. Pereira, *Forecasting Ability But No Profitability: An Empirical Evaluation of Genetic Algorithm-Optimised Technical Trading Rues*, in S.-H. Chen, ed., *Evolutionary Computation in Economics and Finance*, Physica-Verlag, New York, 2002, pp. 287 - 309.

[55] A. Rapoport, *Optimal Policies for the Prisioner's Dilemma*, Univ. North Carolina, Chapel Hill, 1966.

[56] T. S. Ray, *An approach to the synthesis of life*, in C. G. Langton, C. Taylor, J. D. Farmer and S. Rasmussen, eds., *Artificial Life II*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1992, pp. 371 - 408.

[57] I. Rechenberg, *Evolutionsstrategie: Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution*, *Frommann–Holzboog*, Stuttgart, Alemania, 1973.

[58] T. Riechmann, *Genetic Algorithm Learning and Economic Evolution*, in S.-H. Chen, ed., *Evolutionary Computation in Economics and Finance*, Physica-Verlag, Heidelberg New York, 2002, pp. 45 - 59.

[59] G. Rudolph, *Convergence Properties of Canonical Genetic Algorithms*, IEEE Transaction on Neural Netwroks, 5(1) (1994), pp. 96-101.

[60] H.-P. Schwefel, *Numerical Optimization of Computer Models*, Wiley, Chichester, UK,, 1981.

[61] H.-P. Schwefel, *Numerische Optimierung von Computer-Modellen mittels der Evolutionsstrategie*, Basel, Alemania, 1977.

[62] F. Streichert, H. Ulmer and A. Zell, *Evaluating a Hybrid Encoding and Three Crossover Operators on the Constrained Portfolio Selection Problem*, *Congress on Eolutionary Computation (CEC 2004)*, Portland, Oregon, 2004, pp. 932-939.

[63] G. G. Szpiro, *A Search for Hidden Relationships: Data Mining with Genetic Algorithms*, Computational Economics, 10 (3) (1997), pp. 267-277.

[64] R. Tsang and P. Lajbcygier, *Optimizing Technical Trading Strategies with Split Seach Genetic Algorithms*, in S.-H. Chen, ed., *Evolutionary Computation in Economics and Finance*, Physica-Verlag, New York, 2002, pp. 333 - 357.

[65] A. M. Turing, *Computing Machinery and Intelligence*, Mind, 59 (1950), pp. 94 - 101.

[66] J. Yang, *The Efficiency of an Artificial Double Auction Stock Market with Neural Learning Agents*, in S.-H. Chen, ed., *Evolutionary Computation in Economics and Finance*, physica - verlag, New York, 2002, pp. 85 - 105.

REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (2). Páginas 27–66.
Diciembre de 2006. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: http://www.upo.es/RevMetCuant/art5.pdf

Medición de la pobreza: una revisión de los principales indicadores

Domínguez Domínguez, Juana
Departamento de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.
Universidad de Alcalá de Henares
Correo electrónico: juana.dominguez@uah.es

Martín Caraballo, Ana M.
Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide
Correo electrónico: ammarcar@upo.es

RESUMEN

En este trabajo se ha realizado una revisión de la literatura existente respecto a la medición de la pobreza. Se describe la evolución histórica que ha tenido el concepto de pobreza, así como los distintos umbrales o líneas de pobreza que se utilizan en los estudios de cuantificación de la pobreza. El lector puede ver, además, los principales indicadores de pobreza que diferentes autores han construido desde principios del siglo XX hasta nuestros días con la intención de cuantificar un fenómeno tan complejo como es el que constituyen la pobreza y la desigualdad.

Palabras clave: pobreza; indicadores de pobreza; medidas de desigualdad.
Clasificación JEL: I31; I32; D63.
2000MSC: 91B82; 62P20.

Artículo recibido el 5 de diciembre de 2006 y aceptado el 13 de diciembre de 2006.

Poverty measurement: reviewing the main indicators

ABSTRACT

In this paper we carry out a revision of the literature according to the measure of poverty. We describe the historic evolution that the poverty has had. We also show the different kinds of poverty lines or thresholds that we can use to assess the very complex phenomenon of poverty. Finally, we show the poverty indicators that several authors have introduced through the beginning of the twentieth century in order to analyse poverty and inequalities.

Keywords: poverty; poverty indicatores; inequality measures.
JEL classification: I31; I32; D63.
2000MSC: 91B82; 62P20.

1. Introducción

El proceso de medición de la pobreza obliga por una parte a identificar aquellas unidades de análisis que se consideran pobres y por otra a la agregación del bienestar de tales unidades de análisis en una medida de pobreza. Así, la cuantificación de la pobreza abarca aspectos conceptuales y metodológicos muy variados que el investigador debe abordar al elegir un método de cuantificación.

El presente documento ofrece una guía sobre las distintas interpretaciones conceptuales del término "pobreza" y una revisión de las metodologías más utilizadas en los procesos de identificación y agregación.

Según indica Ravallion (2003), antes de intentar cuantificar cualquier ente, característica o situación, se debe tener muy claro el concepto que se quiere medir, por tanto es necesario elegir el concepto de pobreza a utilizar y, con ello, se condiciona el enfoque elegido. Así, cuando se cuantifica la pobreza nos encontramos tanto en el ámbito conceptual como en el metodológico disyuntivas entre las nociones de pobreza "absoluta" y "relativa", entre los enfoques "directo" e "indirecto" y entre las perspectivas "objetiva" y "subjetiva". Por otra parte, ningún método de identificación y agregación es por sí solo suficiente, por lo que el uso combinado de los mismos puede ser la opción más acertada para la cuantificación de la pobreza.

El interés de la medición de la pobreza y desigualdad en una sociedad está justificado porque de ello dependerá el poder dar soluciones a un grave problema social. Al medir la pobreza podemos saber cuántos pobres hay, dónde están y por qué son pobres; y con ello diseñar políticas que lleven a que tales individuos dejen de ser pobres.

A continuación se presenta en la siguiente sección los antecedentes históricos de la medición de la pobreza. En la Sección 3 se define el concepto de línea de pobreza y se describen varios métodos para la construcción de diferentes líneas de pobreza; además de describen distintas escalas de equivalencia, que son necesarias cuando se hacen mediciones de pobreza dependiendo de las unidades de análisis elegidas en el estudio que se realiza. La Sección 4 describe los diferentes enfoques que existen para la construcción de indicadores de pobreza. Por último, en la Sección 5 se realiza una revisión de los principales indicadores de pobreza que han sido definidos por diferentes autores.

2. Antecedentes históricos

Aunque la visión de un mundo de pobres y de ricos es muy antigua, el estudio científico de la medición de la pobreza se remonta solo al siglo XX. Esto puede deberse a que hasta bien entrado este siglo no se consolida el Estado como unidad de análisis y, con ello, se empieza la producción sitemática, más o menos fiable, de datos empíricos comparables entre los distintos países.

A principios del siglo XVIII se realizaron las primeras encuestas sociales y la pobreza fue uno de los temas que se trataron en ellas, aunque no con el objetivo de cuantificarla, sino motivadas sobre todo por la creencia de que en las sociedades industriales la pobreza era un problema social terrible pero a la vez también evitable. Así, puede decirse que la preocupación por la pobreza y el análisis de la misma se remontan a los comienzos mismos del Análisis Sociológico. Adam Smith (1776) definía la pobreza como sigue:

> "...una falta de aquellas necesidades que la costumbre de un país hace que sea indecente, tanto para la gente acomodada como para la de clase más baja, carecer de ellas".

No obstante, como se ha indicado anteriormente, los estudios científicos acerca de la cuantificación de la pobreza no comienzan muy atrás en el tiempo; se remontan a finales del siglo XIX. Según Atkinson (1987), fue Booth el primero que combinó la observación de la pobreza con un intento de medir matemáticamente la extensión del problema, entre los años 1892 y 1897. Además, Booth elaboró un mapa de la pobreza en Londres en los años indicados anteriormente (ver Booth (1892-1897)).

Ya en el siglo XX, Rowntree (1901) elaboró un estudio de la pobreza en York, donde utilizó un concepto de pobreza basado en requerimientos nutricionales. A partir de entonces, se han desarrollado y utilizado nuevos conceptos y metodologías sobre la medición de la pobreza, que se describirán en este trabajo.

Los estudios de pobreza que se hacen hasta ese momento son siempre en una zona determinada y dentro de una sociedad en particular; según Sachs (1992), no es hasta los años 40 del siglo pasado cuando "se descubre" la pobreza a escala mundial, en los primeros informes del Banco Mundial. En tales condiciones, la pobreza era entendida como una operación estadística de carácter comparado que afectaba a los ingresos per cápita de los diferentes estados. Desde esta perspectiva, se deriva una estructuración mundial de la pobreza muy clara: países de mayor renta y países de renta inferior. Y un país pobre es el que queda por debajo de un determinado nivel de renta o umbral. Así, en 1948, el Banco Mundial define como *pobres* a los países con una renta por habitante menor a 100 USD y "por primera vez en la historia, naciones enteras y países son considerados (y se consideran a sí mismos) como pobres en el sentido de que sus ingresos son insignificantes en comparación con aquellos países que actualmente dominan el mundo económico".

Esta perspectiva, lejos de estar en desuso en la actualidad, ha sido completada con aportaciones empíricas y teóricas y continúa siendo una de las principales fuentes de información y referencia para la descripción (y también para el análisis) de la pobreza, Fisher (1992).

Durante las décadas de los años 1950 y 1960 se consideraba que el crecimiento era el principal instrumento de reducción de la pobreza. Sin embargo, desde el propio Banco Mundial y hacia el final de los años 60 y durante los 70 del siglo pasado, se produce una reconducción en el término *pobreza*. Así, se comienza a hablar de *pobreza absoluta* y de *niveles de vida*, sobre los que pesa una clara delimitación o franja a partir de la cual se es pobre. Es precisamente en el año 1973 cuando el Banco Mundial lanza el primer concepto de pobreza absoluta en un discurso dado por su Presidente, Robert McNamara:

> "...unas condiciones de vida tan degradadas por la enfermedad, el analfabetismo, la desnutrición y la miseria que niegan a sus víctimas las necesidades humanas fundamentales; unas condiciones de vida tan limitadas que impiden la realización del potencial de los genes con que se nace; unas condiciones de vida tan degradantes que insultan a la dignidad humana; y aún así, unas condiciones de vida tan habituales que constituyen el destino de cerca del 40 % de los pueblos de los países en vías de desarrollo".

En aquellos años, Robert McNamara afirmaba también lo siguiente: "para finales del siglo debemos erradicar la pobreza absoluta. Ello significa en la práctica la eliminación de la malnutrición y del analfabetismo, el descenso de la mortalidad infantil y el incremento de la esperanza de vida de forma equivalente a los estándares de los países más desarrollados". Aparte de las implicaciones a nivel internacional que tuvo y aún tiene esta visión sobre la pobreza, en esta misma dirección se encuadraron los estudios sobre pobreza de Ornati (1966). Por lo tanto, aquellos países (o grupos) que no cumplían con un mínimo vital (y absoluto) establecido según parámetros occidentales, eran pobres. Aún en la actualidad, el Banco Mundial sigue ofreciendo las cifras de los países más pobres en función del "1 dólar per cápita al día".

En los años 80 del siglo pasado, se comienza a tratar la pobreza desde una nueva perspectiva, la del desarrollo humano. Así se comienza a considerar la pobreza como algo multidimensional: se tienen en cuenta, además de la renta, aspectos como la educación y la sanidad. Es sobre esos tres aspectos clave sobre los que comienzan a construirse distintos indicadores de pobreza. Así, en el Informe sobre Desarrollo Humano de 1997 (PNUD, 1997), se da por primera vez una noción moderna de *pobreza global* en el contexto de *desarrollo*. Este concepto ha sido utilizado por numerosos investigadores con la intención de resolver el problema planteado. En este texto, la pobreza se refiere a la incapacidad de las personas de vivir una *vida tolerable*; los aspectos que forman parte de la pobreza según el informe son: llevar una vida larga y saludable, tener educación y disfrutar de un nivel de vida decente, además de elementos tales como libertad política, respeto de los derechos humanos, la seguridad personal, el acceso a un trabajo productivo y bien remunerado y la participación en la vida de la comunidad a la que pertenece el individuo. No obstante, según Feres y Mancero (2001), debido a la dificultad de medir algunos de estos aspectos, el estudio de la medición de la pobreza se ha centrado en los aspectos cuantificables de ésta, que en general están relacionados con el concepto de "nivel de vida".

A lo largo de la Historia, ha habido variaciones importantes en cuanto al peso y a la significación de la pobreza en distintos tipos de sociedad y en diferentes periodos; por este motivo, el análisis de la pobreza se llega a convertir en un análisis de *clases de pobreza*. Actualmente, la pobreza y el análisis de la misma se centran en el individuo y en su falta de capacidad para adaptarse a la sociedad. Además, se observa que la mayoría de los estudios económicos sobre pobreza que se han realizado se han centrado principalmente en la *necesidad*, el *estándar de vida* y en la *insuficiencia de recursos*; y los indicadores más aceptados han sido los *ingresos disponibles*, el *consumo de bienes* y la *satisfacción de ciertas necesidades básicas.*

El concepto de *necesidad* se refiere a la carencia de bienes y servicios mínimos requeridos para vivir y funcionar como un miembro de la sociedad; por lo tanto, este enfoque se limita a centrar la atención en determinados artículos considerados básicos para la supervivencia de un individuo.

Al hablar de *estándar de vida*, no se refiere únicamente a determinadas privaciones, sino también al hecho de vivir con menos que otras personas; surge en este enfoque la relación *ser más pobre que...*

Por último, la *insuficiencia de recursos* se interpreta como *carencia de riqueza* para adquirir lo que una persona necesita; según esta última interpretación, la satisfacción de las necesidades no implica necesariamente que una persona deje de ser pobre, porque dicha satisfacción puede no haber sido lograda por medio de recursos propios.

Utilizar la definición del "estándar de vida" plantea la necesidad de identificar claramente cuáles son los objetos que determinan ese estándar para, de esta forma, poder establecer claramente la relación *"ser más pobre que..."*. El análisis económico tradicional suele identificar la noción de *estándar de vida* con *la utilidad que experimentan los individuos ante el consumo de bienes* (enfoque utilitarista). Sin embargo, Sen (1984) critica este enfoque y argumenta que el nivel de vida de un individuo lo determinan sus *capacidades* y no los bienes que posea ni la utilidad que experimente (enfoque de las capacidades). Así, según Sen, se pueden entender las "capacidades" como aquellas actividades que distintos objetos permiten realizar.

Sen lo explica con el siguiente ejemplo: "una bicicleta es un *bien* que posee distintas *características*, por ejemplo, ser un medio de transporte. Esta característica le da a la persona que posee la bicicleta la *capacidad* de transportarse, y a su vez esa capacidad le puede proporcionar a la persona *utilidad*"; por lo que, según este razonamiento, los bienes no son los objetos que nos proporcionan el estándar de vida, ya que la posesión de un bien no implica por sí misma las actividades que un individuo pueda realizar, dichas actividades dependen de las facultades e impedimentos de cada individuo. Así, si bien "los objetos proveen la base para una contribución al estándar de vida, no son en sí mismos una parte constituyente de ese estándar" (véase Sen (1984)). No obstante, Ravallion (1998) afirma que el enfoque de capacidades puede servir de complemento al enfoque económico utilitarista y que no son necesariamente dos enfoques opuestos.

Es posible denotar las capacidades como una función que depende de la cantidad consumida de bienes, q, y de las características del hogar, x; así, si c representa a las capacidades, se puede expresar como función de q y x:

$$c = c(q, x).$$

Según el enfoque de capacidades de Sen, la utilidad es una función de las capacidades que denotamos por $U = U(c)$; si reemplazamos el término c en la función de utilidad por la función $c(q, x)$, se obtiene que:

$$U = U(c(q, x)) = v(q, x).$$

Observamos que es posible expresar la utilidad únicamente en términos de q y x, a pesar de que siguen siendo las capacidades las que determinan el bienestar individual. Así, Ravallion (1998) presenta el enfoque de las capacidades como un paso intermedio que conecta la utilidad con el consumo de bienes y no necesariamente es lo opuesto al uso del consumo en la medición del bienestar.

3. Líneas de pobreza

En la literatura existen muchas definiciones de pobreza distintas, ya que es difícil extraer una definición completamente satisfactoria del término. En una primera aproximación, el concepto de pobreza puede tener dos significados:

- Es una situación que significa que no tenemos, o difícilmente tenemos, lo suficiente para seguir vivos.
- Es una situación en la que no tenemos lo suficiente para vivir una vida que es considerada normal en la sociedad (Hagenaars, 1986).

Según el Instituto Nacional de Estadística (I.N.E.), el primer enfoque se utiliza cuando se estudian sociedades en vías de desarrollo o en situaciones de miseria, mientras que el segundo enfoque se adopta en el estudio de este fenómeno en sociedades desarrolladas (I.N.E., 1993; p.7).

En este trabajo, la discusión de la pobreza se limita al espacio de la renta, definiendo la pobreza como una *privación económica* o, como determinó Foster (1984), tratamos la pobreza como *pobreza económica*, puesto que está vinculada a las carencias de recursos económicos de las personas, para el consumo de bienes y servicios económicos. De este modo, un estándar de pobreza está basado en el nivel de recursos de la familia que se juzgan necesarios para tener un nivel de vida mínimamente adecuado. Por lo tanto, el elemento central de este trabajo gravita sobre la privación económica, tratando con el concepto, definición y medición de la pobreza económica, o lo que muchos llaman *pobreza material*.

En adelante, diremos que un individuo es pobre cuando *su nivel de vida* está por debajo de un determinado nivel mínimo (Bosch, Escribano y Sánchez, 1989; p.48), aunque sabemos que el nivel de vida es un concepto multidimensional, como argumenta Sen (1983), ya que se compone de un conjunto de requisitos que determinan la capacidad de participar en la vida social de la comunidad con un nivel mínimo aceptable. El Consejo de Europa haciéndose eco de todas estas disquisiciones sobre pobreza, recomienda que *se consideren pobres aquellas personas, familias o grupos de personas a quienes las limitaciones de recursos culturales, materiales y sociales, les excluye del tipo de vida mínimo considerado aceptable en el Estado en que residen* (OCDE, 1984).

3.1. La construcción del umbral de pobreza

El problema básico que se encuentra en la investigación de la pobreza es la *identificación de los pobres*. Éste se resuelve introduciendo la línea o umbral de pobreza, como el nivel de renta que actúa de frontera para delimitar a los pobres, cuya determinación resulta, por tanto, crucial en cualquier estudio de pobreza. La línea de pobreza es *el nivel de renta que se necesita para obtener las llamadas necesidades mínimas de vida* (Kakwani, 1986; p.239) y, por consiguiente, una persona es pobre si su renta cae por debajo de esa línea. Van Praag, Hagenaars y Van Weeren (1982) definen la pobreza en términos de bienestar y obtienen la línea de pobreza a partir de la relación entre el bienestar y la renta.

No existe una base científica sobre la cual uno pueda, inequívocamente, aceptar o rechazar una línea de pobreza basada en supuestos puramente relativos o puramente subjetivos. Cada una tiene sus méritos y sus limitaciones, tal y como dice Atkinson (1974; p.48): *cualquier línea de pobreza estará influenciada por los modelos de vida usuales y estaría solo definida con relación al patrón de vida de una sociedad particular*, o como sugiere Sen (1983): *la línea de pobreza es tal que presenta justificación por sí misma y es aquella bajo la que no se puede participar adecuadamente en las actividades comunes, o estar libre de la vergüenza pública por no satisfacer las necesidades.* Kakwani (1986, p.273) la define como: *el nivel de renta suficientemente bajo que sea considerado que crea infortunio, en términos de los modelos de vida cotidianos de la sociedad.*

Las líneas de pobreza pueden clasificarse en objetivas y subjetivas. Las primeras se construyen sobre los niveles de renta detectados en la sociedad, mientras que las segundas están basadas en la percepción que los propios hogares tienen de sus necesidades.

3.1.1. Líneas de pobreza objetivas

Las líneas de pobreza objetivas pueden ser, a su vez, *absolutas y relativas*. Los umbrales de pobreza absolutos son aquellos que no cambian con el nivel de vida de una sociedad, es decir, están basados en algunas necesidades básicas, sin que esto esté relacionado con el estándar de vida de la sociedad. Con este tipo de líneas de pobreza, los aumentos proporcionales de renta en la población hacen que se reduzca el número de individuos por debajo del umbral. Así, la pobreza medida a través de líneas absolutas podría erradicarse mediante el crecimiento económico.

En cambio, las líneas de pobreza relativas son aquellas que se relacionan más con la idea de una *privación relativa*. En todas las líneas de pobreza relativas hay una característica común, y es que aumentos proporcionales en las rentas arrastran en su desplazamiento a la línea de pobreza, por lo que el número de pobres es invariante, con lo que resulta que un crecimiento económico proporcionalmente distribuido no reduce los porcentajes de pobres. Estas líneas de pobreza, dependiendo de lo que entendemos por lo que Thurow (1969) llama *los niveles de vida adecuados vistos por la mayoría de la sociedad*, están vinculadas a algún indicador del nivel de vida de la sociedad. Con estos umbrales solo sabemos que los pobres identificados por ellos están peor que una buena parte de la población, pero no podemos asegurar que sus niveles de bienestar estén por debajo de unos límites razonables, ni que se sientan especialmente excluidos.

La elección de una línea de pobreza relativa es difícil; no se oculta la gran trascendencia social y política que puede tener. Estas líneas se identifican por tener una elasticidad positiva con respecto a la renta media. Sin embargo, la mayoría de las definiciones de líneas de pobreza suelen tener lugar sobre una escala puramente relativa; es decir, tendrán una elasticidad de la renta entre cero y uno (Kilpatrick, 1973).

1. **Aproximaciones a las necesidades básicas.**

   El procedimiento más usual es considerar como necesidades básicas a la alimentación, vivienda, vestido y calzado, sin hacer referencia a la sociedad. Por tanto, hay que decidir cómo obtener el coste de las necesidades básicas, empezando por la alimentación. Se comienza por estimar las calorías que se necesitan para mantener *la eficiencia física*. Esta estimación la dan expertos nutricionales, que son los que deciden sobre una dieta económica, que aporte lo suficiente para subsistir. Estas estimaciones se critican por dos razones:

   - Primera, tal y como Townsend (1979, 1992) argumenta, las necesidades nutricionales de los individuos varían considerablemente con la edad, sexo, ocupación, actividad física, alojamiento, clima y actividades de ocio.
   - Segunda, determinar los ingredientes de la cesta de la compra mínima es un conflicto entre el Consejo de Expertos y la conducta actual, ya que el modelo de consumo actual de la gente está influido por las costumbres individuales y por la conducta de consumo social a que se esté acostumbrado.

   Pese a las críticas expuestas, esta aproximación ha dado lugar a numerosas líneas de pobreza, comenzando con Booth (1892) y siguiendo con Rowntree (1901), Marshall (1920), Rowntree (1941), Lavers y Rowntree (1951) y Friedman (1965), entre otros. A continuación se exponen las líneas directrices de este tipo de construcción.

   a) Línea de pobreza de Rowntree.
   Es de la forma

   $$z = C_0 + 0C_0$$

   donde C_0 es el gasto mínimo en alimentación y $0C_0$ es el gasto mínimo en vestido, calzado, vivienda, gasolina y luz. Esta línea de pobreza es absoluta.

b) Línea de pobreza de Friedman.

$$z = C_0^{\frac{1}{\alpha_1}} e^{-\frac{\alpha_0}{\alpha_1}}$$

Es absoluta. Para obtener esta línea de pobreza se considera la renta mínima por debajo de la cual un hogar se considera pobre. Dicha renta se calcula utilizando la relación[1] que existe entre el consumo y la renta:

$$\ln C = \alpha_0 + \alpha_1 \ln X; \tag{1}$$

la renta mínima será:

$$\ln C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 \ln X_0.$$

c) Línea de pobreza de Orshansky.

$$z = C_0 \, e^{-\alpha_0 + (1-\alpha_1)\mu},$$

donde C_0 es el gasto mínimo en alimentación y μ es la renta media de la población. Las constantes α_0 y α_1 se obtienen de la ecuación (1). Esta línea de pobreza, dependiendo del valor de α_1, puede ser absoluta o relativa.

2. **Método de la proporción en alimentación.**

Este método fue propuesto por Watts (1967), aplicado por Love y Oja (1975) y discutido por Cramer (1973) y Deaton y Muellbauer (1980), entre otros. Genera una línea de pobreza que también es absoluta. Su construcción está basada en establecer la relación entre los gastos en alimentación y la renta total. Obtiene la línea de pobreza a partir de la función de Engel, como el valor máximo, φ_0, de la proporción entre el gasto en comida y la renta total. Así, si la ratio alimentación-renta de una persona es mayor que φ_0, entonces se dice que es pobre; si por el contrario es menor que φ_0, entonces se dice que el individuo no es pobre. De esta forma:

$$\ln \varphi_0 = \ln \frac{C}{X} \Longrightarrow z = e^{\dfrac{\alpha_0 - \ln \varphi_0}{1-\alpha_1}}$$

Las constantes α_0 y α_1 se obtienen de la ecuación (1).

3. **Método basado en una fracción de la renta media o de la renta mediana.**

Una forma muy común de obtener la línea de pobreza de una sociedad es la basada en un cierto porcentaje de la renta media de la población. La Comisión de Investigación de la Pobreza en Australia (1975), utiliza como línea de pobreza el 56,6 % de la ganancia media semanal. En general, se suele elegir como umbral de pobreza el 50 % de la renta media, tal y como lo hacen la OCDE, el DSS en el Reino Unido, O'Higgins y Jenkins (1989), Cáritas y el INE. Sin embargo, Fuchs (1969) se inclina a que el

[1] La función de Engel.

modelo de pobreza tiene que estar unido a la renta mediana y considera que el umbral de pobreza debería ser el 50 % de la renta mediana de la distribución, al igual que Hagenaars (1986). En Francia también se opta por esta línea de pobreza. En la actualidad, se suele utilizar como línea de pobreza el 60 % de la renta mediana. Obviamente, tanto la línea de pobreza basada en la renta media como la basada en la renta mediana son de tipo relativo.

4. **Método basado en percentiles de la distribución de la renta.**

   Las líneas de pobreza se pueden definir como un cierto percentil de la distribución de la renta. Este método suele estar asociado a la búsqueda de la pobreza extrema y suele trabajar con P_{20} y P_{10}. Estas líneas de pobreza son también relativas.

   Otra línea de pobreza, menos utilizada, es la de Beckerman, que establece como umbral para un hogar bipersonal, la renta per capita del grupo. Este valor se adapta después a los diferentes tamaños del hogar, multiplicándolo por los coeficientes de la escala de equivalencia elegida, que cuantificará las economías de escala del hogar.

3.1.2. Líneas de pobreza subjetivas: la línea de Kapteyn, la de Lyeden y la de Deeleck

Por último, las líneas de pobreza subjetivas se construyen a partir de las percepciones de los propios hogares, obtenidas a través de un cuestionario de opinión. En Europa existe una gran cantidad de trabajos[2] sobre el desarrollo de umbrales de pobreza subjetivos, preguntando sobre la renta mínima: ¿cuál considera que sea la renta neta mínima absoluta para un hogar tal como el suyo? En España, el Instituto Nacional de Estadística, incluyó en la Encuesta Básica de Presupuestos Familiares (E.P.F.) un cuestionario de opinión sobre la subjetividad de la pobreza en los propios hogares. Para luego obtener dicha línea de pobreza, se usan técnicas relacionadas con la teoría de la utilidad. La variable que se utiliza es la renta y la ventaja que tiene sobre las medidas objetivas es que no se necesita el uso de escalas de equivalencia.

Existen en la actualidad dos metodologías que han desarrollado, de modo independiente, un sistema subjetivo de fijación del umbral de pobreza:

1. **La metodología de Leyden.**

   Propuesta primeramente por Goedhart, Halberstadt, Kapteyn y Van Praag (1977) en la escuela holandesa, existen dos variantes para la obtención de la línea de pobreza. La más sencilla es la Kapteyn, también llamada S.P.L. (Límite Subjetivo de Pobreza), para diferenciarla de la línea de Leyden propiamente dicha.

   Para determinar la línea de pobreza de Kapteyn (S.P.L.), se utilizan las respuestas a la siguiente pregunta del módulo subjetivo de la E.P.F.:

[2] Hagenaars (1986), Hagernaars & de Vos (1988), entre otros.

> *"En su opinión, ¿cuáles son los ingresos mensuales netos que como mínimo se necesitan para que un hogar como el suyo llegue a fin de mes?"*

Kapteyn parte de la hipótesis de que el mínimo fijado por cada hogar depende de dos factores subjetivos: el tamaño del hogar y el nivel de ingresos. Es decir, a igualdad de pautas, el consumo de los hogares más numerosos necesita, obviamente, más ingresos y, además, ingresos más elevados en un hogar implican seguramente mayores niveles de exigencias. Otra hipótesis con la que trabaja Kapteyn es que los hogares que tengan una renta próxima a su mínimo serán probablemente los que pueden fijar este con mayor precisión y, por tanto, son aquellos cuya información resulta más fiable.

La línea de pobreza de Leyden L.P.L. (Límite de Pobreza de Leyden) es una versión un poco más depurada de la anterior. Para obtener la información subjetiva de los hogares, lo hace a través de una pregunta más compleja y que obliga a éstos a precisar más sus necesidades. De esta forma, se intenta conseguir unas respuestas que se ajusten más a la realidad. La pregunta es:

> *Dadas las circunstancias actuales de su hogar, dígame aproximadamente, qué ingresos netos mensuales asociaría con cada una de las siguientes situaciones económicas:*

Muy mala	*Mala*	*Insuficiente*	*Suficiente*	*Buena*	*Muy buena*

2. **Metodología del Centro de Política Social (C.S.P.) de Amberes.**

La línea de pobreza de Deeleck (C.S.P.) sigue una metodología totalmente distinta. La información que se utiliza es la respuesta a la siguiente pregunta:

> *Con la renta neta actual de su hogar, suele llegar a fin de mes con:*

Mucha dificultad	*Dificultad*	*Alguna dificultad*	*Facilidad*	*Mucha facilidad*

La línea de pobreza de Leyden, primero define y mide el bienestar y después define la pobreza como una situación de bajo bienestar. La idea es ser capaces de decir si dos hogares tienen el mismo bienestar o no y, si no, cuál de los dos está mejor.

Podemos usar el nivel de ingreso de la gente que piensa que es *suficiente* para derivar una línea de pobreza, correspondiente a esta descripción verbal. Esto se puede hacer de dos modos:

- Calculando un punto de intersección del nivel de ingreso asociado con *suficiente* y el nivel de ingreso real (el método de Leyden).

- Promediando todas las respuestas de la gente que dice que su nivel actual de ingreso tiene *alguna dificultad* (el método de Deeleck).

De cada método resultará una línea de pobreza, correspondiente al nivel de bienestar *suficiente (alguna dificultad).*

Trabajos sobre medidas subjetivas también se han realizado en Estados Unidos y Canadá: Kilpatrick (1973), Colasanto, Kapteyn y Van Der Gaag (1984); Danziger, Van Der Gaag, Taussig y Smolensky (1984); De Vos y Garner (1991); Vaughan (1985); etc. diferenciándose en la pregunta efectuada. Por ejemplo, de Vos y Garner (1991) preguntaban específicamente sobre la renta necesaria antes de impuestos, Colasanto, Kapteyn y Van Der Gaag (1984) preguntaban sobre la renta después de impuestos. Danziger, Van Der Gaag, Taussig y Smolensky (1984) no especificaban si la respuesta se refiere a la renta antes de impuestos o después de impuestos. En Estados Unidos existen también datos disponibles con los que derivar umbrales sobre una base razonable. En la Encuesta Gallup, se ha hecho durante la mayoría de los años entre 1946 y 1989, la siguiente pregunta: ¿cuál es la cantidad mínima de dinero que una familia de cuatro personas[3] necesita cada semana para permanecer en esta Comunidad? Vaughan (1985) utilizó los datos de esta encuesta y de otras fuentes, entre 1947 y 1989, estimando la cantidad media mínima anual a partir de la media de dicha cantidad semanal.

3.1.3. Líneas de pobreza híbridas

Los umbrales de pobreza híbridos no son ni absolutos ni relativos. Su objetivo es armonizar ambos puntos de vista, para conseguir líneas de pobreza más realistas. Entre otras, pueden destacarse las que se exponen a continuación. Sen (1979) distingue dos aspectos diferentes en la medición de la pobreza y definió dos líneas de pobreza, siendo una de tipo nutricional y otra cultural.[4] Para tener en cuenta ambos aspectos, puede definirse una línea de pobreza del tipo:

$$z(\beta) = z_0 + \beta(m - z_0)$$

donde z_0 es el nivel de renta correspondiente a la línea de pobreza nutricional, m es la renta media o mediana de la sociedad y $0 \leq \beta \leq 1$, lo que implica que la línea de pobreza nunca puede estar por debajo de z_0 (que representa el estándar mínimo de subsistencia) ni por encima de la renta media o mediana de la sociedad.

En esta línea, Citro y Michael (1995) proponen la obtención de un umbral de pobreza híbrido, basado en lo que debería ser un estándar de vida parcial (r_p), definido como el

[3] Matrimonio y dos hijos.

[4] La primera corresponde al nivel de renta adecuado para el cual el nivel de consumo de un individuo o de una familia es adecuado desde el punto de vista nutricional. La segunda corresponde con el nivel de renta para reunir necesidades, definidas en términos de los modelos de vida globales de esa sociedad.

gasto mediano en ciertos bienes básicos. En general, definimos el *umbral de pobreza híbrido* como la media geométrica ponderada del umbral relativo $z_r = \alpha\, r$ y el umbral absoluto z_a; es decir:

$$z = z_r^{\rho} \cdot z_a^{1-\rho}, \text{ donde } 0 < \rho < 1\,,$$

siendo r una renta estándar indicativa del nivel social (renta media, mediana, etc.) y α un coeficiente tal que $0 \leq \alpha \leq 1$, siendo ρ la elasticidad de la línea de pobreza con respecto al estándar de vida, o lo que Fisher (1995) ha denominado *elasticidad de la renta de la línea de pobreza*. Es decir:

$$\rho = \left(\frac{dz}{dr}\right)\left(\frac{r}{z}\right).$$

Cuando $\rho = 0$, se obtiene una línea de pobreza absoluta mientras que, cuando $\rho = 1$, la línea es completamente relativa. En favor de $\rho = 1$, Callan, Noland, Whelan y Walsh (1998) argumentan que *el crecimiento de renta real puede tener un impacto en el corto plazo pero, sobre el largo plazo, el único modo de reducir la pobreza es conducir a las personas lo más cerca del estándar de vida medio.*

Dagum (1989) argumenta a su vez que *la línea de pobreza de un país muy pobre, que lucha por sobrevivir, deberá determinarse a partir de las necesidades básicas, mientras que las líneas de pobreza de países ricos deberían incorporar otras necesidades, como educación elemental y superior, condiciones sanitarias, facilidades recreativas y culturales, etc. Por tanto, en estos países la línea de pobreza se tendría que obtener de forma relativa.*

3.1.4. Otros enfoques para la medición de la pobreza: a través de conjuntos difusos

Dagum, Gambassi y Lemmi (1991) proponen medir la pobreza a través de un índice difuso y, para ello, construyen el umbral de pobreza a partir de conjuntos difusos. La obtención de dicha línea se lleva a cabo de la siguiente forma:

Sea $\mu_A(i)$ la función de pertenencia al conjunto difuso A, la cual dependerá del tipo de variable con la que se esté trabajando. Entonces:

1. Si las variables son cuantitativas:

$$\mu_A(i) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x_i \leq X'; \\ p(x_i) & \text{si} \quad x' < x_i < X''; \\ 0 & \text{si} \quad x_i \geq X''; \end{cases}$$

donde

$$p(x_i) = \frac{X'' - x_i}{X'' - X'},$$

siendo X' el nivel por debajo del cual un individuo se considera realmente pobre y X'' el nivel por encima del cual un individuo es ciertamente no pobre.

Si consideramos la línea de pobreza I.S.P.L. (International Standard Poverty Line), que es el 50 % de la renta media per cápita del país y se representa por z_{IS}, se tiene:

$$z_{IS} = \frac{\overline{X}}{2} \implies \overline{X}_{\text{per cápita}} = 2 \cdot z_{IS};$$
$$X' = 40\,\% \cdot \overline{X}_{\text{per cápita}} = 80\,\% \cdot z_{IS};$$
$$X'' = 60\,\% \cdot \overline{X}_{\text{per cápita}} = 120\,\% \cdot z_{IS}.$$

2. Si las variables son cualitativas:

   Admitiendo un conjunto de k indicadores cualitativos sintomáticos de la pobreza $(Y_1, Y_2, ..., Y_k)$, se define Y_{ij} como la modalidad del indicador Y_j correspondiente al individuo i, de tal forma que:

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{(situación de pobreza del individuo } i \text{ respecto a } y_j); \\ 0 & \text{(situación de no pobreza del individuo } i \text{ respecto a } y_j). \end{cases}$$

   En tal caso, hay dos formas de obtener la función de pertenencia a la pobreza, dependiendo de que se considere que todos los indicadores tienen la misma importancia o que no la tienen.

   a) Todos los indicadores ponderan igual:

$$\mu_A(i) = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{k} Y_{lj},$$

   de manera que $\mu_A(i)$ está entre 0 y 1. Si $\mu_A(i) = 1$, entonces el individuo i vive en una situación de extrema pobreza. Si $\mu_A(i) = 0$, dicho individuo i está en una situación de no pobreza.

   b) Todos los indicadores no ponderan igual:

$$\mu_A(i) = \frac{\sum_{l=1}^{k} Y_{lj} \log\left(\frac{1}{f_j}\right)}{\sum_{l=1}^{k} \log\left(\frac{1}{f_j}\right)},$$

   donde

$$f_j = \frac{\text{número de veces que el indicador } y_{ij} \text{ toma el valor } 1}{k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} Y_{ij}}{k}.$$

   Una vez que tenemos la función de pertenencia, se define el índice difuso de pobreza de Dagum, Gambassi y Lemmi de la siguiente forma:

$$I = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_A(i),$$

donde $\mu_A(i)$ es la función de pertenencia al conjunto difuso. $I \in [0,1]$ representa la porción de individuos que pertenecen al conjunto difuso de los pobres.

Este indicador permite registrar las posibles condiciones de pobreza relativa, mostrándolas para cada unidad por debajo o por encima de una línea de pobreza establecida a priori. A partir de este índice I, se puede construir una línea de pobreza, como la renta que corresponde al percentil I. En efecto, sean una variable aleatoria X, con función de distribución $F(x)$, e I el índice difuso de pobreza; entonces

$$p(x \leq z_F) = I = F(z_F).$$

Por tanto,

$$z_F = F^{-1}(I),$$

y a partir de esta línea de pobreza, se puede seguir un estudio tradicional.

3.2. Escalas de equivalencia

Cuando hacemos estimaciones de la pobreza o de otras medidas de bienestar social, suponemos por regla general que las familias más numerosas necesitan un nivel de renta más alto, para mantener el mismo poder adquisitivo que las familias menos numerosas. Sin embargo, el bienestar económico de los hogares no está determinado solo por la renta, sino que también depende de las necesidades de éstos y, además, los hogares que difieran en tamaño, composición de la edad y otras características, se espera que tengan necesidades diferentes. Por otra parte, las necesidades de una persona dependen de distintos factores como son la salud, edad, sexo, ocupación, entorno, gustos, etc., y será imposible cuantificar todos los factores. Por todo ello, para evaluar las necesidades de un hogar con respecto a otro, se consideran solo unas pocas variables cuantificables que le afectan. Estas necesidades relativas se expresan en términos de una escala de equivalencia, que describe el coste relativo preciso para alcanzar un estándar de vida determinado, para los hogares con circunstancias familiares diferentes (o características diferentes). Como indican Duclos y Mercader (1999) *una escala de equivalencia, E, es un índice de las necesidades del hogar*. Este índice dependerá generalmente de las características de los N miembros del hogar pues, claramente, un hogar más numeroso tiene necesidades mayores que uno más pequeño y, por ello, necesitaremos algún tipo de ajuste que nos permita tener en cuenta las necesidades familiares. Tradicionalmente, este tipo de ajuste se hacía a partir del número de personas en cada familia, obteniendo así la renta *per cápita*.

3.2.1. Las escalas de equivalencia frente a la renta per cápita

Aunque la renta *per cápita* del hogar se ha usado ampliamente como base de las comparaciones de bienestar entre los hogares, este método presenta dos serios inconvenientes:

1. Este procedimiento asume que todas las personas dentro del hogar tienen exactamente las mismas necesidades, independientemente de la edad y el sexo. Ahora bien, evidentemente, los adultos no tienen las mismas necesidades que los niños.

2. La renta per cápita sobrevalora las economías de escala de las familias más numerosas. Supone que un hogar con cuatro personas necesita, como mucho, el doble de renta que un hogar con dos personas para obtener el mismo estándar de vida, lo que, evidentemente, no es cierto, ya que los hogares más grandes se pueden beneficiar de las economías de escala. Pueden economizar, por ejemplo, comprando y cocinando a granel, o compartiendo diversos bienes duraderos del hogar, como puede ser lavadora, televisión e incluso ropa y calzado. Además, ignora otras características como son el sexo, la localización geográfica, etc.

Sin embargo, como señalan Jenkins y Lambert (1993), la selección de una escala de equivalencia implica efectuar tres suposiciones diferentes, que son:

- La especificación de las características familiares o del hogar, que son relevantes para diferenciar entre niveles de necesidad.

- El acuerdo sobre una ordenación en términos de tales características.

- La especificación de una ordenación cardinal de diferentes hogares, según su nivel de necesidad, es decir, de la cantidad de recursos que necesita un hogar para alcanzar el mismo nivel de bienestar que otro.

Evidentemente, es en este último punto donde surge la mayor parte del desacuerdo a la hora de proponer una escala de equivalencia operativa. Por ello, se han propuesto una gran variedad de alternativas, de las que analizaremos las más frecuentemente utilizadas.

Así, por ejemplo, Danziger y Taussig (1979) ponen de manifiesto cómo las medidas de desigualdad de la renta y de la pobreza son sensibles a la elección de la unidad perceptora de renta y a las ponderaciones que se les asigna dentro de la población total. Por ello, sugieren que cada unidad de renta debe ser ponderada, en la distribución total de la renta, mediante el número de personas que componen el hogar. En este sentido, la desigualdad que muestra la distribución de la renta total de los hogares es, generalmente, superior a la que se obtiene utilizando la *renta per cápita* (Coulter, Cowell y Jenkins, 1992a). Si el ajuste se hace mediante escalas de equivalencia, estas son extremadamente variadas en lo que se refiere a las ponderaciones que dan a los incrementos del tamaño familiar, en el cálculo de las necesidades.

Así pues, emplear una escala de equivalencia implica aproximar la posición económica del hogar, en términos de renta, en una posición intermedia entre la renta total y la *renta per cápita*. Por lo tanto, si suponemos que E está normalizado con relación a las necesidades de un solo adulto, se puede interpretar como el número de *adultos equivalentes*; es decir, las necesidades del hogar como una proporción de las necesidades de un solo adulto y podemos escribir:

$$X = \frac{Y}{E},$$

donde X es la renta equivalente del hogar e Y es la renta total del hogar.

3.2.2. Otras escalas de equivalencia

Podder (1971) estimó una escala de renta equivalente para Australia, utilizando la Encuesta de Finanzas y Gastos del Consumidor. Cualquier tipo de hogar cuya composición no sea alguna de las contempladas está excluido. Concretamente, es la siguiente:

Escalas de Equivalencia de Podder

Tipo de hogar	**Escala de renta-equivalente**
Adulto solo	0,488
Pareja casada	1,000
Pareja + 1 niño	1,250
Pareja + 2 niños	1,481
Pareja + 3 niños	1,671
Pareja + 4 niños	1,972
Pareja + 5 niños	2,381
Pareja + 6 niños	2,731

Esta escala no resulta ser de excesiva utilidad, porque excluye el caso de los hogares de un adulto solo con niños y, además, excluye el caso de aquellos hogares con tres o más adultos, con o sin niños.

Kakwani (1977b) estimó una escala de equivalencia, utilizando los mismos datos de Podder, pero con un método diferente. Considera las economías de escala mediante el tamaño del hogar, pero variando con el nivel de renta: *los hogares ricos tienen diferentes escalas de renta que los hogares pobres*. Sin embargo, se puede comprobar que la variación en la escala de renta es insignificante, sobre un amplio rango de renta *per cápita*.

Escala de Kakwani

	Escala de renta en niveles de renta *per cápita*			
Tipo de hogar	**$\leq$ 1220$**	**2000$**	**3000$**	**4000$**
Adulto solo	0,438	0,444	0,447	0,449
Pareja casada	0,728	0,729	0,731	0,732
Pareja + 1 niño	0,877	0,879	0,880	0,880
Pareja + 2 niños	1,000	1,000	1,000	1,000
Pareja + 3 niños	1,075	1,072	1,070	1,070
Pareja + 4 niños	1,114	1,102	1,096	1,092
Pareja + 5 niños	1,151	1,102	1,116	1,110
Pareja + 6 niños	1,187	1,144	1,122	1,111

Aunque más elaborada que la de Podder, puede comprobarse que es una escala de equivalencia construida empíricamente, que adolece de problemas similares a los expresados en aquel caso, ya que no cubre todos los casos posibles, además de que no se observa un patrón claro, con respecto a la renta *per capita* del hogar.

La mayoría de las escalas de equivalencia distinguen fuertemente entre la presencia de adultos y de niños; y algunas, como la *escala de equivalencia de McClements*, distingue entre la presencia de adultos adicionales en el hogar. Las ponderaciones asignadas por esta escala son las siguientes:

Escala de McClements

Adulto solo		1,00
Esposa del cabeza		0,64
Otro segundo adulto		0,79
Tercer adulto		0,69
Cada adulto subsiguiente		0,59
Edad del niño	0 - 1	0,15
	2 - 4	0,29
	5 - 7	0,34
	8 - 10	0,38
	11 - 12	0,41
	13 - 15	0,44
	16 - 17	0,59

En este caso, McClements (1977) define cada niño como aquel menor de 16 años de edad, o de 18 si cursa estudios a tiempo completo. Esta escala es ampliamente usada por la British Office of National Statistics y por el Departamento de la Seguridad Social, para el análisis de la distribución de la renta británica.

3.2.3. Escalas de equivalencia uniparamétricas

3.2.3.1. Escala de Buhmann, Rainwater, Schmaus y Smeeding

En la línea de hacer depender la escala de equivalencia únicamente de la estructura demográfica del hogar, estos autores proponen que la información relevante está contenida en el número de integrantes del hogar, a través de su elasticidad. Por lo tanto, ignorando la distinción entre adultos y niños, y entre el primer y segundo adulto, simplemente elevando el tamaño familiar a una potencia, Buhmann, Rainwater, Schmaus y Smeeding (1988) utilizan la escala de equivalencia siguiente:

$$E = N^S, \;\; S \in [0,1], \tag{2}$$

siendo S el único parámetro que resume la sensibilidad de E al tamaño del hogar. Esta escala proporciona una forma funcional común y las variaciones paramétricas producen los cambios en los ratios de escala para los hogares de tamaños diferentes. Argumentan tres razones para ajustar la renta solo a partir del tamaño del hogar:

- Se usa siempre en los ajustes de equivalencia.
- A menudo es el único factor que se usa.
- Tiene mayor ponderación en las pocas escalas de equivalencia que añaden otros factores.

La elasticidad de las necesidades, S, debe variar entre 0 y 1. Para $S = 0$, no se tienen en cuenta las necesidades del hogar. Para $S = 1$, X es igual a la renta per cápita del hogar en (2). Dentro de este amplio abanico, se presentan como representativas cuatro tipos de escalas, que van desde la elasticidad $0,25$ hasta la elasticidad $0,74$. Así pues, la correspondencia sería aproximadamente del tipo Buhmann, Rainwater, Schmaus y Smeeding (1988) para los siguientes casos:

Escala	**Elasticidad**
SUBS	0,25
CONS	0,36
PROG	0,55
STAT	0,74

En general, las escalas subjetivas son bastante categóricas e infraestiman las necesidades de los hogares de mayor tamaño.

Entre todas ellas, Ruggles (1990, p.77) recomienda usar el valor $s = 0,5$, aunque no es una opción respaldada por bases firmes, desde un punto de vista teórico.

3.2.3.2. Otras escalas uniparamétricas

La clase de escalas de equivalencia sugerida por O´Higgins y Jenkins (1990) es de tipo lineal:

$$E = 1 + S(N - 1), \;\; S \in [0, 1] \tag{3}$$

siendo N el tamaño del hogar. Puede comprobarse que para $S = 1$, la expresión (3) genera la renta *per cápita*.

3.2.4. Escalas de equivalencias biparamétricas

Una limitación de las escalas de equivalencia de un solo parámetro es que dependen únicamente del tamaño del hogar y no de la composición y otras características relevantes del mismo. Así, Coulter, Cowell y Jenkins (1992a) sugieren que *no es apropiado tratar igual las rentas de los hogares, por ejemplo, de tres adultos, que las de aquellos hogares que están formados por una madre sola con dos niños.* Así pues, una vía clara de ampliación sugiere dividir los componentes del hogar, según que sean adultos o niños. De esta manera, notaremos por A el número de adultos del hogar, mientras que K será el número de niños.

3.2.4.1. Escala de Cutler y Katz

Cutler y Katz (1992) defienden la idoneidad de considerar la escala en proporción al número de personas en la familia. Su escala de equivalencia reconoce las diferencias entre adultos y niños, y admiten que, para las economías de escala, el coste equivalente por adulto decrece cuando el número de adultos equivalentes crece. Concretamente, es del tipo:

$$E = (A + p\,K)^F\ ,\ \ p, F \in [0,1]\,,$$

donde p es una constante, que refleja el coste de los recursos de un niño, en relación al de un adulto, y F es un indicador del grado de las economías de escala globales dentro del hogar. F y p son parámetros entre 0 y 1. Si $p = 1$, entonces se admite que los niños y los adultos consumen lo mismo y tendríamos la escala de Buhmann, Rainwater, Schmaus y Smeeding. Si $F = 1$, se supone que no hay economías de escala. Si $F = 0$, los valores de escala serían los mismos para todos los miembros de la familia. Si $F = p = 1$, entonces obtendríamos la renta *per cápita*.

3.2.4.2. Otras escalas biparamétricas: las escalas de la OCDE

La escala de la OCDE (1982) pondera mediante $1,00$ a un solo adulto, $0,7$ a cada adulto adicional y a cada niño por $0,5$. Es decir:

$$E = 1 + 0,7(A - 1) + 0,5\,K,$$

donde A es el número de adultos y K es el número de niños de 16 años de edad o menos. El principal inconveniente que presenta radica en que sobrestima las necesidades de los hogares más grandes, en comparación con los más pequeños. Por esta razón, Hagenaars, de Vos y Zaidi (1994, p.14), proponen el uso de la escala de la OCDE modificada, con $0,5$ para los adultos adicionales y $0,3$ para los niños de 14 años de edad o menos.

$$E = 1 + 0,5(A - 1) + 0,3\,K.$$

4. Enfoques para la medición de la pobreza

Un indicador de pobreza clásico se puede definir como una función real de varias variables reales

$$\begin{aligned} I : \mathbb{R}_+^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (y, z) &\longmapsto I(y, z) \end{aligned}$$

donde n representa el número de unidades de análisis, y es el vector de distribución de la renta de la población y z es la línea de la pobreza elegida. Para la construcción de la función I se pueden utilizar distintos procedimientos, aunque encontramos dos tipos de procedimiento bien diferenciados, que se conocen como *método axiomático* y *método del bienestar* y que pasamos a describir.

4.1. Método axiomático

El enfoque axiomático se basa en un conjunto de criterios que establecen ciertas propiedades que debe satisfacer un indicador. A tales propiedades se las denomina *axiomas* y el primer autor que estableció algunos de los citados axiomas fue Sen (1976). A continuación se describen los axiomas más relevantes que se han propuesto en la literatura:

4.1.1. Axiomas de Sen

En este apartado se describirán los Axiomas que originariamente propuso Sen, junto con nuevas versiones y generalizaciones de estos. Este conjunto de axiomas se considera básico y se utiliza para medir la bondad de los indicadores de pobreza, por lo que se intenta que los indicadores de pobreza que se construyen verifiquen tales propiedades.

En adelante, representamos por $y \in \mathbb{R}^n_+$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, a la distribución de la renta del conjunto de la población objeto de estudio y por $y_q \in \mathbb{R}^q_+$ a la distribución de la renta de los q individuos de la población considerados pobres.

Axioma Focal o de Dominio (AF): Para todos y, $y' \in \mathbb{R}^n_+$ y $z > 0$, si $y_q = y'_q$ (donde y_q e y'_q son los subvectores de y e y', respectivamente, cuyas componentes son las rentas de las unidades de análisis pobres) entonces $I(y, z) = I(y', z)$.

Este axioma establece que, una vez elegida la línea de pobreza, si se realizan cambios en los ingresos de las unidades de análisis consideradas pobres, el valor del indicador no variará, siempre que dichos cambios no hagan que las unidades de análisis pasen a estar por encima de la línea de pobreza establecida.

Por tanto, el índice de pobreza es invariante ante cambios en los ingresos de los individuos considerados no pobres (situados por encima de la línea de pobreza); es decir, solo la información relativa a las unidades de análisis consideradas pobres cuentan en la construcción del indicador.

Aunque este axioma ha sido generalmente aceptado, existen autores que argumentan que también es importante la información relativa a las unidades de análisis no pobres (véanse Hagenaars (1987) y Vaughan (1987)).

Axiomas de monotonía: Estos axiomas postulan que cualquier pérdida (o bajada) de ingresos en los individuos considerados pobres (situados por debajo de la línea de pobreza), incrementa la pobreza; es decir, el índice de pobreza verá incrementado su valor. O sea, el indicador de pobreza debe ser una función decreciente en las unidades de análisis cuyos ingresos son inferiores a la línea de pobreza elegida.

La versión de este axioma introducida por Sen se ha pasado a llamar *Axioma de Monotonía Débil*, ya que Donalson y Weimark (1986) introducen una nueva versión de este axioma, a la que llamaron *Axioma de Monotonía Fuerte*.

1. **Axioma de Monotonía Débil (AMD):** $\forall\ y, y' \in \mathbb{R}^n_+$ y $z > 0$, si $y_i = y'_j$ $\forall$ $i \neq j$, $y_j \in y_q$ e $y_j > y'_j$ entonces $I(y, z) < I(y', z)$.

   Es decir, si la distribución y' se obtiene a partir de y, disminuyendo renta a un individuo pobre y permaneciendo constante el resto de individuos, entonces el valor del indicador debe aumentar.

2. **Axioma de Monotonía Fuerte (AMF):** $\forall\ y, y' \in \mathbb{R}^n_+$ y $z > 0$, si $y_i = y'_j$ $\forall$ $i \neq j$, $y_j \in y_q$ e $y_j < y'_j$ entonces $I(y, z) > I(y', z)$.

   La interpretación de este axioma es idéntica al Axioma de Monotonía Débil, excepto que este axioma permite que el individuo cuya renta cambia cruce la línea de pobreza y la versión débil no lo permite.

   Proposición 4.1. (Donalson y Weimark (1986)). *Se verifica que AMF $\Rightarrow$ AMD.*

   □

Axiomas de transferencias: Existen cuatro versiones de estos axiomas; las dos primeras versiones se deben a Sen (1976) y las dos últimas versiones, que son posteriores a las introducidas por Sen, se deben a Donalson y Weimark (1986). Estos axiomas sostienen que si se hacen transferencias para reducir la desigualdad entre los pobres (es decir, la transferencia se hace de individuos considerados pobres a individuos más pobres) el índice de pobreza reducirá su valor. Las cuatro versiones de este axioma son:

1. **Axioma de las Transferencias Débil (ATD):** $\forall\ y, y' \in \mathbb{R}^n_+$ y $z > 0$, si $y_i = y'_j$ $\forall\ i \neq j, k$ y se verifica que $y_j > y'_j \geq y'_k > y_k$, $y_j - y'_j = y'_k - y_k$ y $q = q'$ (i.e. el número de pobres se mantiene fijo) entonces $I(y, z) > I(y', z)$.

   Es decir, si la distribución y' se obtiene a partir de la y realizando una transferencia entre dos unidades de análisis (siempre que, de las dos unidades de análisis, la de menor renta sea pobre y después de realizar la transferencia el número de unidades de análisis pobres se mantenga), el valor del indicador de pobreza disminuirá.

2. **Axioma de las Transferencias Fuerte (ATF):** $\forall\ y, y' \in \mathbb{R}^n_+$ y $z > 0$, si $y_i = y'_j$ $\forall\ i \neq j, k$ y se verifica que $y_j > y'_j \geq y'_k > y_k$, $y_j - y'_j = y'_k - y_k$, $y'_k \in y'_q$ e $y_k \in y_q$ entonces $I(y, z) > I(y', z)$.

   La diferencia con el axioma anterior es que en la versión fuerte es posible que la unidad de análisis que realiza la transferencia cruce la línea de pobreza; es decir, en esta versión fuerte del axioma de transferencias el número de individuos pobres no tiene que permanecer fijo.

3. **Axioma de las Transferencias Mínimo (ATM):** $\forall\ y, y' \in \mathbb{R}^n_+$ y $z > 0$, si $y_i = y'_j$ $\forall\ i \neq j, k$ y se verifica que $y_j > y'_j \geq y'_k > y_k$, $y_j - y'_j = y'_k - y_k$, $y_j, y_k \in y_q$ y $y'_j, y'_k \in y'_q$ entonces $I(y, z) > I(y', z)$.

En esta versión del Axioma de Transferencias, el número de unidades de análisis pobres permanece invariante (después de realizar la transferencia) y establece que las dos unidades de análisis implicadas en la transferencia (la que da y la que recibe) permanecen las dos pobres antes y después de realizada la transferencia.

4. **Axioma de las Transferencias Extra Fuerte (ATEF):** $\forall\ y,\, y' \in \mathbb{R}^n_+$ y $z > 0$, si $y_i = y'_j\ \forall\ i \neq j,\, k$ y se verifica que $y_j > y'_j \geq y'_k > y_k$, $y_j - y'_j = y'_k - y_k$ y $y_k \in y'_q$ entonces $I(y, z) > I(y', z)$.

   Esta versión se diferencia de la anterior en que solo exige que la unidad de análisis receptora sea pobre, pero no exige que después de la transferencia siga siendo pobre ni que la unidad de análisis donante sea pobre.

Entre las cuatro versiones del Axioma de Transferencias, existe la siguiente relación:

Proposición 4.2. (Donalson y Weimark (1986)). *ATEF* $\Rightarrow$ *ATF* $\Rightarrow$ *ATD* $\Rightarrow$ *ATM.*

$\square$

Axioma de Descomponibilidad Aditiva (ADA): Este axioma se aplica a poblaciones divididas en grupos según alguna característica (social, geográfica, económica, etc.). Dado el vector de rentas $y \in \mathbb{R}^n_+$, consideramos $y = (y^1,\, y^2,\, \ldots,\, y^k)$, donde y^i es la distribución de ingresos del grupo i, el tamaño de tal grupo es n_i y se verifica que $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, siendo n el tamaño total de la población.

El ADA se puede expresar como: $\forall\ y \in \mathbb{R}^n_+$, se verifica:

$$I(y, z) = \sum_{j=1}^{k} \frac{n_j}{n} I(y^j, z).$$

Es decir, todo índice de pobreza agregado puede ser expresado como suma de índices de pobreza de cada subgrupo de la población, donde cada uno de los subgrupos de la población está ponderado por su correspondiente peso.

Axioma de Simetría (AS): $\forall\ y,\, y' \in \mathbb{R}^n_+$ y $z > 0$, si $y' = P \cdot y$, donde P es una matriz de permutación (es decir, P es una matriz de ceros y unos tal que todas sus filas y columnas suman uno), entonces $I(y, z) = I(y', z)$.

Es decir, dadas dos distribuciones de ingresos donde una se obtiene a partir de una permutación de la otra, el indicador de pobreza de ambas distribuciones de ingresos coincide. La importancia de este Axioma es que establece que se pueden ordenar los ingresos de mayor a menor o viceversa, sin que el valor del indicador se vea afectado.

Axioma de Continuidad (AC): $\forall\ (y, z) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$, $I(y, z)$ es continuo en (y, z).

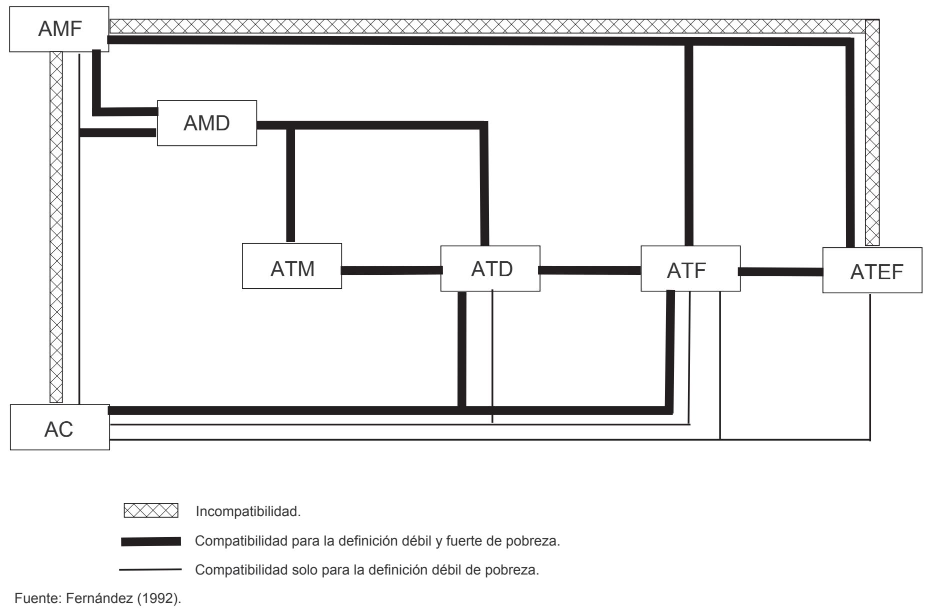


Figura 1: Compatibilidades e incompatibilidades entre algunos axiomas.

El indicador de pobreza es continuo como función del vector distribución de ingresos de la población estudiada para un nivel de pobreza dado. Este axioma exige que el indicador de pobreza sea continuo tanto en los ingresos como en la línea de pobreza.

Axioma del Incremento de la Línea de Pobreza (AILP): Dadas dos poblaciones idénticas, una con la línea de pobreza mayor debe tener también mayor el indicador de pobreza.

Axioma de Normalización (AN): Si no existen individuos por debajo de la línea de pobreza, entonces el indicador de pobreza vale 0.

El primer autor que introdujo un conjunto de axiomas que todo indicador de pobreza debe verificar fue, como se indicó anteriormente, Sen. Después de él han sido muchos los autores que han introducido diferentes conjuntos de axiomas; esto ha llevado a que, si consideramos conjuntamente todos los axiomas existentes en la literatura, se produzcan inconsistencias e imposibilidades. Tales inconsistencias han servido de base a aquellos que critican el método axiomático para la construcción de indicadores de pobreza.

Las relaciones e incompatibilidades que existen entre los principales axiomas de los aquí presentados cuando la población es de tamaño fijo, se puede ver en la Figura 1[5].

[5]Para realizar el esquema de la Figura 1 se ha supuesto que los indicadores verifican el Axioma Focal (véase Fernández (1992)).

4.2. Método del bienestar

La construcción de indicadores de pobreza utilizando el método del bienestar consiste en comparar el *bienestar social*, W, asociado a la distribución de ingresos de la población estudiada, y, con el bienestar social que se obtendría para una distribución de ingresos de referencia en la que se hubiera eliminado la pobreza, empleando una función de bienestar (en adelante F.E.S.) para tal evaluación (véanse Fernández (1991) y Fernández (1992)).

Un primer tipo de indicadores que se puede construir siguiendo el método del bienestar son los llamados *indicadores de pobreza de tipo Dalton*; tales indicadores son de la forma:

$$I_D = 1 - \frac{W(y)}{W(y')} \tag{4}$$

donde y es la distribución de la población objeto de estudio y $W(y)$ el bienestar social asociado a y; y' es la llamada distribución de referencia (donde se ha eliminado la pobreza) y el bienestar asociado a y' es $W(y')$.

El cociente entre $W(y)$ y $W(y')$ se interpreta como la proporción de bienestar asociada a la distribución y respecto al que la población disfrutaría si se eliminara la pobreza.

En consecuencia, los indicadores de pobreza de tipo Dalton, como el de la expresión (4), se pueden interpretar como la fracción de bienestar que la sociedad no disfruta debido a la existencia de la pobreza. Dependiendo de la función W que elijamos, obtendremos indicadores de pobreza distintos.

Otro tipo de indicadores de pobreza que se pueden construir por este procedimiento son los llamados *indicadores de pobreza de tipo Atkinson* (véase Atkinson (1981)); se definen como:

$$I_A = 1 - \frac{\zeta^p}{z} \tag{5}$$

donde ζ^p es el ingreso equivalente de los pobres, que es un nivel de ingresos que si fuera compartido por todas las unidades de análisis pobres generaría un nivel de bienestar social igual al que se disfruta en la situación actual.

En la construcción de indicadores de pobreza por el método del bienestar, las F.E.S. más utilizadas por los distintos autores son dos (aunque existen otras muchas):

1. Las F.E.S. de tipo Gini: son aquellas en las que las funciones de utilidad individual dependen del ingreso de la unidad de análisis en cuestión, ponderada con alguna función que indique la posición relativa que dicha unidad de análisis ocupa en la población. Este tipo de F. E. S. reciben este nombre porque el propio índice de Gini puede ser interpretado como una de estas funciones. Algunos de los indicadores de pobreza que en alguna de sus expresiones incluyen una F.E.S. de este tipo son: el índice de Sen, de Takayama, de Kakwani y de Thon, entre otros.

2. La F.E.S. de Atkinson: la expresión de este tipo de F.E.S. es:

$$W(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{y^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}$$

donde ε es una medida de aversión a la desigualdad entre los pobres.

La gran diferencia (motivo por el que las F.E.S. de Atkinson han sido muy criticadas) entre los dos tipos de F.E.S. es que en las F.E.S. de Atkinson una unidad de análisis solo tiene en cuenta su renta, mientras que en las de tipo Gini una unidad de análisis tiene en cuenta su renta y la de las demás unidades de análisis, ya que se considera la posición relativa de cada una de las unidades de análisis de la población.

5. Indicadores descriptivos de pobreza

En relación con lo ya expuesto, vamos a centrarnos ahora en el análisis de medidas estadísticas de pobreza que permitan resumir el concepto en uno o varios indicadores agregados.

Así pues, supongamos que tenemos una población χ , que consta de n hogares, donde cada uno viene caracterizado por un número real relativo a su renta disponible total. Por tanto, sea $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n$ el vector de rentas de una población, que supondremos ordenadas en sentido no decreciente[6], sea $z \in \mathbb{R}_+$ la línea de pobreza seleccionada, y e la escala de equivalencia elegida. En estas condiciones, podemos definir, en general, un indicador de pobreza como:

$$\begin{aligned} I : D \times E \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow [0,1] \\ (Y, e, z) &\longmapsto I(Y, e, z) \in [0,1] \end{aligned}$$

donde D es el espacio de rentas, $D = \bigcup_{n=2}^{\infty} D_n$, con $D_n = \{Y \in \mathbb{R}^n : y_i \geq 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, y E es el conjunto de todas las escalas de equivalencia. Para cualesquiera línea de pobreza dada, $z \in \mathbb{R}_+$, distribución de la renta $Y \in D$ y escala de equivalencia, la población se divide en pobres y no pobres. Si se fija una escala de equivalencia, $e \in E$, se tiene que la renta equivalente del hogar será:

$$X = \frac{Y}{e}$$

y el indicador de pobreza queda reducido a:

$$I(Y, e, z) = I(X, z).$$

Este indicador $I(\cdot)$, debería verificar algunas propiedades, siendo este un aspecto que se estudiará más adelante. Sin embargo, destacamos ya que son básicas las siguientes:

- Si hay una reducción en la renta de un hogar que esté por debajo de la línea de pobreza, entonces se debería incrementar la pobreza.

[6]Esta no es una restricción fuerte, ya que supone trabajar con los representantes de las clases de equivalencia definidas por la relación establecida a través de las permutaciones de las componentes de los vectores de renta.

- La pobreza aumenta siempre que, *ceteris paribus*, se produzca una transferencia de renta de un hogar pobre a otro más rico que él.

Ahora bien, las medidas de pobreza se pueden clasificar en dos familias:

- *Medidas objetivas*, que son las que se obtienen directamente a partir de la distribución de la renta.
- *Medidas éticas o normativas*, que se basan en funciones de bienestar o valoración social. Estas medidas se denominan así porque, tal y como señalan Blackorby y Donaldson (1980), *cada índice ... insinúa e implica al menos una evaluación social.*

De esta forma surgen dos posturas, diferenciándose los partidarios de que un indicador de pobreza se debe obtener siempre a partir de una función de valoración social de los que mantienen que solo se debe considerar la distribución de la renta. En esta situación, pasamos a presentar las medidas de pobreza más utilizadas.

5.1. Medidas objetivas

Como se ha expuesto, las medidas objetivas solo utilizan directamente la información proporcionada por la distribución de la renta. Así pues, en lo que sigue suponemos que X es la distribución de la renta, posiblemente corregida por la escala de equivalencia oportuna, y que z es la línea de pobreza.

5.1.1. Medidas objetivas básicas

1. *Proporción de pobres*

$$H = \frac{q}{n},$$

donde q es el número de pobres y n es el tamaño de la población. Es la medida más simple, aunque solo recoge lo que podríamos llamar la incidencia de la pobreza y no su intensidad.

2. *El ratio de pobreza o brecha de pobreza*

Consideramos la función de pobreza o déficit de pobreza

$$g(x_i, z) = \begin{cases} z - x_i & \text{si} \quad x_i < z \\ 0 & \text{si} \quad x_i \geq z \end{cases}$$

que contabiliza la cantidad de renta que precisaría cada hogar (i) para abandonar tal condición. A partir de $g(x_i, z)$, se define el ratio de pobreza (I) como:

$$I(x, z) = \frac{1}{qz} \sum_{i=1}^{n} g(x_i, z) = \frac{1}{qz} \sum_{i=1}^{q} (z - x_i) = 1 - \frac{\mu_q}{z}$$

donde q es la renta media de los pobres. Este indicador compara el montante de renta necesario para que todos alcancen el umbral de pobreza en la sociedad, con el máximo valor que podría llegar a tener.

Con respecto a estos indicadores básicos, se pueden hacer algunas consideraciones. Supongamos que queremos comparar la pobreza que existe entre dos regiones con el mismo número de individuos y, además, las dos presentan igual número de personas por debajo de una línea de pobreza común, pero los pobres de la primera región no tienen prácticamente renta, mientras que los pobres de la segunda sí tienen recursos. En estas condiciones, podemos asegurar que la pobreza en la segunda región es mucho menor que en la primera y, sin embargo, la medida H nos indicará que las dos regiones son equivalentes en términos de pobreza. Así pues, esta medida H es insensible al grado de pobreza de los individuos y solo tiene en cuenta el número de pobres de la población. Hagenaars (1987) indica que H es una buena medida de pobreza si el umbral es una línea de hambre, mientras que Sen (1992) admite que H es clara y está bien definida. Obviamente, lo que está marcando esta polémica es su capacidad para medir incidencia pero no intensidad, tal y como se señaló con anterioridad.

Con respecto a I, supongamos ahora que la primera región tiene solo una persona pobre, mientras que la segunda tiene únicamente una persona por encima de la línea de pobreza, pero las rentas medias de los pobres son las mismas. En este caso, podríamos defender que la segunda región tiene bastante más pobreza que la primera y, sin embargo, la medida I indicaría la misma pobreza para las dos regiones.

3. *El ratio combinado*

   Consiste en el producto de los dos indicadores anteriores. Es decir:

$$H \cdot I = \frac{q}{n} \cdot \frac{1}{q\,z} \sum_{i=1}^{q} (z - x_i) = \frac{1}{n\,z} \sum_{i=1}^{q} (z - x_i).$$

De esta manera, este indicador mide la cantidad de renta necesaria para situar a todos los pobres en la línea de pobreza, situación en que todos los individuos percibirían justamente la renta expresada por dicha línea.

Con respecto a esta medida básica HI, también se pueden hacer algunas consideraciones ya que, si tenemos dos poblaciones con el mismo porcentaje de pobres y la misma renta media de los pobres, HI presentaría la misma pobreza en las dos regiones, sin tener en cuenta cómo está distribuida la renta. Es decir, si en la primera región las rentas de los individuos pobres están equitativamente distribuidas, mientras que en la segunda unos pocos de estos individuos pobres presentan pobreza extrema y el resto no, podríamos asegurar que en la primera región hay menos pobreza que en la segunda, pero HI asignaría la misma pobreza a las dos regiones.

Por tanto, necesitamos medidas más elaboradas que sean sensibles a la distribución de la renta entre los pobres, para así poder calibrar mejor la intensidad de la pobreza y sus cambios.

5.1.2. Medidas objetivas a partir de una definición global

Como ya sabemos, la función que define los déficits de pobreza contabiliza la cantidad de renta que precisaría un individuo para abandonar tal condición; es decir:

$$g(x_i, z) = \begin{cases} z - x_i & \text{si} \quad x_i < z \\ 0 & \text{si} \quad x_i \geq z \end{cases}$$

de manera que un indicador agregado de pobreza podríamos definirlo como una media ponderada de tales déficit:[7]

$$I(x, z) = k \sum_{i=1}^{q} g(x_i, z) \cdot w(x_i, z) \tag{6}$$

donde k es una constante normalizadora y $w(\cdot, \cdot)$ es una función de ponderación.

Dependiendo de la función de ponderación, se pueden obtener diferentes indicadores de pobreza. Entre las medidas objetivas más utilizadas, podemos destacar:

1. *Medida de Sen (1976)*

   A partir del número de pobres (q), se define mediante:

   $$S(x, z) = \frac{2}{(q+1)nz} \sum_{i=1}^{q} (z - x_i)(q + 1 - i),$$

   que se obtiene de (3), para el caso en que $w(x_i, z) = q + 1 - i$. Esta medida también se puede escribir como:

   $$S(x, z) = H \left[I + (1 - I) G_q \frac{q}{q+1} \right],$$

   donde G_q es el índice de Gini calculado sobre las rentas solo de los pobres. Esta medida pondera los déficit de pobreza mediante el lugar que ocupa cada individuo entre los pobres, ordenados en sentido no decreciente de sus rentas.

2. *Medida de Thon (1979)*

   La diferencia entre esta medida y la de Sen radica en la función de ponderación. Aquí se pondera el individuo pobre por el lugar que ocupa dentro de toda la población, y no solo respecto a los pobres. Corresponde al caso:

   $$w(x_i, z) = n + 1 - i.$$

   Cuando n y q son suficientemente grandes, entonces la medida de Thon se puede aproximar a (Thon, 1979):

[7] Ver Núñez (1990) y Casas, Domínguez y Núñez (1998).

$$T(x,z) = \frac{2}{n^2 z}\sum_{i=1}^{q}(z-x_i)(n-0,5-i).$$

3. *La familia de Kakwani (1980)*

$$K(x,z,\alpha) = \frac{q}{nz}\left(\sum_{i=1}^{q} i^{\alpha}\right)^{-1}\sum_{i=1}^{q}(z-x_i)(q+1-i)^{\alpha},\ \alpha \geq 0,$$

que pondera los déficit mediante una potencia del número de orden que ocupa cada individuo dentro del subgrupo de pobres. El parámetro α identifica una cierta "aversión" al lugar ocupado en la sociedad. Corresponde al caso $w(x_i, z) = (q+1-i)^{\alpha}$, que es una generalización de la medida de Sen. Cuando $\alpha = 0$, $K(x,z,0) = HI$; y para $\alpha = 1$, $K(x,z,1) = S(x,z)$.

4. *La familia de Foster, Greer y Thorbecke (1984)*

$$F(x,z,\alpha) = \frac{1}{nz^{\alpha}}\sum_{i=1}^{q}(z-x_i)^{\alpha},\ \alpha \geq 0,$$

que enfatiza el grado de aversión a la pobreza de la sociedad, mediante la inclusión del parámetro α. Corresponde al caso en el que $w(x_i, z) = (z-x_i)^{\alpha-1}$ y, por tanto:

$$\alpha = 0 \Longrightarrow F(x,z,0) = H;$$
$$\alpha = 1 \Longrightarrow F(x,z,1) = HI.$$

En contraste con la medida de Sen, que adopta un sistema de ponderaciones por "orden de clasificación", Foster, Greer y Thorbecke consideran las ponderaciones sobre los déficit de pobreza. Éstas dependen de la distancia de la renta de una persona a la línea de pobreza y no del número de personas pobres que quedan entre su renta y el umbral de pobreza. A α se le conoce con el nombre de *parámetro de aversión a la pobreza* y, por tanto, cuanto mayor sea α, más énfasis se le da al más pobre de los pobres.

5.1.3. Medidas objetivas a partir de la distribución censurada

Entendemos por distribución censurada a la definida por las rentas que no sobrepasan la línea de pobreza. Por tanto, se trata de medidas definidas tomando solo en cuenta las rentas de la población pobre, ya que del resto solo se considera el umbral (z), que es la renta mínima de un hogar pobre.

1. *Medida de Takayama (1979)*

Takayama utiliza el vector de rentas $X^*(z)$, censurado por encima de la línea de pobreza z, definido por Hamada y Takayama (1977) como el vector cuyas componentes en orden no decreciente es:

$$X^*(z) = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_q^*, x_{q+1}^* \ldots, x_n^*),$$

donde:

$$x_i^* = \begin{cases} x_i & \text{si} \quad x_i < z; \\ z & \text{si} \quad x_i \geq z. \end{cases}$$

Ahora bien, sea μ_q la renta media de los pobres y μ_0 la renta media de la distribución censurada por encima de la línea de pobreza. Entonces:

$$\mu_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \mu_q + z(1-H).$$

En estas condiciones, Takayama define su medida de pobreza mediante:

$$T_a = 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{\mu_0 n^2}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)x_i^*,$$

que es el índice de Gini de la distribución censurada por la línea de pobreza. Cuando n es grande, esta medida se puede aproximar mediante:

$$T_a = 1 + \frac{1}{HI(x,z)} - (T'(x,z) - 1),$$

donde $T'(x,z)$ es la aproximación de la medida de Thon. Si llamamos G^* al índice de Gini de la distribución censurada por la línea de pobreza, entonces la aproximación de Thon, cuando n es suficientemente grande, resultar ser:

$$T'(x,z) = (G^* - 1)(1 + HI).$$

5.2. Medidas éticas de pobreza

Como ya se indicó, estas medidas éticas están basadas en una función de bienestar o valoración social, o en medidas de desigualdad de tipo normativo (Atkinson, Theil, Dalton, etc.), que a su vez están basadas en una función de valoración social.

1. *Medida de Watts (1968)*

   En 1968, Harold Watts propuso la siguiente medida de pobreza sensible a la distribución de rentas:

   $$W(x,z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{q}(\ln z - \ln x_i),$$

   que también se puede escribir como:

   $$W(x,z) = H(x,z)\left[\ln z - \ln \mu_G\right],$$

donde μ_G es la media geométrica de las rentas de los pobres. Blackburn (1989) demostró que esta medida se puede reescribir como:

$$W(x,z) = H(x,z)\left[T_1(x,z) - \ln(1 - I(x,z))\right],$$

donde $T_1(x,z)$ es la medida de desigualdad de Theil de orden 1 (Theil, 1967), de conocido contenido normativo.

2. *Medida de Blackorby y Donaldson (1980)*

   Proponen la siguiente medida de pobreza de tipo normativo:

$$BD(x,z,w) = H(x,z)\left[1 - \frac{\xi_p}{z}\right],$$

   donde $w(\cdot)$ es la función de valoración social y ξ_p es lo que ellos definen como la *renta representativa* de los pobres.

3. *Medida de Chakravarty (1983a)*

   Sea $U_i(\cdot)$ la función de utilidad del individuo i, y supongamos que

$$U_i(x_i) = U(x_i),\ \forall i,$$

   donde $U(\cdot)$ es creciente y estrictamente cóncava. Sea $h_i = U(z) - U(x_i)$ la falta de utilidad del individuo i o su carencia de utilidad. El índice de pobreza[8] se obtiene, entonces, como la suma normalizada de las carencias de utilidad de los pobres. En el caso concreto en que $U(x_i) = \left(\frac{x_i}{z}\right)^{\beta}$, se tiene:

$$Ch(x,z,\beta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{q}\left[1 - \frac{x_i}{z}^{\beta}\right],\ 0 < \beta < 1,$$

   que se puede considerar como una medida de la distancia que hay entre el perfil de la renta de los pobres y el umbral de la pobreza.

4. *Medida de Chakravarty (1983b)*

$$CH(X^*,z,w) = 1 - \frac{\mu_G}{z},$$

   siendo μ_G la media geométrica de las rentas de los pobres. Esta medida ética de pobreza es la réplica de la medida de desigualdad de Atkinson y es la generalización de la medida de pobreza propuesta por Clark, Hemming y Ulph en 1981. Utiliza una función de bienestar social definida sobre la distribución censurada de la renta, tal y como la definieron Hamada y Takayama (1977).

[8] Ver Chakravarty (1983a).

5. *Medida de Clark, Hemming y Ulph (1981)*

   Clark, Hemming y Ulph proponen utilizar en la medida de pobreza de Sen, la medida de Atkinson en lugar del índice de Gini de los pobres, obteniendo:

$$C_1(x,z,\alpha) = \frac{q}{nz}\left[\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}(z-x_i)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}, \ \alpha \geq 1.$$

6. *Medida de Clark, Hemming y Ulph (1981)*

   Estos autores propusieron también una medida de pobreza que, sin ser aditivamente separable, admite una descomposición teniendo en cuenta subgrupos definidos previamente. Su formulación es:

$$C_2(x,z,\beta) = 1 - \frac{1}{z}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\text{mín}\{x_i,z\})^{\beta}\right]^{\frac{1}{\beta}}, \ \beta < 1.$$

   Proposición 5.1. *La medida $C_2(x,z,\beta)$ es una función monótona creciente de la medida de pobreza C_h, para $0 < \beta < 1$. Más concretamente: $C_2(x,z,\beta) = 1 - [1 - C_h(x,z,\beta)]^{\frac{1}{\beta}}$.* □

7. *Medidas del tipo de Dalton: Medida de Hagenaars*

   Se parte del enfoque normativo de la medición de la desigualdad, utilizando una función de bienestar o valoración social, y a partir de ahí se obtiene la medida de pobreza.

   Como estamos centrando nuestra atención en los pobres, consideraremos generalmente $X^*(z)$, la distribución censurada de la renta por encima de la línea de pobreza, tal y como la definen Hamada y Takayama (1977). Evidentemente, cada x_i^* representa la posición económica del individuo i. Sea $V(x)$ una función que proporcione la valoración social de las posiciones económicas individuales y consideramos la función de bienestar social:

$$W(X^*) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\text{mín}\{V(x_i),V(z)\}.$$

   Entonces, la formulación general de la familia de medidas de Dalton, aplicadas a la medición de la pobreza es:

$$D_p = 1 - \left[\frac{W(X^*)}{V(z)}\right].$$

   Dependiendo de cómo esté definida V, tendremos diferentes medidas de pobreza. Hagenaars (1984) considera la función de evaluación social de la renta como $V(x) = \ln x$, de manera que:

$$x_i < z \Longrightarrow \text{mín}\{V(x_i),V(z)\} = V(x_i) = \ln(x_i);$$
$$x_i \geq z \Longrightarrow \text{mín}\{V(x_i),V(z)\} = V(z) = \ln(z).$$

   Por tanto:

$$W(X^*) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \text{mín}\left\{V(x_i), V(z)\right\} = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{q}\ln(x_i) + \sum_{i=q+1}^{n}\ln(z)\right].$$

Entonces, la medida de Hagenaars[9] queda:

$$H_a(X^*, z) = D_p = 1 - \frac{W(X^*)}{V(z)} = H\left[1 - \frac{\ln(\xi_p)}{\ln z}\right],$$

siendo ξ_p la renta representativa de los pobres.

Cada uno de los indicadores descritos en la sección anterior miden una única característica o dimensión de la pobreza, por lo que, en la práctica, lo más razonable es estimar un abanico de medidas relevantes para el estudio de la pobreza que se realiza y estudiar posteriormente la robustez de las conclusiones obtenidas.

Así, al realizar un estudio de la pobreza, es frecuente utilizar varios indicadores de pobreza a la vez que varias líneas de pobreza para la medición de ésta con el objetivo de obtener "conclusiones" lo menos contaminadas posibles por las decisiones metodológicas adoptadas.

Referencias bibliográficas

Atkinson, A.B. (1974). "Poverty and income inequality in Britain". Publicado en "Poverty, Inequality, and Class Structure". (Dorothy Wedderburn eds.). Cambridge University Press. Cambridge

Atkinson, A.B. (1981). "La economía de la desigualdad". Ed. Crítica. Barcelona.

Atkinson, A.B. (1987). "On the Measurement of Poverty". Econometrica 55, pp.749–764.

Beckerman W. (2002). "A poverty of reason. Sustainable development and economic growth". CA: The Independent Institute, Oakland.

Blackburn, M.L. (1989). "Poverty measurement: an index related to a Theil measure of inequality". Journal of Business and Economic Statistics. Vol, 7, n 4, pp.475–481.

Blackorby, C. y Donaldson, D. (1980). "Ethical indices for the measurement of poverty". Econometrica. Vol. 48, n 4, pp.1053–1060.

Booth, C. (1892-1897)."Life and Labour of the People of London". 9 volúmenes. McMillan. London.

Bosch, A.; Escribano, C. y Sánchez, Y. (1989). "Evolución de la desigualdad y la pobreza en España". I.N.E.

[9]Para su desarrollo, ver Hagernaars (1984).

Buhmann, B; Rainwater, L; Schmaus, G y Smeeding, T. M (1988). "Equivalence scales. well-being, inequality and poverty: Sensitivity estimates across ten countries using the Luxembourg Income Study (LIS) Database". Review of Income and Wealth. Vol. 32, pp.115–142.

Casas, J.M.; Domínguez, J. y Núñez, J.J. (1998). "Análisis crítico de las medidas estadísticas de pobreza: Evolución en España". Anales de Economía Aplicada. XII Reunión Anual de ASEPELT-España. Córdoba. Publicado en CD-ROM.

Chakravarty, S.R. (1983a). "A new index of poverty". Mathematical Social Sciences. Vol. 6, pp.307–313.

Chakravarty, S.R. (1983b). "Ethically flexible measures of poverty". Canadian Journal of Economics. Vol. 76, pp.74–85.

Citro, C.F y Michael, R.T. (1995). "Measuring poverty: a new approach". National Academy Press. Washington, D.C.

Clark, S.R.; Hemming, R. y Ulph, D. (1981). "On indices for the measurement of poverty". Economic Journal. Vol. 91, pp.515–526.

Colosanto, D.; Kapteyn, A. y Van Der Gaag, J. (1984). "Two subjective definitions of poverty: results from the Wisconsin basic needs studys". Journal of Human Resources. Vol. 19, pp.127–137.

Coulter, F; Cowell, F. y Jenkins, S. (1992). "Diferences in needs and assessment of income distributions". Bulletin of Economic Research. Vol. 44, 2.

Cramer, J.S. (1973). "Empirical econometrics". North Holland Publishing Company. Amsterdam.

Cutler, D.M. y Katz, L.F. (1992). "Rising inequality? Changes in the distribution of income and consumption in the 1980's". The American Economic Review. Vol.82, nº2: Papers and Proceedings of the 104^{th} Annual Meeting of the A.E.A. (May, 1992), pp.546–551.

Dagum, C. (1989). "Poverty as perceived by the Leyden income evaluation project. A survey of Hagenaars' contribution on the perception of poverty". Economic Notes. Vol. 1, pp.101–111.

Dagum, C.; Gambassi, R. y Lemmi, A. (1991). "Poverty measurement for economies in transition in eastern european countries". International Scientific Conference. Warsaw.

Danziger, S. y Taussig, M.K. (1979). "The income unit and the anatomy of income distribution". Review of Income and Wealth. Vol. 25, pp.365–375.

Danziger, S.H.; Van Der Gaag, J; Taussig, M. K y Smolensky, E. (1984). "The direct measurement of welfare levels: How much does it cost to make ends meet?". Review of Economics and Statistics. Vol. 66, nº3, pp.500–505.

De Vos, K. y Garner, T.I. (1991). "An evalution of subjetive poverty definitions: comparing results from the U.S. and the Netherlands". The Review of Income and Wealth. Vol. 37, n^{o}3, pp.267–285.

Deaton, A. y Muellbauer, J. (1980). "Economics and consumer behavior". Cambridge University Press. Cambridge.

Donalson, D. y Weimark, J.A. (1986). "Properties of fixed-population poverty indices". International Economic Review 27 (3), pp.667–688.

Duclos, J-Y. y Mercader-Prats, M. (1999). "Household needs and poverty: with application to Spain and the U.K.". Review of Income and Wealth. Vol. 45, n^{o}1, pp.77–98.

Fernández, A. (1992). "Los índices de pobreza FGT. Estimación de la distribución del ingreso en España". Tesis Doctoral. Departamento de Estadística y Econometría, Universidad de Málaga.

Fernández, A. (1992). "La medición de la pobreza a través de índices. Una síntesis de la literatura". Cuadernos, 23, pp.47–76.

Feres, J.C. y Mancero, X. (2001). "Enfoques para la medición de la pobreza. Breve revisión de la literatura". Serie de estudios estadísticos y prospectivos, CEPAL.

Fisher, M. (1992). "The development and history of the poverty thresholds". Social Security Bulletin, 55, 4, pp.3–14.

Fisher, G. (1995). "Is there such a thing as an absolute poverty line over time?". Mimeo, U.S. Department of Health and Human Services, Washington, D.C. August 1995.

Foster, J.E. (1984). "On economic poverty: a survey of aggregate measures". Advances in Econometrics. Vol. 3, pp.212–251.

Foster, J.E.; Greer, J. y Thorbecke, E. (1984). "A class of decomposable poverty measures". Econometrica. Vol. 52, n 3, pp.761–766.

Friedman, R.D. (1965). "Poverty: Definition and perspective". American Enterprise Institute for Public Policy Research. Washington, D.C.

Fuchs, V. (1967). "Redefining poverty and redistributing income". Public Interest. Summer, pp.88–95.

Goedhart, T.; Halberstadt, V.; Kapteyn, A. y Van Praag, B.M.S. (1977). "The poverty line: concept and measurement". Journal of Human Resources. Vol.12, pp.503–520.

Hamada, K. y Takayama, N. (1977). "Censored income distributions and the measurement of poverty". Bulletin of the International Statistical Institute. Vol. 47, pp.617–630.

Hagenaars, A. (1984). "A class of poverty indices". Center for Research in Public Economics. Leyden University.

Hagenaars, A. (1986). “The perception of poverty”. North Holland. Amsterdam.

Hagenaars, A. (1987). “A class of poverty indices”. International Economic Review, 28 (3), pp.583–607.

Hagenaars, A.; de Vos, K. y Zaidi, A. (1994): “Poverty statistics in the late 1980’s”. Luxembourg: EUROSTAT.

I.N.E. (1993). “Estudio de los hogares menos favorecidos según la Encuesta de Presupuestos Familiares 1990-91. Primeros resultados”. INE.

Jenkins, S.P. y Lambert, P.J. (1993). “Ranking income distributions when needs differ”. Review of Income and Wealth. Vol. 39, n 4, pp.337–356.

Kakwani, N. (1977b). “On the estimation of consumer-unit scale”. Review of Economics and Statistics. Vol. 59, pp.507–510.

Kakwani, N. (1986). “Analyzing redistribution policies: a study using Australian data”. New York: Cambridge University Press.

Kilpatrick, R.W. (1973). “The income elasticity of the poverty line”. Review of Economics and Statistics. Vol. 55, pp.327–332.

Lavers, G.R. y Rowntree, B.S. (1951). “Poverty and the welfare state”. Longman. London.

Love, R. y Oja, G. (1975). “Low income in Canada”. The Review of Income and Wealth. Vol. 25, nº1.

Marxhall, A. (1920). “Principles of economics”. 8^{th} ed. MacMillan. London.

McClements, L.D. (1977). “Equivalence scales for children”. Journal of Public Economics. Vol. 8, pp.191–210.

Núñez, J.J. (1990). “Una clase de índices estadísticos de pobreza”. Actas de las XV Jornadas Luso-Españolas de Matemáticas. Vol. IV, pp.313–319. Évora (Portugal).

OECD. (1982). “The OECD list of social indicators”. París.

OECD. (1984). “Economic outlooks”. París.

O’Higgins, M. y Jenkins, S.P. (1990). “Poverty in the EC: Estimates for 1975, 1980 and 1985”. pp.187-212. Publ. en Analysing Poverty in the European Community: Policy Issues, Research Options and Data Sources. Luxembourg: Office of Official Publications of the European Communities (R. Teekens and B.M.S. van Praag, eds.).

Ornati, O. (1966). “Poverty. Amid affluence”. The Twentieth Century Fund, New York.

Orshansky, M. (1965). “Counting the poor: another look at the poverty profile”.Social Security Bulletin, 28, pp. 3–29.

PNUD. (1997). “Informe sobre el desarrollo humano 1997”. Oxford University Press. New York.

Podder N. (1971). “The estimation of an equivalent-income scale”. Australian Economic Papers. December, pp.175–187.

Ravallion, M. (1998). “Expected poverty under risk-induced welfare variability”. The Economic Journal, 98, pp.1171–1188.

Ravallion, M. (2003). “The debate on Globalization, Poverty and Inequality: why measurement matters”. Documento de trabajo. Banco Mundial.

Rowntree, B.S. (1901). “Poverty: a study of town life”. McMillan. London.

Rowntree, B.S. (1941). “Poverty and progress: a second social survey of York”. Longmans. London.

Ruggles, P. (1990). “Drawing the line-Alternative poverty measures and their implications for public policy”. The Urban Institute Press. Washington, D.C.

Sachs, W. (1992). “Poor not different”. Real-life Economics: Understanding Wealth Creation, pp.161–165.

Sen, A. (1976). “Poverty: an ordinal approach to measurement”. Econometrica 44(2), pp.219–231.

Sen, A. (1979). “Issues in the measurement of poverty”. Scandinavian Journal of Economics. Vol. 81, pp.285–307.

Sen, A. (1983). “Poor, relatively speaking”. Oxford Economic Papers. Vol. 35, pp.153–170.

Sen, A. (1984). “Poverty and famines: an essay on entitlement and deprivation”. Oxford University Press. New York.

Sen, A. (1992). “Inequality reexamined”. Massachusetts: Harvard University Press.

Smith, A. (1776). “Wealth of Nations”. London.

Takayama, N. (1979). “Poverty, income inequality, and their measures: Professor Sen’s axiomatic approach reconsidered”. Econometrica. Vol. 47, n 3, pp.747–759.

Theil, H. (1967). “Economics and Information Theory”. North-Holland, Amsterdam.

Thon, D. (1979). “On measuring poverty”. Review of Income and Wealth. Vol. 25, pp.429–439.

Thurow, L.C. (1969). “Poverty and Discrimination”. The Brookings Institution. Washington, D.C.

Townsend, P. (1979). “Poverty in the United Kingdown, a survey of hosehold resources and standards of living”. Harmondsworth, Eng.: Penguin Books. Middlesex.

Townsend, P. (1992). “The international analysis of poverty”. Hemel Hempstead. Eng.: Harverster-Wheatsheaf.

Van Praag, B.M.S.; Hagenaars, A.J.M. y. Van Weeren, H. (1982). “Poverty in Europe”. Review of Income and Wealth. Vol. 28, n 3, pp.345–359.

Vaughan, D.R. (1985). “Using subjective assessments of income to estimate family equivalence scales: a report on work in progress”, pp.31–44. Publicado en Survey of Income and Program Participation and Related Longitudinal Surveys: 1984. Selected papers given at the 1984 annual meeting of the American Statistical Association, Philadelphia, Pa. Bureau of the Census. Washington, D.C.: U.S. Department of Commerce.

Vaughan, R.N. (1987). “Welfare approaches to the measurement of poverty”. The Economic Journal 97, pp.160–170.

Watts, H. (1967). “The isoprop index: an approach to the determination of differential poverty income thresholds”. Journal of Human Resources. Vol. 2, n 1, pp.3–18.

Watts, H. (1968). “An economic definition of poverty”, en D. P. Moynihan. On Understanding Poverty. Basic Books. Inc. New York, pp.316–329.

REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (2). Páginas 67–108.
Diciembre de 2006. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: http://www.upo.es/RevMetCuant/art6.pdf

La desigualdad económica medida a través de las curvas de Lorenz

Núñez Velázquez, José Javier
Departamento de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.
Universidad de Alcalá de Henares
Correo electrónico: josej.nunez@uah.es

RESUMEN

En el presente trabajo se analiza la influencia de las curvas de Lorenz, el Principio de Transferencias y las relaciones de mayoración entre vectores de renta sobre las medidas de desigualdad. De esta forma, se pasa revista al desarrollo histórico que ha permitido diseñar el conjunto actual de *axiomas* o propiedades deseables para que una medida de desigualdad se comporte razonablemente. Además, se analiza la problemática de la ordenación en desigualdad de los vectores de renta. Ante la imposibilidad de selección de una única medida de desigualdad, se presenta la construcción de un indicador sintético dinámico construido a partir de una batería de índices simples de desigualdad, compatibles con el criterio de dominación de Lorenz. Finalmente, se incluye como ilustración el estudio de la evolución de la desigualdad y el nivel de vida en los países de la Unión Europea, durante el período 1993-1999.

Palabras clave: curvas de Lorenz; medidas de desigualdad; distribución de la renta.
Clasificación JEL: D63; D31; C43.
2000MSC: 60E15; 91B82; 62H25; 62P20.

Artículo recibido el 5 de diciembre de 2006 y aceptado el 15 de diciembre de 2006.

Economic Inequality Measurement Through Lorenz Curves

ABSTRACT

This paper focuses both on the foundations of income inequality measures and on their relations with Lorenz curves, the Pigou-Dalton's transfer principle and majorization relations among income vectors. So the historic development of these concepts is surveyed to show how the current broad-accepted set of properties and axioms was generated, in order to define whether an inequality measure has a good perform or not. In doing so, it will be possible to check out when a particular inequality measure performs in a suitable way. Furthermore, an analysis on the problems related to inequality orders and dominance relations among income vectors is included. Because of choosing a unique inequality indicator is highly arguable, the construction of a Lorenz-compatible synthetic dynamic inequality indicator is presented, using an initial set with basic Lorenz-compatible inequality indices as starting point. Finally, as an illustration, an analysis of both inequality and well-being trends in the European Union countries during 1993-1999 is included.

Keywords: Lorenz curves; income inequality measures; income distribution.
JEL classification: D63; D31; C43.
2000MSC: 60E15; 91B82; 62H25; 62P20.

1. Introducción

Puede considerarse que el renovado interés suscitado en la comunidad investigadora, en relación con la problemática de la desigualdad económica, tiene sus puntos de partida en el artículo de Atkinson (1970) y el libro de Sen (1973), ambos de gran repercusión en dicho campo de investigación. Desde estas fechas, los artículos y libros sobre este tema aparecen con bastante regularidad, habiéndose extendido este interés a multitud de problemas cercanos, de indudable interés social, como son los estudios sobre pobreza, movilidad, polarización y privación, entre otros.

A lo largo de este tiempo, varias han sido las aproximaciones al problema, incluyendo postulados de bienestar social que pudieran dotar de un apoyo procedente de la Teoría Económica a las diversas medidas de desigualdad[1], cuyo número y variedad se ha incrementado notablemente, lo que ha sido motivo regular de fuertes controversias, como puede apreciarse en Cowell (1995), Foster (1985), Nygard y Sandström (1981) y Dagum (2001), entre otros, por citar solo algunos de los trabajos más relevantes o, en el caso español, los trabajos de Zubiri (1985), Ruiz-Castillo (1987) y Pena, Callealta, Casas, Merediz y Núñez (1996).

Sin embargo, pese a la ingente cantidad de literatura referida, en el análisis de la desigualdad económica sigue primando el paradigma de la curva de Lorenz, como el elemento básico que sirve de apoyo a este análisis, aun teniendo en cuenta que esta propuesta ya viene desarrollada en Lorenz (1905), por lo que permanece resistiendo los embates de la teoría, durante más de un siglo.

En el presente trabajo, se trata, en primer lugar, de encontrar la base que permite la cuantificación de la desigualdad económica. Para ello, se efectuará una revisión de los conceptos clásicos relacionados con la mayoración de rentas que permitirá especificar el fundamento teórico que sirve de apoyo a las curvas de Lorenz y a las medidas de desigualdad económica, tal y como se entienden actualmente. Este intento queda justificado por la necesidad de volver a plantear los contenidos básicos, desde un punto de vista estadístico, lo que permitirá una mejor comprensión a la hora de entender los mecanismos que actúan al medir la desigualdad económica y podrán, por lo tanto,

[1] Cuando se hace referencia a las medidas de desigualdad, deben entenderse como funciones o indicadores de una distribución de rentas que pretenden *medir* la desigualdad existente en el reparto de los recursos. Por tanto, no significa que exista conexión con el concepto habitual de la Teoría de la Medida.

servir de apoyo a una selección más eficaz de las medidas de desigualdad más adecuadas. Para ello, comenzaremos efectuando una síntesis histórica que recoja los principales hitos registrados en el estudio de la desigualdad económica, recuperando conceptos como la convexidad en el sentido de Schur, o S-convexidad, las transferencias progresivas y regresivas en el sentido de Pigou-Dalton, y la relación de mayoración entre distribuciones de renta. A continuación, se citan los principales resultados relacionados con la desigualdad económica, para terminar sintetizando los elementos clave que actúan sobre esta manera de entender el análisis de la desigualdad económica.

Los primeros estudios sobre la desigualdad económica se remontan a su planteamiento mediante la relación de mayoración entre distribuciones de renta. En este sentido, ya Muirhead (1903) relaciona el concepto de mayoración con las transferencias progresivas de renta, que serían formalizadas más tarde. En 1905, M.O. Lorenz propone sus curvas para analizar la desigualdad de la renta y de la riqueza, indicando que el *abombamiento* de las mismas es un indicador de la desigualdad existente en la distribución.

Al haberse cumplido recientemente el centenario de la publicación en la Revista *Journal of the American Statistical Association,* del artículo en el que M.O. Lorenz presenta las curvas que tanta repercusión han tenido posteriormente en el análisis de la desigualdad, y al que este artículo quisiera rendir tributo, no queda por menos que asombrarse al comprobar cómo la descripción de las curvas de Lorenz ocupa apenas 3 páginas, teniendo en cuenta cuál ha sido su influencia posterior.

En 1912, C. Gini propone el indicador que lleva su nombre para medir desigualdad, a partir de la medida de la diferencia media de las rentas de la distribución. En este mismo año, Pigou sugiere las ideas que más tarde se formalizarán mediante el Principio de Transferencias, que H. Dalton formula, en términos rigurosos en 1920, entre sus cuatro principios, que incluyen el conocido posteriormente como Principio de Población. Un poco más adelante, y de nuevo en relación con el concepto de mayoración, Schur presenta, en 1923, su concepto de convexidad, íntimamente relacionado con las matrices biestocásticas y, a través de ellas, con el concepto de transferencia progresiva.

En 1929, Hardy, Littlewood y Polya publican sus primeros resultados sobre desigualdades en un artículo de la revista *The Messenger of Mathematics.* Son el precedente de su trascendente libro *Inequalities*, cuya primera edición apareció en 1934. Sin embargo, es en 1932 cuando Karamata demuestra el Teorema que lleva su nombre, que ya había sido propuesto sin demostración por Hardy, Littlewood y Polya en 1929, y cuyo contenido es una de las piedras angulares de la medición de la desigualdad económica.

Como extensión de la propuesta original, J. Gastwirth propone, en 1971, la expresión explícita de las curvas de Lorenz para variables aleatorias de carácter general, lo que permite el tratamiento riguroso de las mismas.

Obviamente, la relación anterior no estaría completa sin la mención del ya reseñado artículo de A. B. Atkinson, en 1970, en el que sienta las bases, aunque no exentas de polémica, sobre el contenido normativo de las medidas de desigualdad que llevan su nombre y que se basan en la función general de promedios. Además, debe reseñarse, de nuevo, la aparición, en 1973, del libro de A.K. Sen cuyo título es *On economic inequality*, que ha sido objeto, en 1999, de una reimpresión que incluye un amplio anexo que recoge diversos avances en la medición de la desigualdad, a cargo del mismo autor y de J.E. Foster (Sen y Foster, 1999). Este último autor publica, en 1985, el Teorema que lleva su nombre, en el que explicita las condiciones que debe cumplir un indicador de desigualdad económica para que sea compatible con la curva de Lorenz, en términos notablemente distintos a los precedentes, iniciando, de manera ya decidida, el estudio de la adecuación de las medidas de desigualdad a partir de sus propiedades, también denominadas *axiomas de la desigualdad,* aunque esta aproximación ya contaba con referentes previos en la literatura.

Por fin, en 2001, C. Dagum publica en la revista *Estudios de Economía Aplicada*, una síntesis a partir de diversos artículos ya publicados en varias revistas desde 1981, en el que pone de manifiesto su visión del fundamento económico de las distintas medidas de desigualdad, como contrapunto a la visión normativa derivada del enfoque de Atkinson.

En esta revisión, necesariamente breve, se ha tratado de señalar la evolución que ha registrado el estudio de la desigualdad económica, teniendo en cuenta los diversos conceptos que se han configurado como fundamentales en el tratamiento del fenómeno, si bien la tendencia actual tiende a presentar estos contenidos en forma de propiedades o *axiomas*, como ya se ha indicado, aunque algo desligados de los conceptos que, históricamente, les sirvieron de soporte y que se desarrollarán en los siguientes epígrafes. Este tratamiento permitirá una selección más fundamentada de medidas de desigualdad, así como una guía para la presentación de propuestas alternativas, tanto para la comparación como para la cuantificación de la desigualdad incluida en las distribuciones de renta.

Con todas las consideraciones anteriores, a continuación se presentan en la Sección 2 las definiciones básicas para introducir el concepto de desigualdad, que se aborda junto con la exposición de las curvas de Lorenz y su problemática, en la Sección 3. En la Sección 4, se analiza el Principio de Transferencias de Dalton-Pigou y su relación con conceptos clave como la S-convexidad y los indicadores de desigualdad. La Sección 5 analiza el planteamiento axiomático del concepto de desigualdad, para pasar revista a otros criterios alternativos de comparación en la Sección 6. La Sección 7 presenta los indicadores sintéticos dinámicos de desigualdad y nivel de vida como alternativa al problema de la selección de un único indicador de desigualdad. La Sección 8 revisa la evolución de la desigualdad y el nivel de vida en los países de la Unión Europea, durante 1993-1999, como ilustración de la aplicabilidad de los conceptos desarrollados en la sección anterior. El artículo termina extrayendo las principales conclusiones en su Sección 9.

2. El espacio de distribuciones de renta y el concepto de mayoración [2]

En primer lugar, pasemos a definir el espacio de distribuciones de renta que servirá de soporte a todos los conceptos posteriores. Así, una distribución de renta en una población con N individuos es cualquier vector de $\Re^N$, de modo que todas sus

[2] Nos referimos exclusivamente al concepto económico de renta, aunque el análisis se puede aplicar de manera análoga a otros conceptos como el ingreso, el gasto o la riqueza, que pueden servir para fijar la posición económica de los individuos o de los hogares. En la práctica, esta selección genera una polémica basada tanto en elementos de índole teórica, como de fiabilidad de los datos disponibles (Ruiz-Castillo, 1987; Pena, Callealta, Casas, Merediz y Núñez, 1996, entre otros).

componentes sean no negativas, siendo la suma de todas estrictamente positiva, para que exista un reparto de recursos entre los individuos que componen la población. Es decir:

$$D_N^* = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_N) : x_i \geq 0,\ i = 1, ..., N;\ \sum_{i=1}^{N} x_i > 0 \right\}.$$

Ahora bien, desde el punto de vista de la desigualdad existente en el reparto, cualquier permutación de estos vectores ofrece la misma distribución, sin más cambios que la identidad o el lugar que ocupa cada receptor[3]. Para plasmar esta idea, sea Π_{NxN} el conjunto de matrices de permutación de orden N y definamos la siguiente relación de equivalencia en D_N^*:

$$x \approx y \quad \Leftrightarrow \quad x = \Pi \cdot y\ ,\ \ \Pi \in \Pi_{NxN}\ ,$$

de manera que elegiremos como representante canónico de las clases de equivalencia los vectores de rentas ordenadas de menor a mayor:

$$D_N = \ D_N^* / \approx \ \ = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_N) : x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_N \right\}. \qquad (2.1)$$

Así pues, el espacio considerado de distribuciones de renta será:

$$D = \bigcup_{N=2}^{\infty} D_N\ .$$

Una vez definido el espacio de distribuciones de renta, pasemos a definir la relación de *mayoración* entre las mismas. Sean *x* e *y* dos distribuciones de renta de D_N, entonces se dirá que *x* está mayorada por *y* $(x \prec y)$ si presenta una distribución más igualitaria; es decir:

$$x \prec y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} x_i \geq \sum_{i=1}^{k} y_i, & k = 1, 2, ..., (N-1) \\ \sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} y_i \end{cases} \qquad (2.2)$$

[3] Este enunciado se denomina también *axioma de simetría o anonimato* en relación con la medida de la desigualdad (Foster, 1985).

Puede observarse cómo esta relación se convierte en el precedente directo de la comparación mediante curvas de Lorenz, que se presentará más tarde, aunque es más restrictiva ya que solo permite comparar distribuciones de renta en poblaciones igualmente numerosas y en las que la cantidad total de recursos distribuidos es la misma. Se comprueba sin dificultad que esta relación entre vectores de D_N tiene estructura de ordenación parcial o cuasi-ordenación.

3. Desigualdad económica y curvas de Lorenz

Puede encontrarse un precedente del concepto de desigualdad cuando V. Pareto (1897) identifica una *menor desigualdad* con la situación en que los ingresos personales tienden a ser más parecidos, lo que, como afirman Castagnoli y Muliere (1990), constituye una versión temprana del Principio de Transferencias, aunque aún sin formalizar.

Por otra parte, como ya se ha visto, la relación de mayoración incluye el concepto de distribución más igualitaria, en el sentido de que sus componentes sean más similares que en el otro vector con el que se compara. Este hecho induce a clarificar definitivamente el concepto de desigualdad que tratamos de medir. En este sentido, resulta muy adecuada la siguiente frase, con la que describe el concepto Simon Kuznets: *Cuando hablamos de desigualdad de renta, simplemente nos referimos a diferencia de rentas, sin tener en cuenta su deseabilidad como sistema de recompensas o su indeseabilidad como sistema que contradice cierto esquema de igualdad* (S. Kuznets, 1953, pág. xxvii). Así pues, de acuerdo con lo expresado, una medida de desigualdad económica no valora lo adecuado que es el reparto, sino cuán cerca o lejos se encuentra de la igualdad, entendiendo por tal la situación en la que todos los individuos de la población perciben idéntica renta, sin que esto signifique un fin en sí mismo. Esta última argumentación conduce a Bartels (1977) a postular la necesidad de que una medida de desigualdad explicite una distribución de referencia como patrón con respecto al que se compara, que sirva como paradigma de lo que debiera ser una distribución justa, si bien esta propuesta no ha encontrado excesivo eco en la literatura, ya que la distribución de referencia utilizada es aquella en la que todas las componentes son idénticas e iguales a la renta media, lo que corresponde a la distribución igualitaria.

Y, sin embargo, las aseveraciones sobre desigualdad generan una amplia repercusión, lo que Amartya Sen expresa de la siguiente forma: *La idea de desigualdad es muy simple y muy compleja a la vez. Por una parte, es la más simple de todas las ideas y ha motivado a la gente con un atractivo inmediato difícilmente comparable con ningún otro concepto. Por otra parte, sin embargo, es una noción extraordinariamente compleja que hace las aseveraciones sobre desigualdad altamente problemáticas y ha sido, por tanto, objeto de amplia investigación por parte de filósofos, estadísticos, teóricos de la política, sociólogos y economistas* (A. Sen, 1973, pág. vii). Pues bien, más de treinta años después, no puede decirse que haya un método para medir la desigualdad de rentas que haya sido capaz de suscitar el consenso en la comunidad investigadora, siendo el instrumento que más cerca se encuentra de ello la curva de Lorenz, que se presenta a continuación.

3.1. Curvas de Lorenz y el criterio de dominación asociado

La curva propuesta por Lorenz (1905) se construye de la siguiente forma. Sea x un una distribución de renta del espacio D. A partir de ella, se construyen los porcentajes acumulados de individuos y de rentas repartidas, recordando que los vectores tienen sus componentes ordenadas de menor a mayor, que son no negativas y denotando por $\overline{x}$ a la media aritmética:

$$\left.\begin{array}{l} p_0 = 0;\ p_i = \dfrac{i}{N},\ \ i = 1,2,...,N \\ q_0 = 0;\ q_i = \dfrac{1}{N\overline{x}} \cdot \displaystyle\sum_{j=1}^{i} x_j \ \ , i = 1,2,...,N \end{array}\right\} \qquad (3.1)$$

Con tales porcentajes, la curva de Lorenz, L(p), es la poligonal que une los puntos del conjunto $\{(p_i,q_i);\ i = 0,1,...,N\}$, que claramente estará inscrita en el cuadrado unidad, de manera que la proximidad a la situación de un reparto igualitario viene determinada por la cercanía de la curva a la diagonal del cuadrado en que se haya inscrita, y siendo, por lo tanto, su abombamiento el que indica un aumento paulatino en la desigualdad del reparto.

Evidentemente, esta definición es descriptiva y puede generalizarse al caso en que la renta sea una variable aleatoria X, no negativa, cuya esperanza matemática es μ y cuya función de distribución es F(x) (Kendall y Stuart, 1977, por ejemplo):

$$\left.\begin{aligned} p &= F(x) = \int_0^x dF(t) \\ q &= L\left[F(x)\right] = \frac{1}{\mu}\int_0^x t \cdot dF(t) \end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

En este contexto, Gastwirth (1971) sugiere un enfoque unificador, que permite expresar la curva de Lorenz de forma explícita mediante:

$$L(p) = \frac{1}{\mu}\int_0^p F^{-1}(t) \cdot dt \, , \qquad (3.3)$$

siendo $F^{-1}(p) = \inf\left\{x : F(x) \geq p\right\}$.

Las propiedades de la curva de Lorenz son ampliamente conocidas (Casas y Núñez, 1987, por ejemplo, o Nygard y Sändstrom, 1981, para mayor amplitud), pero, entre ellas, merece destacarse que la pendiente de L(p), si es derivable, viene determinada por la función:

$$t(p) = \frac{F^{-1}(p)}{\mu} \quad , \quad p \in (0,1) \, ,$$

que la función *diferencia con respecto a la diagonal*:

$$A(p) = p - L(p) \quad , \quad p \in \left[0,1\right],$$

presenta un máximo en el punto p=F(μ), y es particularmente interesante el siguiente resultado de naturaleza más general, que caracteriza el conjunto de funciones que pueden ser curvas de Lorenz:

Teorema 3.1 (Iritani y Kuga, 1983): Una función *q = L(p)*, definida en [0,1], es la curva de Lorenz de alguna variable aleatoria no negativa, X; *si y solo si* verifica las siguientes propiedades:

i) *L(0) = 0 ; L(1) = 1;*

ii) *L(p)* es no decreciente y convexa.

Ahora bien, toda la discusión previa a la introducción de las curvas de Lorenz gravitó en relación con la comparación de distribuciones de renta, en términos de la desigualdad que exhiben. Así pues, de acuerdo con lo ya expresado, se establece la siguiente relación, denominada genéricamente *criterio de dominación de Lorenz.*

Definición 3.1: Sean x e y dos distribuciones de renta del espacio D; entonces, se dice que *x es menos desigual que y en el sentido de Lorenz ($x \leq_L y$)* cuando la curva de Lorenz de y encierra completamente a la de x:

$$x \leq_L y \Leftrightarrow L_x(p) \geq L_y(p) \quad , \quad \forall p \in [0,1]. \tag{3.4}$$

Frente a la relación de mayoración, esta resulta ser más versátil, ya que no precisa que las poblaciones tengan el mismo número de integrantes. Ahora bien, en este último caso, es evidente que:

$$x \leq_L y \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{\bar{x}}\right) \prec \left(\frac{y}{\bar{y}}\right) \quad ; \quad x, y \in D_N, \tag{3.5}$$

siendo, por lo tanto, el concepto de mayoración el que está presente en la génesis del criterio de dominación de Lorenz. Esta relación presenta ahora estructura de preorden (reflexiva y transitiva) o de orden parcial, si se define entre clases de distribuciones de renta proporcionales, de manera que, si dos curvas de Lorenz se cortan, las distribuciones de renta que las generan resultan *no comparables*, situación que aparece con mucha frecuencia en la práctica, como es bien conocido. Para presentar esta estructura, se acostumbra a utilizar los *diagramas de Hesse*, tal y como puede verse en Pena, Callealta, Casas, Merediz y Núñez (1996), por ejemplo.

Precisamente, es ésta la razón para la búsqueda de las denominadas medidas de desigualdad, que permitan una ordenación total de distribuciones, aunque lo consigan a costa de introducir esquemas de ponderación sobre los tramos de las distribuciones de renta, lo que provoca ordenaciones contradictorias en muchos casos, cuando se comparan las proporcionadas por diferentes medidas de desigualdad.

3.2. Formas funcionales para estimar la curva de Lorenz

El Teorema 3.1 caracteriza al conjunto de funciones que pueden ser curvas de Lorenz, lo que resulta de gran utilidad en la línea de investigación que propone el ajuste directo de las curvas de Lorenz, mediante familias de formas funcionales que corresponderán a los modelos probabilísticos asociados de la distribución de la renta. Algunas de las propuestas más simples son las siguientes:

- Potencial: $L(p) = p^b$, $b \geq 1$ (Casas y Núñez, 1991).
- Exponencial: $L(p) = p \cdot a^{p-1}$, $a > 1$ (Gupta, 1984).
- Potencial-Exponencial:

$$L(p) = p^b \cdot e^{-c(1-p)} \ , \ b \geq 1, \ c > 0$$ (Kakwani y Podder, 1973).

Por supuesto, se han propuesto una gran cantidad de formas funcionales más complejas en la literatura. Además, es útil el siguiente resultado, que permite ampliar la gama de posibilidades:

Cualquier combinación lineal convexa de curvas que verifican el Teorema 3.1, lo verifica a su vez (Casas, Herrerías y Núñez, 1997).

Por otra parte, también es posible encontrar nuevas formas funcionales, mediante transformaciones. En este sentido, es útil el siguiente resultado[4]:

Teorema 3.2 (Sarabia, Castillo y Slottje, 1999): Sea L(p) una curva de Lorenz. Entonces, las siguientes transformaciones son también curvas de Lorenz:

a) $L_\alpha(p) = p^\alpha \cdot L(p) \ , \quad \alpha \geq 1$;

b) $L_\alpha(p) = p^\alpha \cdot L(p) \ , \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \ L''_\alpha(p) \geq 0$;

c) $L_\alpha(p) = L(p)^\gamma \ , \quad \gamma \geq 1$.

También se han obtenido resultados, utilizando como base un modelo para la distribución de la renta, como los modelos de McDonald (Sarabia, Castillo y Slottje, 2002), o bien partiendo de la función cuantil asociada, como en el caso de la distribución de Wakeby (Houghton, 1978), por ejemplo.

Un modo de conseguir un orden total en la comparación de curvas de Lorenz, consiste en ajustar formas funcionales que solo dependan de un parámetro. Entre las diversas posibilidades existentes, pueden utilizarse las *distribuciones fuertemente unimodales* (Arnold, Robertson, Brockett y Shu, 1987), que son aquellas cuya función de densidad *f(.)* es log-cóncava; es decir:

[4] En relación con los métodos de estimación necesarios, puede verse Castillo, Hadi y Sarabia (1998).

X es fuertemente unimodal $\Leftrightarrow \quad \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right) \leq 0, \quad \forall x \in \Re$.

Estas distribuciones permiten generar curvas de Lorenz del tipo $L_\tau(p) = F(F^{-1}(p) - \tau), \; \tau \geq 0$, siempre que el dominio de X sea del tipo (a,+∞), donde *F(.)* es la función de distribución asociada. Ejemplos de curvas así generadas son las del modelo log-normal, obtenido cuando X sigue una distribución normal, o la correspondiente al modelo de Pareto, que se obtiene cuando X es de valor extremo, con función de distribución $F(x) = 1 - exp(-e^x)$. El principal inconveniente que generan las curvas de Lorenz así obtenidas es que vienen determinadas por modelos excesivamente rígidos para la renta, tal y como se aprecia en los ejemplos comentados[5].

4. S-convexidad y el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton

Ya se ha hecho referencia anteriormente al precedente del Principio de Transferencias presente en Pareto (1897), aunque aún sin formalizar. Sin embargo, H. Dalton (1920, pág. 351) lo plantea en estos términos apoyándose en lo expuesto por Pigou (1912, pág. 24): *Si hay solo dos receptores de renta, y se produce una transferencia de renta del más rico al más pobre, la desigualdad disminuye.* Más adelante, impone la restricción obvia de que la cantidad transferida no debe alterar la posición relativa de ambos perceptores, lo que le conduce a afirmar que la transferencia más igualadora asciende a la mitad de la diferencia de renta que ostentan ambos.

En su versión más general, podemos establecer el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton de la siguiente manera: *Si la distribución de renta y se obtiene de x mediante una transferencia progresiva (regresiva) de renta, o una sucesión finita no vacía de ellas, entonces la desigualdad disminuye (aumenta).* Pasemos ahora a plantear el concepto de transferencia progresiva de forma más rigurosa.

[5] Por supuesto, existen esquemas más complejos y con mayor número de parámetros. En este sentido, puede verse Sarabia, Castillo y Slottje (1999), entre otros.

Definición 4.1: Sean $x,y\in D_N$, dos distribuciones de renta en una población con N individuos, ordenadas en sentido no decreciente, entonces se dice que *y* se obtiene de *x* mediante una *transferencia progresiva de renta* si:

$$x=(x_1,...,x_i,...,x_j,...,x_N)'\Rightarrow y=(x_1,...,x_i+\delta,...,x_j-\delta,...,x_N)' \ , \qquad \delta\in\left(0,\frac{x_j-x_i}{2}\right)$$

y, en tal caso, se dirá que *x* se obtiene de *y* mediante una *transferencia regresiva*.

A continuación, tratemos de asociar este nuevo concepto con la relación de mayoración. A este propósito responde un resultado de 1903 que, expresado en la terminología ya presentada, establece lo siguiente:

Teorema 4.1 (Muirhead, 1903): Sean $x,y\in D_N$, dos distribuciones de renta en una población con N individuos, ordenadas en sentido no decreciente. Entonces, *x* está mayorado por *y* $(x\prec y)$ *si y solo si* *x* se puede obtener de *y* mediante un número finito de transferencias progresivas.

Por lo tanto, debemos concluir que el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton representa la esencia de la relación de mayoración definida entre distribuciones de renta y, por lo tanto, de la relación de dominación en el sentido de Lorenz y la medida de la desigualdad. No obstante, sin menospreciar el interés de la afirmación anterior, debe admitirse que la formulación actual resulta aún escasamente operativa, por lo que, a continuación, se tratará de obtener una caracterización más eficaz de ambos conceptos. Para conseguir este objetivo, recurriremos al conjunto de las matrices biestocásticas, cuya definición se expresa a continuación.

Definición 4.2: Una matriz P_{NxN} se dice *biestocástica* o *doblemente estocástica,* si verifica las siguientes condiciones:

i) $0\le p_{ij}\le 1\ , \quad \forall i,j=1,2,...,N$;

ii) $\sum_{j=1}^{N} p_{ij}=1\ , \quad \forall i=1,2,...,N$;

iii) $\sum_{i=1}^{N} p_{ij}=1\ , \quad \forall j=1,2,...,N$.

Así pues, se trata de matrices finitas, de manera que cada una de sus filas o columnas constituye una distribución de probabilidad. El conjunto de estas matrices está muy relacionado con el de matrices de permutación, como muestra el resultado que se reproduce a continuación.

Teorema 4.2 (Birkhoff, 1976): El conjunto de las matrices biestocásticas de dimensión (NxN) constituye la cápsula convexa del conjunto de matrices de permutación de la misma dimensión.

Así pues, es fácil comprobar que una matriz biestocástica produce un efecto igualador al aplicarla sobre una distribución de rentas, ya que, si P es una matriz (NxN) de este tipo y se tienen dos vectores de renta $x,y \in D_N$, de modo que $x=P.y$, entonces las componentes de x serán combinaciones lineales convexas de las de y. Por lo tanto, se obtiene una redistribución progresiva en el sentido expresado por el Principio de Transferencias. En efecto:

$$x_i = \sum_{j \neq i} y_j p_{ij} + y_i \left(1 - \sum_{j \neq i} p_{ij} \right) = y_i + \sum_{j \neq i} \left(y_j - y_i \right) p_{ij} \ , \quad i = 1,2,...,N \ .$$

Tras esta comprobación, resulta evidente el siguiente resultado, que significó, en su momento, un gran avance en este campo.

Teorema 4.3 (Hardy, Littlewood y Pólya, 1952):

$$(x \prec y) \ \Leftrightarrow \ x = P \cdot y \ , \ \ \forall x, y \in D_N \, ,$$

siendo P alguna matriz biestocástica de dimensión (NxN).

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, quedan caracterizadas las transferencias progresivas de renta a través de operaciones de los vectores de renta con matrices biestocásticas, que permiten una mayor facilidad de manejo algebraico.

Seguidamente, se pretende obtener funciones compatibles con la relación de mayoración, que permitan generar medidas de la desigualdad entre distribuciones de renta, habida cuenta de las intensas relaciones existentes con el Principio de Transferencias y la dominación de Lorenz. Tales funciones se presentan a continuación y dan lugar al concepto de S-convexidad.

Definición 4.3: Una función real *φ(.)*, definida sobre D_N, se dice *convexa en el sentido de Schur* o *S-convexa* cuando es isótona con respecto a la relación de mayoración[6]. Es decir:

$$(x \prec y) \ \Rightarrow \ \varphi(x) \leq \varphi(y).$$

Si la desigualdad es estricta, la función se denomina *estrictamente S-convexa.*

Para facilitar el manejo de las funciones presentadas, es necesaria una caracterización útil, mereciendo destacarse, en este sentido, el siguiente resultado.

Teorema 4.4 (Schur y Ostrowski)[7]: Sea I un intervalo real y *φ(.)* una función definida sobre I^N, diferenciable con continuidad[8]. Entonces, *φ(.)* es S-convexa *si y solo si* se cumplen las siguientes condiciones:

a) *φ(.)* es simétrica sobre I^N.

b) Condición de Schur:

$$\left(x_i - x_j\right) \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right] \geq 0 \ , \quad \forall i \neq j, \ \ \forall x \in D_N \cap I^N \ .$$

Esta caracterización permite una manipulación más ágil de este tipo de funciones. Así, por ejemplo, puede comprobarse que cualquier función simétrica y convexa es también S-convexa (Marshall y Olkin, 1979, pág. 67).

En estas condiciones, parece evidente que las medidas de desigualdad deben ser funciones S-convexas, teniendo en cuenta las equivalencias expuestas. Así, por ejemplo, el índice de Gini (Gini, 1912, 1921) es una función estrictamente S-convexa[9]. Sin embargo, la construcción de las medidas de desigualdad más usuales se asienta en el siguiente resultado, que permite redondear la cadena de implicaciones relacionadas con los conceptos de mayoración y desigualdad.

Teorema 4.5 (Karamata, 1932):

$$(x \prec y) \ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} g\left(x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} g\left(y_i\right) \ , \quad \forall x, y \in D_N$$

---

6 Recuérdese que una función es isótona si mantiene la relación binaria definida, de tipo ordinal.
7 En Ostrowski (1952).
8 Se entiende que existen todas las derivadas parciales y son continuas.
9 Marshall y Olkin (1979) ofrecen un amplio tratamiento de las funciones S-convexas y, en particular, el resultado indicado en el texto.

para todas las funciones reales *g(.)*, convexas y continuas.

Una función del tipo *h(x)*=$\sum_{i=1}^{N} g(x_i)$, donde *g(.)* es convexa, se denomina *separable convexa.* Obviamente, cualquier función de este tipo es S-convexa, sin más que aplicar el Teorema 4.4, pero el recíproco no es cierto. Una consecuencia inmediata del Teorema 4.5 es la siguiente, que lo relaciona directamente con la medición de la desigualdad, a través de la relación de dominación de Lorenz, permitiendo la construcción directa de medidas de desigualdad compatibles con ella.

Corolario 4.1 (Arnold, 1987): Dadas dos variables aleatorias, X e Y, no negativas:

$$X \leq_L Y \quad \Leftrightarrow \quad E\left[g\left(\frac{X}{E(X)}\right)\right] \leq E\left[g\left(\frac{Y}{E(Y)}\right)\right] ,$$

para cualquier función *g(.)*, continua y convexa.

En primer lugar, debe observarse que el Corolario 4.1 se refiere a todas las posibles funciones reales continuas y convexas, de manera que cada selección particular daría como resultado una medida concreta de desigualdad. En este sentido, debe concluirse que la ordenación parcial generada por la dominación de Lorenz sigue, obviamente, estando presente, lo que, por otra parte, establece conexiones inmediatas con la *cuasi-ordenación de intersección* (Sen, 1973, pág.72), que no es más que una ordenación parcial algo menos restrictiva[10]. Evidentemente, la selección de una medida de desigualdad supone obtener una ordenación total, al ser el caso extremo entre los menos restrictivos de la problemática planteada. En dicha selección, el argumento de la compatibilidad con la dominación de Lorenz, aunque sólidamente justificado, enmascara, no obstante, las causas por las que distintas medidas difieren en la ordenación de distribuciones de renta, cuando no están relacionadas mediante la dominación en el sentido de Lorenz, al asumir distintas ponderaciones sobre diferentes tramos de la renta, lo que ha dado lugar a la selección de baterías de medidas de desigualdad compatibles como línea de investigación, que se presentará más adelante.

Por otra parte, el Corolario 4.1 permite la construcción de medidas de desigualdad que comparan distribuciones de renta con igual número de perceptores (D_N), aunque

---

[10] Evidentemente, siempre que los indicadores considerados sean todos ellos compatibles con la relación de Lorenz. Si no es así, la relación entre ambas aproximaciones no permite la inclusión entre ellas.

pudiera no coincidir el montante total de renta que se reparte, a costa de imponer que la desigualdad deba mantenerse en distribuciones proporcionales de renta y que, por tanto, las medidas deban ser funciones homogéneas de primer grado. Sin embargo, para extender las comparaciones a cualquier pareja de vectores de renta (D), lo que supone que el número de perceptores pueda diferir, este resultado está asumiendo el denominado *Principio de la Población de Dalton,* que el autor presenta en 1920, con el nombre de *Principio de adiciones proporcionales de personas* (Dalton, 1920, pág. 357), que puede expresarse de la siguiente forma: "la desigualdad se mantiene frente a réplicas de la población"[11]. Formalmente, esta restricción impone que las medidas de desigualdad deberán ser funciones de los valores de la función de distribución empírica.

Teniendo en cuenta todas las consideraciones anteriores, puede establecerse, como colofón, el siguiente resultado, que permite, además, explicitar la sensibilidad de las diversas medidas a las transferencias de renta.

Teorema 4.6 (Atkinson, 1970; Kakwani, 1980): Si *V(.)* es una función real estrictamente convexa, entonces cualquier medida de desigualdad del tipo $I(x) = E\left[V(x)\right]$ satisface el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton en todos los niveles de renta. Si, además, *V(.)* es diferenciable, su sensibilidad relativa a las transferencias es proporcional a:

$$T(x) = V'(x) - V'(x-\delta), \quad \delta>0.$$

5. Planteamiento axiomático de la desigualdad

No obstante el desarrollo riguroso expuesto con anterioridad, actualmente resulta más pujante el planteamiento axiomático. Consiste en la formulación de propiedades deseables que una buena medida de desigualdad debería cumplir para poder ser seleccionada entre el amplio abanico de posibilidades existentes y es, en este sentido, en el que debe entenderse la nomenclatura de *axiomas*, en este caso. Así pues, esta aproximación permite imponer propiedades más restrictivas en relación con las básicas, para que sirva de ayuda en la selección de medidas de desigualdad que exhiban un buen

[11] Se entiende por réplica de orden r de una población al vector de rentas construido repitiendo r veces cada una de las componentes del vector original, dando lugar a $(x_1,\ldots^{r)},x_1,x_2,\ldots^{r)},x_2,\ldots,x_N,\ldots^{r)},x_N)'$.

comportamiento. Sin ánimo de exhaustividad[12], se exponen a continuación aquellas que son más comúnmente aceptadas, aunque en algún caso se generen también ciertas controversias, con el objetivo de establecer claramente la relación entre esta aproximación y el desarrollo analítico anterior. Obviamente, se entiende que el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton también figura entre ellos, aunque ya se presentó con anterioridad y, por ello, no se repite su formulación en esta sección[13]. En todos ellos, $I(.)$ representa una medida de desigualdad que no es más que una función real definida sobre D, que cumplirá el correspondiente axioma si verifica el contenido que se explicita.

1. Axioma de Simetría o Imparcialidad: Sea $x = (x_1,x_2,...,x_N)'\in$D y sea $y = (x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},...,x_{\sigma(N)})'$, donde $\sigma(.)$ es una permutación en el conjunto {1,2,...,N}. Entonces, $I(x)=I(y)$.

2. Axioma de Invarianza frente a Homotecias o Cambios de Escala:

$$I(\lambda x) = I(x), \quad \forall x \in D,\ \forall \lambda > 0.$$

3. Principio de la Población de Dalton: Sean $x,y\in$D, de manera que y sea una réplica de orden m de la distribución x; es decir, $y = (x',x',...^{m)},x')'$, convenientemente ordenado en sentido no decreciente. Entonces, $I(x) = I(y)$.

4. Axioma de Normalización: En su versión débil, expresa que $I(x)\geq 0,\ \forall x \in D$ y que, además:

$$I(x) = 0 \iff \exists c \geq 0 : x = (c,c,...,c)'.$$

Una versión más fuerte (*normalización del rango*) exige que la medida tome el valor 1 en el caso de extrema desigualdad.

5. Axioma de Adición Constante[14]: Sean $x,y\in$D, de manera que $x = (x_1,x_2,...,x_N)'$, $y = (x_1+c, x_2+c, ..., x_N+c)'$. Entonces, $I(y) \leq I(x),\ \forall c \geq 0$.

Por otra parte, para armonizar este planteamiento con el desarrollado en los epígrafes precedentes, se presenta la siguiente definición, que introduce en el análisis el

[12] Una exposición amplia de axiomas propuestos en la literatura puede verse en Nygard y Sandström (1981) o en Ruiz-Castillo (1986), por ejemplo.
[13] Por ello, los axiomas que se presentan se consideran básicos por su relación con la dominación de Lorenz. Entre los omitidos, destaca por su repercusión y controversia el *axioma de descomponibilidad aditiva* (Bourguignon, 1979), que permite caracterizar una familia de medidas de desigualdad.
[14] Esta propiedad ya está presente en Dalton (1920, pág. 357), razón de su inclusión aquí.

criterio de dominación de Lorenz, a través de la formulación de medidas de desigualdad.

Definición 5.1: Una función real *I(.)*, definida sobre *D*, se dice que es una *medida de desigualdad compatible con la dominación de Lorenz,* cuando es isótona con respecto a esta relación. Es decir:

$$I(x) \geq I(y) \Leftrightarrow x \geq_L y \Leftrightarrow L_x(p) \leq L_y(p), \forall p \in [0,1] .$$

En estas condiciones, puede reconocerse cómo los tres primeros axiomas precedentes constituyen una formulación de las restricciones introducidas en el desarrollo analítico para la construcción de medidas de desigualdad, sobre la base original del Principio de Transferencias de Pigou-Dalton, tal y como lo pone de manifiesto el siguiente resultado.

Teorema 5.1 (Foster, 1985): Una función real *I(.)*, definida sobre *D*, es una medida de desigualdad compatible con la dominación de Lorenz *si y solo si* verifica los cuatro siguientes axiomas:

i) Simetría.
ii) Invarianza frente a Homotecias.
iii) Principio de la Población de Dalton.
iv) Principio de Transferencias de Pigou-Dalton.

Como puede verse, se trata de una reformulación en términos axiomáticos del desarrollo precedente. Como es de esperar, existe una amplia variedad de medidas de desigualdad compatibles con la dominación de Lorenz, entre las que cabe citar el Coeficiente de Variación, el Índice de Gini, la familia de medidas de Atkinson o la de Theil, como las más conocidas.

Este enfoque axiomático ha permitido, como ya se ha expresado, la posibilidad de definir axiomas más restrictivos que intenten caracterizar o singularizar alguna medida concreta, siendo el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton el que más se ha prestado a este tratamiento, por el carácter más instrumental del resto[15]. Estas

---

[15] No obstante, también se ha sugerido el uso de medidas absolutas, lo que supone eliminar el Axioma de Invarianza frente a Homotecias (Moyes, 1987), aunque están más en consonancia con la denominada relación de dominación generalizada de Lorenz (Shorrocks, 1983).

restricciones tratan de enfatizar el esquema de ponderaciones que las correspondientes medidas incorporan sobre los tramos de la distribución, de manera que suele admitirse habitualmente que las medidas ponderen con más intensidad los tramos más bajos de la distribución, siendo el límite de este planteamiento el correspondiente al paradigma *rawlsiano* que actúa solo sobre la mínima renta (Rawls, 1972), aunque cabe argumentar que este enfoque mide aspectos más relacionados con la pobreza que con la desigualdad asociadas a la distribución[16].

En este sentido, Kolm (1976a y b) enuncia su *Principio de Transferencias Decrecientes*, de la siguiente manera: "Si la distribución de renta *y* se obtiene de *x*, mediante una transferencia progresiva, entonces la desigualdad se reduce más cuanto más pobre sea el individuo que la recibe (transferencias decrecientes)". Así pues, si se eligen 4 rentas, de manera que $x_i < x_j < x_h$; $x_i < x_k < x_h$, de modo que las diferencias entre transmisores y receptores se mantengan: $x_j - x_i = x_h - x_k$, el enunciado del Principio se expresa mediante:

$$I(x_1,\ldots, x_i+\delta, \ldots, x_j-\delta, \ldots, x_N) < I(x_1,\ldots, x_k+\delta, \ldots, x_h-\delta, \ldots, x_N), \quad \delta>0,$$

donde $I(.)$ es un indicador de desigualdad. Como puede observarse, este tipo de transferencias también dejan invariante la media de la distribución. Se comprueba cómo la familia de índices de Atkinson y los de entropía (para c<2) verifican este Principio, mientras que no lo hacen ni el índice de Gini ni el Coeficiente de Variación. Por lo tanto, si se acepta el contenido normativo de esta formulación, la elección de medidas de desigualdad queda restringida, aunque no permite caracterizar a ninguna de ellas en particular.

Algo más restrictivas resultan las transferencias compuestas favorables, propuestas por Shorrocks y Foster (1987) que, siguiendo esta idea, componen una transferencia progresiva y una regresiva de la misma cuantía, haciendo que ejerza un mayor impacto sobre la desigualdad aquella que se realiza en el tramo más bajo de rentas. En este caso, los autores prueban que, si las curvas de Lorenz asociadas se

[16] Con esta idea, y teniendo en cuenta que el índice de Gini coincide con el doble del área que encierra la curva de Lorenz (Kakwani, 1980, por ejemplo), se ha sugerido la posibilidad de utilizar indicadores basados en elementos geométricos sobre la curva de Lorenz, como la máxima distancia a la diagonal (Pietra, 1914-15, 1948; Schutz, 1951), su longitud (Kakwani, 1980) o áreas ponderadas mediante funciones específicas (Mehran, 1976; Casas y Núñez, 1991, entre otros).

cruzan una sola vez, este *Principio de Sensibilidad a las Transferencias* equivale a la utilización del Coeficiente de Variación.

En cualquier caso, resulta difícil caracterizar una única medida de desigualdad utilizando planteamientos de este tipo que, además, implican un fuerte contenido normativo, lo que dificulta el que sean admitidos con un notable grado de consenso[17].

6. Criterios alternativos de comparación

Dadas las características de las relaciones de mayoración y de dominación de Lorenz entre distribuciones de renta, se han propuesto otras alternativas, buscando una ordenación más fina que las parciales que inducen las relaciones anteriores. En este sentido, se exponen a continuación algunas de ellas, aunque no debe olvidarse que la ordenación parcial obtenida es, de algún modo, inherente a la problemática de definir un orden vectorial.

La primera relación que se presenta es la de dominación mediante *curvas de Lorenz generalizadas* (Shorrocks, 1983), que tiene características similares a la de Lorenz, pero construida sobre las curvas generalizadas de Shorrocks:

$$LG_x(p) = \overline{x} \cdot L_x(p) \ , \quad p \in [0,1] \ , \ x \in D \ ,$$

de manera que la relación de dominación se establece mediante:

$$x \leq_{LG} y \Leftrightarrow LG_x(p) \geq LG_y(p) \ , \quad \forall p \in [0,1] ,$$

de la que su autor argumenta que, pese a tener también estructura de orden parcial, permite obtener un número superior de comparaciones válidas que la de Lorenz. Sin embargo, el cambio de escala inducido con la multiplicación por la renta media provoca que estas curvas ya no midan desigualdad, sino que asuman postulados relacionados con la valoración social del bienestar, aunque desde un punto de vista estrictamente monetario, a través de funciones del tipo $W(x) = \overline{x}.(1-I_D)$ donde I_D es un indicador de desigualdad, por lo que a veces se les llaman curvas de *nivel de vida-renta* (Pena,

[17] Otras aportaciones en esta misma línea de restricción del Principio de Transferencias pueden verse en Fleurbaey y Michel (2001), entre otros.

Callealta, Casas, Merediz y Núñez, 1996). Estas curvas *LG(.)* son no decrecientes, convexas y pasan por los puntos (0,0) y $(1,\overline{x})$.

Otra alternativa considerada ha sido el denominado *criterio de dominación por rangos* (Nygard y Sandström, 1981), cuya definición se presenta a continuación para dos vectores de renta $x,y \in D_N$:

$$x \leq_R y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \ , \quad \forall i = 1,2,...,N \ .$$

Como puede observarse, está muy relacionado con la mayoración. Por otra parte, sigue generando una estructura de orden parcial y está también estrechamente vinculado con la dominación generalizada de Lorenz, ya que puede comprobarse fácilmente que:

$$x \leq_R y \quad \Rightarrow \quad x \leq_{LG} y \ .$$

Una de las propuestas que mayor atención está recibiendo actualmente la constituye la *dominación estocástica* de diversos órdenes (Muliere y Scarsini, 1989, entre otros). Se trata de una relación definida entre las funciones de distribución de las variables aleatorias que representan las diversas rentas. En este sentido, sea X una variable aleatoria no negativa que representa la renta de una sociedad, y sea *F(.)* su función de distribución; entonces las funciones de distribución de órdenes sucesivos se definen a través de:

$$F_1(z) \ = \ F(z) \ = \ P(X \leq z) \ , \quad \forall z \geq 0$$
$$F_j(z) = \int_{-\infty}^{z} F_{j\text{-}1}(t)dt \ , \quad \forall z \geq 0, \quad \forall j = 2,3,....$$

y, en estas condiciones, se define la relación de *dominación estocástica de orden j* mediante la siguiente expresión, para dos distribuciones de renta *x* e *y*, con funciones de distribución *F(.)* y *G(.)*, respectivamente:

$$x \leq_{D_j} y \quad \Leftrightarrow \quad F_j(z) \geq G_j(z) \ , \quad \forall z \geq 0 \ .$$

En sus órdenes primero y segundo, mantiene una estrecha relación con las dominaciones de rangos y generalizada de Lorenz, respectivamente. De nuevo, las relaciones generadas presentan estructuras de orden parcial, aunque más finas progresivamente, a medida que se aproximan al paradigma *rawlsiano*. En la actualidad, la investigación se centra principalmente en las implicaciones normativas de la relación de dominación estocástica de tercer orden (Shorrocks y Foster, 1987; Davies y Hoy, 1994, entre otros).

Una manera de alcanzar un ordenación total sería asumir el ideal *rawlsiano* (Rawls, 1972), definiendo la siguiente relación para dos distribuciones de renta $x,y \in$D:

$$x \leq_{rw} y \quad \Leftrightarrow \quad \underset{i}{Mín}\{x_i\} \leq \underset{j}{Mín}\{y_j\},$$

pero, obviamente, solo tiene en cuenta la renta del perceptor más pobre y está más cercano al análisis de la pobreza que al de la desigualdad.

Sin embargo, existen otras propuestas más sofisticadas en la literatura como, por ejemplo, la relación de dominación de Lorenz de órdenes sucesivos, pero existen dudas de que estén midiendo desigualdad (Nygard y Sandström, 1981; Ramos y Sordo, 2001).

Otra alternativa muy diferente supone poner el énfasis más en las diferencias acumuladas de rentas con respecto a la media que en la proporción acumulada de recursos repartidos, a diferencia de las curvas de Lorenz, definiendo lo que se ha dado en llamar *curvas absolutas de Lorenz* (Moyes, 1987):

$$A_X(p) = \int_0^p \left[F^{-1}(t) - E(X)\right] dt, \quad p \in [0,1].$$

En este caso, los resultados obtenidos ya no son directamente compatibles con la curva de Lorenz, y los axiomas que caracterizan sus resultados son distintos a los aquí expuestos. Esta línea de investigación está recibiendo cierta atención en los últimos años (Ramos y Sordo, 2003).

7. Indicadores sintéticos de desigualdad y nivel de vida

De los epígrafes anteriores, se deduce la imposibilidad de aislar una medida de desigualdad que resulte claramente superior al resto. Por esta razón, García, Núñez, Rivera y Zamora (2002) proponen considerar una batería de indicadores de desigualdad que presenten buenas propiedades, y utilizar la primera componente principal como indicador para medir la información común que contienen que, obviamente, deberá ser la desigualdad. Este indicador de desigualdad dependerá críticamente del período en que se lleve a cabo el estudio y, por ello, Domínguez, Núñez y Rivera (2004) y Domínguez y Núñez (2005) proponen cómo adaptar este indicador para afrontar análisis de naturaleza dinámica.[18]

Así pues, supongamos que se dispone de p indicadores de desigualdad, que proporcionan valores en diferentes instantes del tiempo, para una serie de casos que se desea comparar como pudieran ser, por ejemplo, unidades geográficas:

$$\left\{ I_1(x,t), I_2(x,t), ..., I_p(x,t) \right\}, \quad x \in S, t \in T = \left\{ t_1, t_2, ..., t_k \right\},$$

donde S es el conjunto de casos considerados. Por lo tanto, en cada instante temporal se dispone de un conjunto de datos cuya dimensión viene determinada por p y el cardinal del conjunto S, de manera que la descomposición espectral de la matriz de correlaciones será:

$$R(t) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j(t) \cdot u_j(t) \cdot u'_j(t) \quad , \lambda_1(t) \geq \lambda_2(t) \geq ... \geq \lambda_p(t), t \in T,$$

siendo $\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_p(t)$ los correspondientes autovalores, mientras que $u_1(t)$, $u_2(t)$, ..., $u_p(t)$ serán los autovectores. En estas condiciones, el predictor lineal óptimo, en el sentido de que proporciona el mínimo error cuadrático medio, será (Peña, 2002):

$$Z_1(x,t) = Y(x,t) \cdot u_1(t) = \sum_{j=1}^{p} u_{1j}(t) \cdot Y_j(x,t) = \sum_{j=1}^{p} u_{1j}(t) \cdot \frac{I_j(x,t) - \overline{I}_j(t)}{S_{I_j}(t)},$$

donde, obviamente, $Y_j(t)$ son los indicadores de desigualdad de base tipificados. Además, el error cometido decrece cuando la proporción de varianza explicada por la primera componente principal crece. A partir de aquí, siguiendo las directrices básicas expuestas en García, Núñez, Rivera y Zamora (2002), pero adaptadas a la situación aquí planteada como en Domínguez, Núñez y Rivera (2004), se obtiene:

$$Z_1(x,t) = \sum_{j=1}^{p} \frac{u_{1j}(t)}{S_{I_j}(t)} \cdot I_j(x,t) - \sum_{j=1}^{p} \frac{u_{1j}(t)}{S_{I_j}(t)} \cdot \overline{I}_j(t) = \sum_{j=1}^{p} a_j(t) \cdot I_j(x,t) - K(t).$$

[18] También es posible adaptar la distancia DP2 de Ivanovic-Pena, aunque ésta funciona mejor cuando los indicadores de base están poco correlacionados, como ocurre al medir bienestar social a partir de baterías de indicadores (García, Núñez, Rivera y Zamora, 2002).

Y, por lo tanto, el indicador sintético de desigualdad basado en la primera componente principal que se propone es:

$$Z^*(x,t) = \frac{Z_1(x,t) + K(t)}{\sum_{j=1}^{p} a_j(t)} = \sum_{j=1}^{p} a_j^*(t) \cdot I_j(x,t) .$$

Puede observarse cómo el indicador sintético *Z*(x,t)* es una combinación lineal convexa de los indicadores de desigualdad de partida.

Sin embargo, el indicador obtenido está diseñado para efectuar comparaciones entre los casos que componen S, pero de manera transversal (*cross section*), debido a la dependencia del tiempo que exhiben sus coeficientes. Este rasgo resta posibilidades de utilización al indicador sintético, ya que éste será diferente en cada instante temporal considerado. Sin embargo, Domínguez, Núñez y Rivera (2004) y Domínguez y Núñez (2005) sugieren una adaptación que supera este inconveniente.

En efecto, para ello se considera la hipótesis de que la estructura de correlación de los indicadores de partida es similar a lo largo del tiempo. Para ello, se utiliza un contraste de hipótesis basado en el estadístico M de Box (Rencher, 1995) para contrastar la hipótesis nula de igualdad de matrices de covarianzas. Si se admite la hipótesis nula, se puede obtener un indicador sintético dinámico de desigualdad, utilizando el razonamiento anterior sobre la primera componente principal común, obtenida para la matriz de correlaciones muestral combinada (Flury, 1984)[19]. Dicha matriz de correlaciones se obtiene considerando los datos de todos los instantes temporales conjuntamente. De esta manera, desaparece la dependencia temporal:

$$Z_1(x,t) = Y(x,t) \cdot u_1 = \sum_{j=1}^{p} u_{1j} \cdot Y_j(x,t) = \sum_{j=1}^{p} u_{1j} \cdot \frac{I_j(x,t) - \overline{I}_j}{S_{I_j}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \frac{u_{1j}}{S_{I_j}} \cdot I_j(x,t) - \sum_{j=1}^{p} \frac{u_{1j}}{S_{I_j}} \cdot \overline{I}_j = \sum_{j=1}^{p} a_j \cdot I_j(x,t) - K .$$

[19] Si no se acepta la hipótesis nula de igualdad de matrices de correlaciones, aún puede utilizarse una adaptación del Análisis del Espacio Común (Krzanowski, 1979), para conseguir un vector lo más próximo posible a todos los primeros autovectores obtenidos para los indicadores sintéticos transversales. Este vector será útil para la construcción de un indicador sintético dinámico de desigualdad, siempre que la distancia entre dichos autovectores no sea excesivamente grande (Domínguez, Núñez y Rivera, 2004; Domínguez y Núñez, 2005).

Por lo tanto, ahora el indicador sintético dinámico de desigualdad será:

$$Z^*(x,t) = \frac{Z_1(x,t) + K}{\sum_{j=1}^{p} a_j} = \sum_{j=1}^{p} a_j^* \cdot I_j(x,t) .$$

De nuevo, se obtiene una combinación lineal convexa de los indicadores de partida, pero ahora los coeficientes son constantes en el tiempo, lo que permite las comparaciones longitudinales, además de las transversales.

En este sentido, en Pena, Callealta, Casas, Merediz y Núñez (1996) y en García, Núñez, Rivera y Zamora (2002) se argumenta la selección de la siguiente batería de indicadores de desigualdad, de acuerdo con las propiedades que estos satisfacen:

- Medida de Desigualdad de Atkinson de orden 0.5 (ATKIN0.5):

$$ATKIN0.5 = 1 - \frac{1}{\mu}\left(\sum_{i=1}^{k} f_i \sqrt{x_i}\right)^2 ,$$

  donde μ es la media aritmética de la distribución de ingresos.

- Medida de Desigualdad de Atkinson de orden 1 (ATKIN1):

$$ATKIN1 = 1 - \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{x_i}{\mu}\right)^{f_i} .$$

- Medida de Desigualdad de Atkinson de orden 2 (ATKIN2):

$$ATKIN2 = 1 - \left(\frac{\mu_A}{\mu}\right),$$

  donde μ_A es la media armónica de la distribución de ingresos.

- Coeficiente de Variación al Cuadrado Normalizado (CV2.NORM):

$$CV2.NORM = \frac{CV^2}{1 + CV^2} ,$$

  donde CV es el coeficiente de variación de la distribución de ingresos.

- Índice de Gini (GINI):

$$GINI = \frac{1}{2\mu}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left|x_i - x_j\right| f_i f_j .$$

- Índice de Pietra (PIETRA):

$$PIETRA = \frac{1}{2\mu}\sum_{i=1}^{k}\left|x_i - \mu\right| f_i \ .$$

- Medida de Desigualdad de Theil de Orden 1 Normalizada (TH1.NORM):

$$TH1.NORM = 1 - \exp\left(-\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{k} x_i \log\left(x_i/\mu\right) f_i\right).$$

donde f_i indica la correspondiente distribución de frecuencias relativas.

En estas condiciones, el indicador sintético de desigualdad obtenido será compatible con el criterio de dominación de Lorenz, ya que todos los indicadores seleccionados cumplen las condiciones expuestas en el Teorema 5.1, aunque en una versión débil, ya que el índice de Pietra solo satisface el Principio de Transferencias de Dalton-Pigou de manera débil[20]. La demostración es inmediata teniendo en cuenta que los indicadores sintéticos propuestos son combinaciones lineales convexas de la batería inicial compuesta por los indicadores de desigualdad expuestos en la lista anterior.

En relación con el nivel de vida, debe indicarse que, al igual que ocurre con el bienestar social, la construcción de indicadores presenta numerosas dificultades metodológicas, como puede verse, por ejemplo, en Pena (1977). En cualquier caso, es norma habitual valorar el nivel de vida de las unidades perceptoras a partir de su posición económica, en lo que ha venido en llamarse *nivel de vida-renta* (Pena, Callealta, Casas, Merediz y Núñez, 1996). En este sentido, se propone el estudio del nivel de vida a partir de funciones de valoración social de la forma:

$$W(x) = W\left[\mu(x), I_D(x)\right],$$

de manera que sean no decrecientes con relación a la renta media, $\mu(x)$, y no crecientes con el nivel de desigualdad, cuantificado a través de un indicador de desigualdad adecuado $I_D(x)$. Esta propuesta implica asumir que la sociedad prefiere disponer de mayor renta, en situaciones similares de desigualdad, y que presenta aversión a la presencia de desigualdad en el reparto de la renta (u otras posibilidades de medir la

[20] El índice de Pietra solo satisface el Principio de Transferencias, admitiendo que transferencias progresivas que supongan la misma cuantía con relación a la renta media, dejan inalterado el indicador y, por lo tanto, la desigualdad entre los valores antes y después de la transferencia no es estricta.

posición económica como el gasto o el ingreso). Como se recordará, las funciones de valoración social asociadas a las curvas generalizadas de Shorrocks, presentadas al discutir criterios alternativos de comparación de desigualdad, son casos particulares de esta formulación general.

Por lo tanto, será dicho caso particular el propuesto aquí, junto con la selección del indicador sintético dinámico como indicador de desigualdad. Así pues, el indicador sintético de nivel de vida que se propone es el siguiente:

$$INV(x,t) = \mu(x,t) \cdot \left[1 - Z^*(x,t)\right], \quad x \in S, t \in T ,$$

siendo *μ(x,t)* la renta media del caso *x* en el instante *t*, y *Z*(x,t)* el indicador sintético dinámico de desigualdad, valorado en los mismos elementos, siempre que sea posible su construcción porque las estructuras dinámicas de correlación de los indicadores de base se puedan admitir similares.

8. Evolución de la desigualdad y el nivel de vida en los países de la Unión Europea, durante 1993-1999

Como ilustración de los conceptos y la metodología expuesta a lo largo de este trabajo, se presenta el análisis de la desigualdad y el nivel de vida derivado de los ingresos netos por hogar en los países de la Unión Europea. Un análisis más detallado puede verse en Domínguez, Núñez y Rivera (2005).

Los datos utilizados proceden del Panel de Hogares de la Unión Europea (PHOGUE), para el período 1994-2000. Esta Encuesta está diseñada y coordinada por EUROSTAT, que es la Oficina de Estadística de la Unión Europea (U.E.)[21]. Puesto que los ingresos de cada oleada vienen referidos siempre al año anterior, el período de estudio será el 1993-1999, que cubre casi la última década del siglo XX, lo que convierte al estudio en claramente relevante.

[21] Una descripción detallada del PHOGUE puede verse en Peracchi (2002) o en Ayala y Sastre (2002), por ejemplo.

Tabla 8.1: *Tamaños muestrales totales y tamaños muestrales considerados, entre paréntesis.*

PAÍS	Ola 1 1993	Ola 2 1994	Ola 3 1995	Ola 4 1996	Ola 5 1997	Ola 6 1998	Ola 7 1999
Dinamarca (DK)	3482 (3478)	3223 (3218)	2955 (2951)	2745 (2740)	2512 (2505)	2387 (2381)	2281 (2273)
Holanda (NL)	5187 (5139)	5110 (5035)	5179 (5097)	5049 (5019)	4963 (4922)	5023 (4981)	5008 (4976)
Bélgica (BE)	3490 (3454)	3366 (3343)	3210 (3191)	3039 (3013)	2876 (2863)	2712 (2691)	2571 (2555)
Francia (FR)	7344 (7108)	6722 (6679)	6600 (6555)	6176 (6142)	5866 (5849)	5610 (5594)	5345 (5331)
Irlanda (IE)	4048 (4038)	3584 (3569)	3173 (3164)	2945 (2935)	2729 (2723)	2378 (2372)	1951 (1944)
Italia (IT)	7115 (6915)	7128 (7004)	7132 (7026)	6713 (6627)	6571 (6478)	6370 (6273)	6052 (5989)
Grecia (GR)	5523 (5480)	5220 (5173)	4907 (4851)	4604 (4543)	4211 (4171)	3986 (3952)	3918 (3893)
España (ES)	7206 (7142)	6522 (6449)	6267 (6133)	5794 (5714)	5485 (5439)	5418 (5301)	5132 (5048)
Portugal (PT)	4881 (4787)	4916 (4870)	4849 (4807)	4802 (4167)	4716 (4666)	4683 (4645)	4633 (4606)
Austria (AT)	- (-)	3380 (3367)	3292 (3281)	3142 (3130)	2960 (2952)	2815 (2809)	2644 (2637)
Finlandia (FI)	- (-)	- (-)	4139 (4138)	4106 (4103)	3920 (3917)	3822 (3818)	3104 (3101)
Suecia (SE)	- (-)	- (-)	- (-)	5891 (5286)	5807 (5208)	5732 (5165)	5734 (5116)
Alemania (DE)	6207 (6196)	6336 (6329)	6259 (6252)	6163 (6156)	5962 (5955)	5847 (5845)	5693 (5687)
Luxemburgo(LU)	- (-)	2978 (2976)	2472 (2471)	2654 (2651)	2523 (2521)	2552 (2551)	2373 (2373)
Reino Unido (UK)	5126 (5041)	5032 (4999)	5011 (4991)	4965 (4958)	4996 (4975)	4951 (4935)	4890 (4866)

Fuente: *Domínguez, Núñez y Rivera (2005).*

Dado que el diseño de la Encuesta es un panel, uno de los aspectos más preocupantes es la paulatina retirada de hogares de la muestra, fenómeno conocido como *attrition.* En este caso, aunque es patente su presencia, los tamaños muestrales finales parecen suficientemente grandes para que la representatividad de los resultados en un estudio de este tipo no quede demasiado afectada. Por otra parte, no se han eliminado del estudio Luxemburgo, Austria, Finlandia y Suecia, pese a la falta de datos en algunas oleadas, puesto que no hay objeción alguna para utilizar el resto de oleadas donde se dispone de datos. Un resumen de estos aspectos puede verse en la Tabla 1 anterior, donde aparecen los tamaños muestrales por oleadas de todos los países que integran el estudio. Entre paréntesis figura el tamaño muestral efectivo, después de eliminar aquellos hogares para los que no hay información sobre el ingreso neto.

Por otra parte, las economías de escala internas del hogar se han ajustado utilizando como escala de equivalencia el ingreso neto *per capita*, como aquella que proporciona una interpretación más clara (Pena, Callealta, Casas, Merediz y Núñez, 1996)[22]. Además, para homogeneizar las comparaciones, los ingresos netos se han expresado en dólares USA de 1996, utilizando los tipos de cambio facilitados por EUROSTAT.

La batería de indicadores simples de desigualdad que se ha utilizado coincide con la presentada en el epígrafe anterior. De esta manera, los resultados del contraste M de Box sobre la igualdad de las matrices de correlación transversales se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 8.2: *Resultados de la prueba M de Box.*

Box's M		126.017
F	Aprox.	0.818
	df1	126.000
	df2	12975.749
	Sig.	0.932

Fuente: *Domínguez, Núñez y Rivera (2005).*

Así pues, no puede rechazarse la hipótesis nula de igualdad de matrices de correlaciones transversales. En estas condiciones, de acuerdo con la metodología expuesta en el epígrafe anterior, el indicador sintético dinámico de desigualdad, obtenido a partir de la primera componente principal de la matriz de correlaciones combinada es el siguiente:

$$\begin{aligned} Z^*(x,t) \;=\; & 0.299\,ATKIN0.5(x,t) \;+\; 0.154ATKIN1(x,t) + 0.025ATKIN2(x,t) + \\ & + 0.047CV2.NORM(x,t) + 0.102GINI(x,t) + 0.219PIETRA(x,t) + 0.154TH1.NORM(x,t) \end{aligned}$$

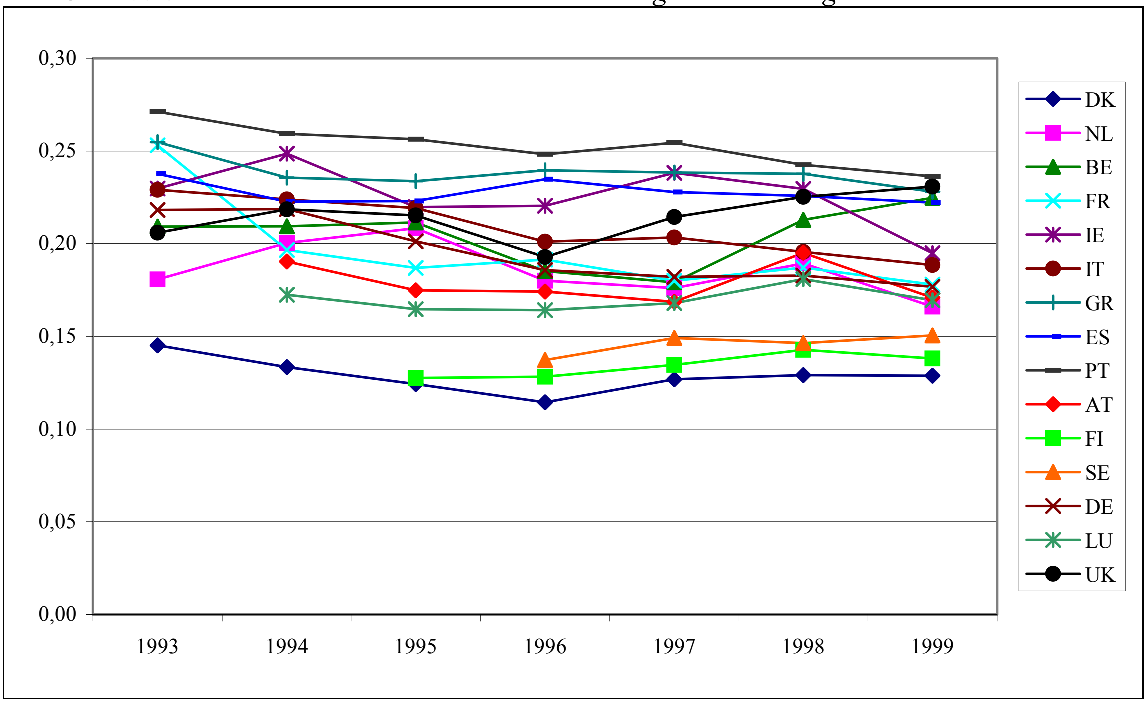
y, además, la primera componente principal absorbe un porcentaje de varianza superior al 80%. Una vez calculados sus valores para todos los países y oleadas considerados, los resultados obtenidos se presentan en el Gráfico 8.1 que se reproduce a continuación.

22 La gama de escalas de equivalencia utilizadas en la literatura es muy amplia, sin que existan criterios claros que permitan la selección de una frente al resto. Por otra parte, la selección de cada una de ellas condiciona los resultados obtenidos, tal y como puede verse en Casas, Domínguez y Núñez (2001) o en Domínguez, Núñez y Rivera (2002), por ejemplo, donde también puede verse una panorámica más amplia en relación con las diversas escalas de equivalencia.

Como puede observarse[23], se aprecia que los mayores niveles de desigualdad aparecen, por este orden, en Portugal, Grecia y España, mientras que Italia es el país que les sigue. Todos ellos presentan una tendencia prácticamente decreciente en el periodo analizado. Sin embargo, Dinamarca es el país que presenta menor desigualdad, seguido de Finlandia y Suecia durante todo el periodo.

El resto de países de la U.E. se sitúan en una franja central, pero con tendencias diversas. Así, Luxemburgo presenta una estabilidad en sus niveles de desigualdad, que contrasta con los repuntes sufridos por el Reino Unido y Bélgica, hacia la mitad del periodo. Sin embargo, Alemania, Francia y Austria presentan una tendencia decreciente, mientras que Irlanda muestra unos resultados oscilatorios, pero con una acusada disminución en la fase final del periodo.

Gráfico 8.1: *Evolución del índice sintético de desigualdad del ingreso. Años 1993 a 1999.*



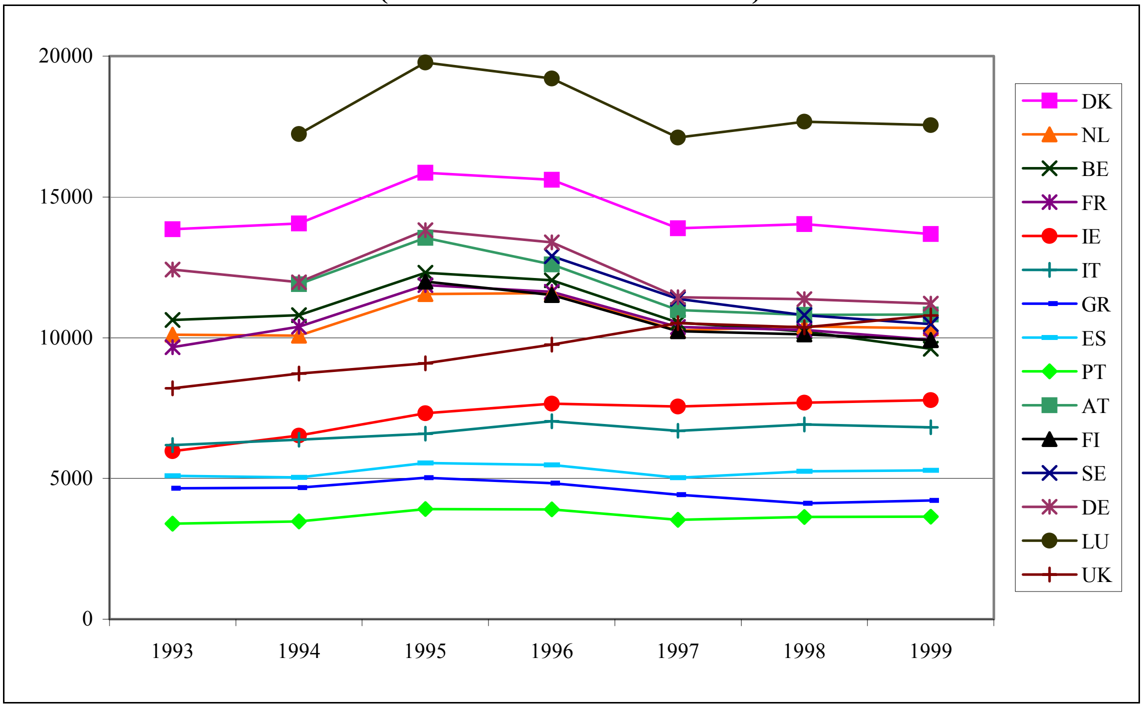
Fuente: *Domínguez, Núñez y Rivera (2005).*

Por otra parte, se ha utilizado como indicador de nivel de vida el presentado en el epígrafe anterior, incluyendo el indicador sintético dinámico de desigualdad en su formulación.

[23] Domínguez, Núñez y Rivera (2005) comprueban la robustez de los grupos descritos de países en relación con sus niveles de desigualdad, utilizando un Análisis de Conglomerados (*Cluster Analysis)* Jerárquico.

De esta manera, a partir de los ingresos netos *per cápita*, expresados en dólares USA de 1996, se han obtenido los ingresos netos medios que, junto con los valores obtenidos para el indicador sintético dinámico de desigualdad, han permitido elaborar las trayectorias que componen el Gráfico 8.2, que se muestra a continuación. Obviamente, los valores del que podríamos denominar *indicador sintético dinámico de nivel de vida,* vienen expresados en dólares USA de 1996.

Gráfico 8.2: *Evolución del índice sintético de nivel de vida. Años 1993 a 1999.*
(En dólares USA del año 1996)



Fuente: *Domínguez, Núñez y Rivera (2005).*

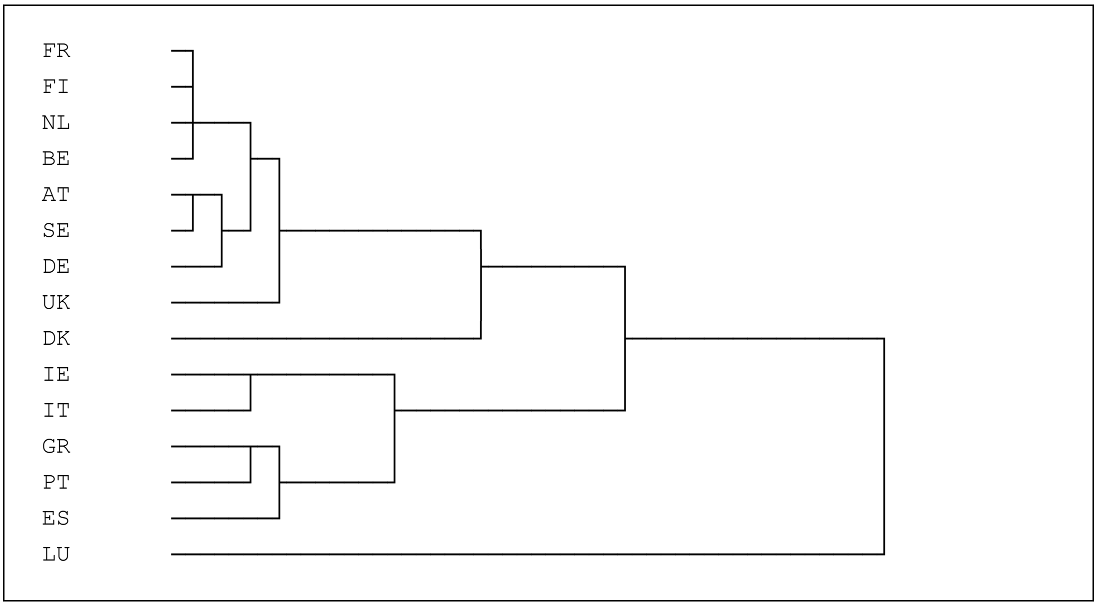
Por lo tanto, al estudiar la evolución de los niveles de vida en los países de la U.E., durante la década de los noventa, se observa un comportamiento claramente diferente a la evolución de la desigualdad. En primer lugar, se aprecia como es claramente Luxemburgo el país que ostenta el nivel de vida más alto, seguido por Dinamarca.

Irlanda e Italia presentan comportamientos similares, aunque siendo claramente creciente la evolución del nivel de vida en el primer caso, mientras que es algo más oscilatorio en el segundo. Los países con menor nivel de vida son, por este orden, España, Grecia y Portugal, en los que tampoco se aprecian mejoras significativas si se comparan con sus niveles al principio del periodo.

Finalmente, el resto de los países se sitúan en una franja central con comportamientos muy parecidos, excepto quizás en el caso del Reino Unido. También parece apreciarse una cierta convergencia entre los niveles de vida de estos países.

Teniendo en cuenta la multiplicidad de trayectorias que se observan en el Gráfico 8.2, se presenta a continuación el dendrograma obtenido utilizando un Análisis de Conglomerados Jerárquico, para comprobar la robustez de los grupos descritos. En concreto, se utilizó el método de aglomeración del centroide y la distancia euclídea al cuadrado, como medida de proximidad. Obviamente, solo se ha utilizado el subperiodo para el que se dispone de datos de todos los países considerados.

Gráfico 8.3: *Dendrograma de clasificación de los países según la evolución del índice sintético de nivel de vida. Años 1996 a 1999.*



Fuente: *Domínguez, Núñez y Rivera (2005).*

Puede comprobarse cómo queda confirmada la existencia de los cinco grupos descritos. Como complemento, se presenta a continuación un mapa ilustrativo de su situación, donde entre paréntesis se indica el número de países que hay en cada grupo.

Gráfico 8.4: *Grupos de países en la Unión Europea, según la evolución de su nivel de vida.*

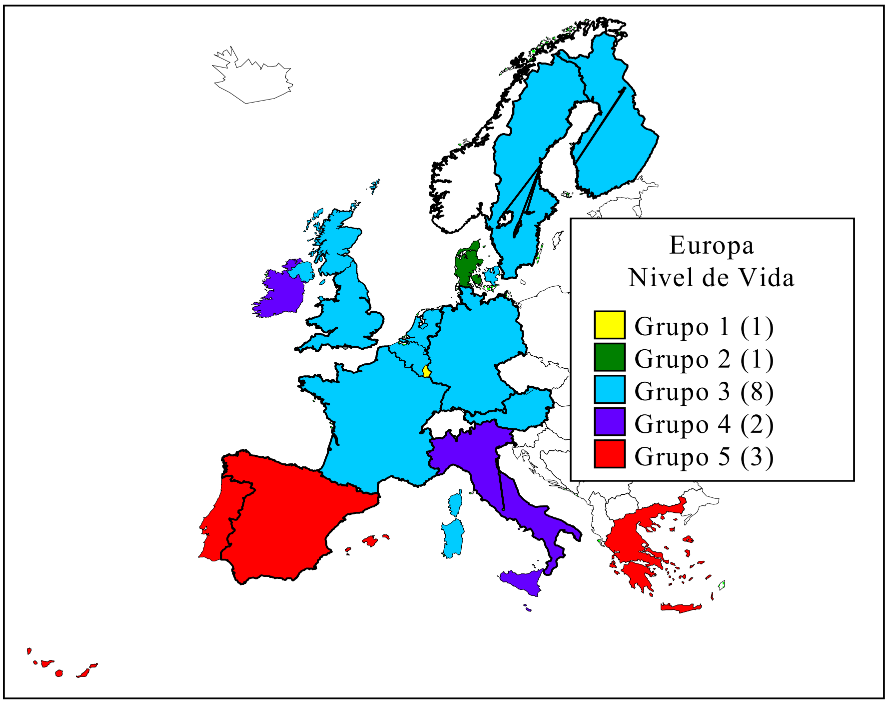
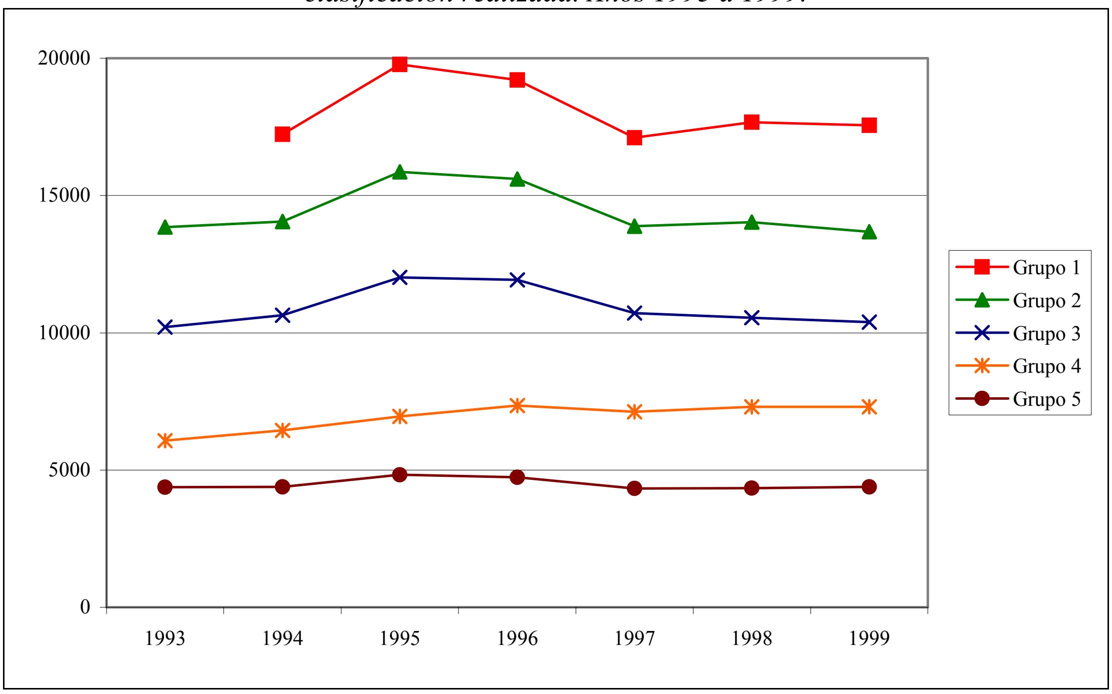


Gráfico 8.5: *Evolución del índice sintético medio de nivel de vida por grupos, según la clasificación realizada. Años 1993 a 1999.*



Fuente: *Domínguez, Núñez y Rivera (2005).*

Finalmente, el Gráfico 8.5 anterior muestra la evolución del valor medio que toma el indicador sintético de nivel de vida, calculado en los cinco grupos encontrados. Puede apreciarse como, a excepción del Grupo 4 (Irlanda e Italia), los niveles de vida en 1999 se mantienen cercanos a las posiciones en que se hallaban en 1993. También debe destacarse cómo estos grupos presentan disparidades pronunciadas, que les hacen aparecer bastante diferenciados, en cuanto a su nivel de vida se refiere.

9. Conclusiones

A lo largo de este trabajo, se ha expuesto la teoría estadística subyacente precisa para una buena comprensión del significado de las medidas de desigualdad económica, resultando que todas ellas están firmemente asentadas sobre las relaciones de mayoración y de dominación de Lorenz entre distribuciones de renta. Estos rasgos condicionan notablemente la propuesta de indicadores que puedan servir como buenas medidas de desigualdad. Para ello, se ha optado por realizar una revisión histórica crítica, que permite recuperar términos poco frecuentes en los estudios actuales sobre desigualdad económica, así como encontrar su relación con las tendencias y propuestas más actuales. Así pues, se ha dejado patente la razón por la que las curvas de Lorenz siguen resistiendo los embates de la teoría, en un campo de notable producción editorial, desde su propuesta que data de más de un siglo de antigüedad.

Además, se ha establecido claramente que es el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton el que se constituye en piedra angular sobre la que asentar las actuales medidas de desigualdad, ya que resulta ser la característica esencial del concepto de mayoración de rentas, a través de las matrices biestocásticas. Esta razón ha conducido a una línea actual de investigación, consistente en restringir este Principio para que llegue a caracterizar o singularizar el comportamiento de medidas concretas de desigualdad, aunque a costa de establecer esquemas de ponderación sobre la distribución de rentas.

La conexión con la dominación en el sentido de Lorenz queda establecida a través de las funciones convexas en el sentido de Schur o S-convexas, que determinan el tipo de indicadores adecuados para medir la desigualdad, tal y como queda patente mediante las funciones separables convexas y el Teorema de Karamata.

Las relajaciones sobre el primitivo concepto de mayoración en el espacio de distribuciones de renta con N perceptores (D_N), para eliminar las restricciones de igualdad en número de perceptores y de cantidad total de recursos al efectuar comparaciones y así pasar al espacio global de rentas (D), son las que determinan los axiomas básicos de la desigualdad, tal y como se configuran en el Teorema de Foster. Requisitos posteriores, como los axiomas de descomposición aditiva, permiten caracterizar familias de medidas de desigualdad y efectuar operaciones útiles, pero lo hacen imponiendo restricciones que no están vinculadas directamente al concepto de desigualdad.

Otras relaciones derivadas de la comparación global de distribuciones de renta no han permitido, hasta la fecha, conseguir una relación de orden total frente a la parcial derivada de la dominación en el sentido de Lorenz. Esto permite dar cuerpo a la afirmación de A. Sen, en el sentido de que la desigualdad es intrínsecamente un concepto gobernado por una *cuasi-ordenación*, al efectuar comparaciones, lo que sugiere la utilización de baterías de medidas de desigualdad como alternativa.

Por lo tanto, la obtención de una medida de desigualdad de consenso implica la imposición de restricciones sobre los axiomas básicos que, no obstante, no hagan perder la conexión con los conceptos básicos que les sirven de soporte.

Finalmente, el indicador sintético dinámico de desigualdad se configura como una alternativa válida frente al problema de la selección de una única medida de desigualdad, al admitir un conjunto de indicadores simples como punto de partida. La propia configuración del indicador sintético como combinación lineal convexa de los indicadores de partida, permite que sea compatible con el criterio de dominación de Lorenz siempre y cuando lo sean todos los indicadores sobre los que está construido.

Agradecimientos

Este artículo se ha beneficiado de la financiación proveniente de los Proyectos de Investigación UAH-PI2004/034, de la Universidad de Alcalá, y PBI-05-004, de la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha y el Fondo Social Europeo. Por otra parte, el autor agradece los comentarios y sugerencias emitidas por los asistentes al *VI Seminario de Investigación del Área de Métodos Cuantitativos,* donde se presentó una versión preliminar de este trabajo, así como a los dos evaluadores anónimos, que han contribuido a mejorar la versión final.

Bibliografía

ARNOLD, B.C. (1987). *Majorization and the Lorenz order: A brief introduction.* Lecture Notes in Statistics. Springer Verlag. New York.

ARNOLD, B.C.; ROBERTSON, C.A.; BROCKETT, P.L. y SHU, B.-Y. (1987). "Generating ordered families of Lorenz curves by strongly unimodal distributions". *Journal of Business and Economic Statistics,* 5, 2, 305-308.

ATKINSON, A.B. (1970). "On the measurement of inequality". *Journal of Economic Theory,* 2, 244-263.

AYALA, L. y SASTRE, M. (2002) "What determines income mobility differences across the European Union?". *Working Papers of the Institute for Social and Economic Research, 2002-07*. Colchester: University of Essex.

BARTELS, C.P.A. (1977). *Economics Aspects of Regional Welfare.* Martinus Nijhoff Sciences Division.

BIRKHOFF, G. (1976). "Tres observaciones sobre el Álgebra Lineal". *Univ. Nacional de Tucuman Rev.*, Serie A, 5, 147-151.

BOURGUIGNON, F. (1979). "Decomposable income inequality measures". *Econometrica,* 47, 901-920.

CASAS, J.M.; DOMÍNGUEZ, J. y NÚÑEZ, J.J. (2001) "Sobre la utilización de las escalas de equivalencia en el estudio de la desigualdad y la pobreza. El caso de España". *Anales de Economía Aplicada. XV Reunión Anual de ASEPELT-España*. La Coruña. Publicación en CD-ROM (2003).

CASAS, J.M.; HERRERÍAS, R. y NÚÑEZ, J.J. (1997). "Familias de Formas Funcionales para estimar la Curva de Lorenz". *Actas de la IV Reunión Anual de ASEPELT-España.* Servicio de Estudios de Cajamurcia, 171-176. Reimpreso en *Aplicaciones estadísticas y económicas de los sistemas de funciones indicadoras* (Herrerías, R.; Palacios, F. y Callejón, J., eds.). Univ. Granada, 2001, 119-125.

CASAS, J.M. y NÚÑEZ, J.J. (1987). "Algunas Consideraciones sobre las Medidas de Concentración. Aplicaciones". *Actas de las II Jornadas sobre Modelización Económica,* 49-62. Barcelona. Reimpreso en *Aplicaciones estadísticas y económicas de los sistemas de funciones indicadoras* (Herrerías, R.; Palacios, F. y Callejón, J., eds.). Univ. Granada, 2001, 111-118.

CASAS, J.M. y NÚÑEZ, J.J. (1991). "Sobre la Medición de la Desigualdad y Conceptos Afines". *Actas de la V Reunión Anual de ASEPELT-España,* Caja de Canarias. Vol.2, 77-84. Reimpreso en *Aplicaciones estadísticas y económicas de los sistemas de funciones indicadoras* (Herrerías, R.; Palacios, F. y Callejón, J., eds.). Univ. Granada, 2001, 127-133.

CASTAGNOLI, E. y MULIERE, P. (1990). "A note on inequality measures and the Pigou-Dalton Principle of Transfers". Publicado en *Income and Wealth Distribution, Inequality and Poverty.* (Dagum, C. y Zenga, M., eds.) Springer Verlag, 171-182.

CASTILLO, E.; HADI, A.S. y SARABIA, J.M. (1998). "A method for estimating Lorenz curves". *Communications in Statistics. Theory and Methods,* 27, 2037-2063.

COWELL, F.A. (1995). *Measuring inequality.* 2ª ed. LSE Handbooks in Economics. Prentice Hall/Harvester Wheatsheaf.

DAGUM, C. (2001). "Desigualdad del rédito y bienestar social, descomposición, distancia direccional y distancia métrica entre distribuciones". *Estudios de Economía Aplicada,* 17, 5-52.

DAGUM, C. y ZENGA, M., eds. (1990). *Income and Wealth Distribution, Inequality and Poverty.* Springer Verlag.

DALTON, H. (1920). "The measurement of the inequality of incomes". *Economic Journal,* 30, 348-361.

DAVIES, J. y HOY, M. (1994). "The normative significance of using third-degree stochastic dominance in comparing income distributions". *Journal of Economic Theory,* 64, 520-530.

DOMÍNGUEZ, J. y NÚÑEZ, J.J. (2005). "The evolution of economic inequality in the EU countries during the nineties". *First Meeting of the Society for the Study of Economic Inequality (ECINEQ).* Palma de Mallorca. [http://www.ecineq.org].

DOMÍNGUEZ, J.; NÚÑEZ, J.J. y RIVERA, L.F. (2002) "Una perspectiva dinámica del análisis de la desigualdad en España, a través de escalas de equivalencia". *Actas de la XVI Reunión Anual de ASEPELT-España*. Publicación en CD-ROM. Ed. McGraw-Hill, Madrid.

DOMÍNGUEZ, J.; NÚÑEZ, J.J. y RIVERA, L.F. (2004). "A longitudinal synthetic indicator of inequality. The case of EU countries". *XXIX Simposio de Análisis Económico.* Pamplona. [http://www.webmeets.com/files/papers/SAE/2004].

DOMÍNGUEZ, J.; NÚÑEZ, J.J. y RIVERA, L.F. (2005). "Tendencias de los niveles de vida en los países de la UE en la década de los 90". *VII Reunión de Economía Mundial.* Madrid. [http://www.ucm.es /info/sieterem].

FLEURBAEY, M. y MICHEL, P. (2001). "Transfer Principles and inequality aversion, with an application to optimal growth". *Mathematical Social Sciences,* 42, 1-11.

FLURY, B. (1984). "Common principal components in k groups". *Journal of the American Statistical Association,* 79, 388, 892-898.

FOSTER, J.E. (1985). "Inequality measurement". Publicado en *Fair Allocation* (H.P. Young, ed.), Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol.33, Providence, American Mathematical Society, 31-68.

GARCÍA, C.; NÚÑEZ, J.J.; RIVERA, L.F. y ZAMORA, A.I. (2002). "Análisis comparativo de la desigualdad a partir de una batería de indicadores. El caso de las Comunidades Autónomas españolas en el periodo 1973-1991". *Estudios de Economía Aplicada,* Vol. 20, nº1, 137-154.

GASTWIRTH, J.L. (1971). "A general definition of the Lorenz curve". *Econometrica,* 39, 1037-1039.

GINI, C. (1912). "Variabilitá e Mutabilitá: Contributo allo studio delle distribuzioni e relazioni statistiche". *Studi Economico-Giuridici dell'Universitá di Cagliari,* 3, 1-158.

GINI, C. (1921). "Measurement of inequality of incomes". *The Economic Journal,* 31, 124-126.

GUPTA, M.R. (1984). "Functional form for estimating the Lorenz curve". *Econometrica,* 52, 5, 1313-1314.

HARDY, G.H.; LITTLEWOOD, J.E. y POLYA, G. (1929). "Some simple inequalities satisfied by convex functions". *The Messenger of Mathematics,* 26, 145-153.

HARDY, G.H.; LITTLEWOOD, J.E. y POLYA, G. (1952). *Inequalities.* 2ª ed. Cambridge University Press.

HOUGHTON, J.C. (1978). "Birth of a parent: the Wakeby distribution for modelling flood blows". *Water Resources Research,* 14, 1105-1109.

IRITANI, J. y KUGA, K. (1983). "Duality between the Lorenz curves and the income distribution functions". *Economic Studies Quarterly,* 23, 9-21.

KAKWANI, N.C. (1980). *Income Inequality and Poverty. Methods of Estimation and Policy Applications.* Oxford University Press.

KAKWANI, N.C. y PODDER, N. (1973). "On the estimation of Lorenz curves from grouped observations". *International Economic Review,* 14, 2, 278-291.

KARAMATA, J. (1932). "Sur une inégalité rélative aux fonctions convexes". *Publ. Math. Univ. Belgrade,* 1, 145-148.

KENDALL, M. y STUART, A. (1977). *The Advanced Theory of Statistics,* Vol. 1, 4ª ed. C. Griffin. London.

KOLM, S.-Ch. (1976a). "Unequal inequalities I". *Journal of Economic Theory,* 12, 416-442.

KOLM, S.-Ch. (1976b). "Unequal inequalities II". *Journal of Economic Theory,* 13, 82-111.

KRZANOWSKI, W.J. (1979). "Between-groups comparison of principal components". *Journal of the American Statistical Association*, 74, 703-707. Correction note (1981), *Journal of the American Statistical Association*, 76, 1022.

KUZNETS, S. (1953). *Share of upper income groups in income and savings.* National Bureau of Economic Research. New York.

LORENZ, M.O. (1905). “Methods of measuring the concentration of wealth”. *Journal of the American Statistical Association*, 9, 209-219.

MARSHALL, A.W. y OLKIN, I. (1979). *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications.* Academic Press. New York.

MEHRAN (1976). “Linear measures of income inequality”. *Econometrica,* 44, 805-809.

MOYES, P. (1987). “A new concept of Lorenz domination”. *Economics Letters,* 23, 203-207.

MUIRHEAD, R.F. (1903). “Some methods applicable to identities and inequalities of symmetric algebraic functions of n letters”. *Proceedings of Edinburgh Mathematical Society,* 21, 144-157.

MULIERE, P. y SCARSINI, M. (1989). “A note on stochastic dominance and inequality measures”. *Journal of Economic Theory,* 49, 314-323.

NYGARD, F. y SANDSTROM, A. (1981). *Measuring Income Inequality*. Amqvist & Wiksell International. Stockholm.

OSTROWSKI, A.M. (1952). “Sur quelques applications des fonctions convexes et concaves au sens de I. Schur”. *Journal of Math. Pures Appl.,* 9, 253-292.

PARETO, V. (1897). *Cours d’Economie Politique.* Rouge. Lausanne.

PENA, J.B. (1977). *Problemas de la medición del bienestar y conceptos afines*. INE. Madrid.

PENA, J.B. (Dir.); CALLEALTA, F.J.; CASAS, J.M.; MEREDIZ, A. y NÚÑEZ, J.J. (1996). *Distribución Personal de la Renta en España.* Pirámide. Madrid.

PEÑA, D. (2002) *Análisis de datos multivariantes.* McGraw-Hill. Madrid.

PERACCHI, F. (2002) “The European Community Household Panel: A Review”. *Empirical Economics*, 27, 63-90.

PIETRA, G. (1914-15). “Delle relazioni tra gli indici di variabilitá”. Nota I en *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti,* LXXIV, Parte II, 775-804.

PIETRA, G. (1948). *Studi di statistica metodologica.* Giuffre. Milan.

PIGOU, A. C. (1912). *Wealth and welfare.* McMillan. New York.

RAMOS, H. y SORDO, M.A. (2001). “El orden de Lorenz generalizado de orden j, ¿un orden en desigualdad?”. *Estudios de Economía Aplicada,* 19, 139-149.

RAMOS, H. y SORDO, M.A. (2003). “Dispersion measures and dispersive orderings”. *Statistics and Probability Letters,* 61, 123-131.

RAWLS, J. (1972). *A theory of justice.* Oxford University Press. London.

RENCHER, A.C. (1995). *Methods of Multivariate Analysis.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York.

RUIZ-CASTILLO, J. (1986). "Problemas conceptuales en la medición de la desigualdad". *Hacienda Pública Española*, 101, 17-31.

RUIZ-CASTILLO, J. (1987). *La medición de la pobreza y de la desigualdad en España, 1980-81.* Estudios Económicos, nº42. Servicio de Estudios del Banco de España. Madrid.

SARABIA, J.M.; CASTILLO, E. y SLOTTJE, D. (1999). "An ordered family of Lorenz curves". *Journal of Econometrics,* 91, 43-60.

SARABIA, J.M.; CASTILLO, E. y SLOTTJE, D. (2002). "Lorenz ordering between McDonald's generalized functions of the income size distribution". *Economics Letters,* 75, 265-270.

SCHUR, I. (1923). "Uber eine klasse von mittelbildungen mit anwendungen die determinaten". *Theorie Sitzungsber Berlin Math. Gesellschaft,* 22, 9-20.

SCHUTZ, R.R. (1951). "On the measurement of income inequality". *American Economic Review*, 41, 107-122.

SEN, A. (1973). *On Economic Inequality.* Clarendon Press, Paperbacks. Oxford.

SEN, A. y FOSTER, J.E. (1999). *On Economic Inequality. Expanded edition.* Clarendon Press Paperbacks. Oxford University Press.

SHORROCKS, A. (1983). "Ranking income distributions". *Economica,* 50, 3-18.

SHORROCKS, A. y FOSTER, J.E. (1987). "Transfer sensitive inequality measures". *Review of Economic Studies,* 54, 485-497.

ZUBIRI, I. (1985). "Una introducción al problema de la medición de la desigualdad". *Hacienda Pública Española,* 95, 291-317.

REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (2). Páginas 109–124.
Diciembre de 2006. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: http://www.upo.es/RevMetCuant/art7.pdf

Una aproximación de los precios hedónicos al seguro privado de enfermedad en España

Ordaz Sanz, José Antonio
Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide
Correo electrónico: jaordsan@upo.es

Murillo Fort, Carles
Departamento de Ciencias Experimentales y de la Salud; CRES; ORLA-UPF.
Universitat Pompeu Fabra
Correo electrónico: carles.murillo@upf.edu

RESUMEN

El seguro privado de enfermedad constituye uno de los principales ramos de la actividad aseguradora de los países desarrollados. En España, en el año 2005, representa el 8,84% del total de primas emitidas de seguro directo. Pero su importancia reside no solo en su papel en el mercado financiero, sino también en el ámbito de la sanidad. El análisis de cualquier aspecto relativo a este sector económico concita, por tanto, un indudable interés.

Este trabajo se centra en el estudio de los precios de las pólizas del seguro privado de enfermedad. La metodología que se ha utilizado para este fin es la relativa a la teoría de los precios hedónicos, que permite considerar, junto a las variables de carácter personal de los asegurados, las distintas prestaciones que pueden incluir las pólizas a la hora de analizar sus precios. La significatividad de variables, como las referidas a la cobertura de asistencia psicológica o de gastos de determinadas prótesis, sugiere que este enfoque resulte, en principio, idóneo para abordar esta cuestión.

Palabras clave: seguro privado de enfermedad; teoría de precios hedónicos.
Clasificación JEL: C20; G22; I11.
2000MSC: 62P20; 91B24; 91B28.

Artículo recibido el 29 de noviembre de 2006 y aceptado el 18 de diciembre de 2006.

A Hedonic Price Approach to the Health Private Insurance in Spain

ABSTRACT

The private health insurance is one of the most important sectors of the insurance industry in the developed countries. In Spain, in 2005, this activity means 8.84% of the emitted premiums of the whole direct insurance. However, its importance relies not only on the financial market but on the medical field as well. So the analysis of any aspect related to this economic sector has, with no doubt, a great interest.

This work is focused on the study of the prices of the private health insurance policies. The methodology we have used is based on the hedonic price theory. This perspective allows to take into consideration the benefits that policies have, in order to study the fixing process of prices, in addition to the personal features of the policyholders. The significance of variables such as the psychological assistance or the coverage of some prosthesis suggests that this approach could be appropriate to analyse this issue.

Keywords: health private insurance; hedonic price theory.
JEL classification: C20; G22; I11.
2000MSC: 62P20; 91B24; 91B28.

1. Introducción y objetivo

El seguro privado de enfermedad constituye uno de los principales ramos de la actividad aseguradora en España. Las cifras del sector así lo avalan, por lo que el estudio de cualquier cuestión referida al mismo merece atención.

Uno de los aspectos más interesantes y, a la vez, menos estudiados en este sector se refiere a la evolución de los precios de las pólizas emitidas en relación con las características ofrecidas por las mismas. La creciente variedad de prestaciones que las compañías incluyen en sus pólizas permite plantearse un estudio de carácter hedónico de los precios de dichas pólizas, esto es, considerar las variables que caracterizan y conforman las pólizas a la hora de analizar los precios que presentan en el mercado.

El principal objetivo de esta investigación consiste en profundizar, inicialmente, en el conocimiento de los factores que pueden ser tenidos en cuenta para establecer una función de precios hedónicos de las pólizas de este ramo del seguro. El objetivo final en el futuro sería la construcción de un índice de precios hedónico.

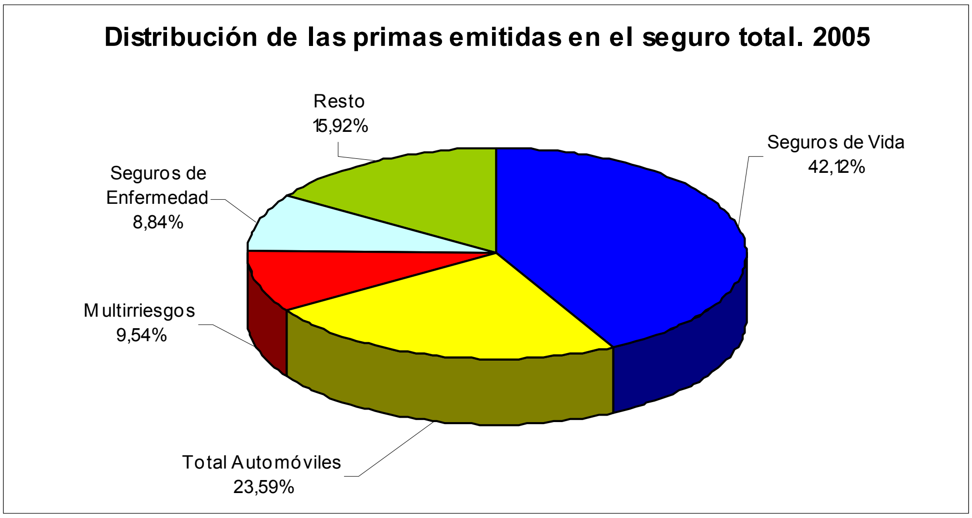
La estructura del trabajo es como sigue. Después de esta breve introducción, en la Sección 2 se ofrece una visión general de las principales características del mercado del seguro privado de enfermedad en España. Con ello se pone de manifiesto la importancia del sector, al tiempo que se pueden conocer los aspectos más relevantes referidos a la estructura del mismo. Seguidamente, en la Sección 3, se presenta la metodología y el análisis empírico de carácter econométrico realizado en esta investigación. La teoría de los precios hedónicos puede resultar adecuada para el estudio del mecanismo de establecimiento de precios de las pólizas del sector. Variables como el sexo, la edad y la zona de residencia se perfilan como fundamentales para establecer una función de precios hedónicos; junto a ellas, distintos niveles de cobertura y de prestaciones contempladas, tales como la asistencia psicológica, la hospitalización psiquiátrica, el reembolso de determinadas prótesis, los tratamientos de hemodiálisis o la asistencia en el extranjero, pueden completar el conjunto de factores a considerar.

El trabajo finaliza con las conclusiones y discusión de los principales aspectos que pueden tenerse en cuenta para futuras investigaciones sobre este tema. Tras ello, figuran las referencias bibliográficas citadas en este artículo.

2. Principales características del sector del seguro privado de enfermedad en España

El volumen de primas del sector ascendió en España en 2005 a 4.326 millones de euros, lo que supone el 8,84% del total de primas emitidas, situándolo como cuarto ramo en importancia del conjunto del seguro y tercero en el agregado de no vida (Gráfico 1).

Gráfico 1. Distribución de las primas emitidas en el seguro total en España.



Fuente: Ministerio de Economía y Hacienda, DGSFP (2006). Elaboración propia.

Su desarrollo no solo debe contemplarse en el marco de la industria del seguro, sino también dentro del sistema sanitario. Por este motivo, su análisis puede resultar de enorme interés desde distintas perspectivas, dadas las importantes repercusiones de tipo económico, social e incluso político que puede tener.

A este respecto, cabe indicar que el gasto privado en sanidad en España ha visto incrementar su peso en los últimos años respecto al total del gasto sanitario: mientras en 1997 dicho peso era del 27,5%, en 2003 alcanzaba el 28,6% (Tabla 1).

En cuanto al nivel de cobertura de la población que alcanza el sector sanitario privado en España, éste ronda el 12% (excluidos los asegurados pertenecientes a las Mutualidades Públicas de Funcionarios). Si se compara este indicador con los de otros países de la Unión Europea (UE), se pueden constatar apreciables diferencias y diversidad en las cifras entre todos ellos (Tabla 2).

Tabla 1. Evolución del gasto sanitario en España en millones de euros, relación con el PIB y estructura de su composición. 1997-2003.

	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Gasto total	37.052	39.594	42.511	45.569	49.405	53.127	57.699
% del PIB	7,5	7,5	7,5	7,5	7,6	7,6	7,7
Gasto público	26.877	28.616	30.681	32.673	35.213	37.948	41.200
% del PIB	5,4	5,4	5,4	5,4	5,4	5,4	5,5
% del gasto total	72,5	72,3	72,2	71,7	71,3	71,4	71,4
Gasto privado	10.176	10.978	11.831	12.896	14.192	15.179	16.499
% del PIB	2,1	2,1	2,1	2,1	2,2	2,2	2,2
% del gasto total	27,5	27,7	27,8	28,3	28,7	28,6	28,6

Fuente: Ministerio de Sanidad y Consumo, Instituto de Información Sanitaria (2006). Elaboración propia.

Tabla 2. Niveles de cobertura del seguro voluntario de enfermedad, expresado en % respecto al total de población (UE-15).

País (Año)	Sustitutivo	Complementario / Suplementario
Alemania (1999)	9%	9%
Austria (1999)	0,2%	18,8% (complementario) 12,9% (suplementario)
Bélgica (2000)	7,1%	30-50% (complementario)
Dinamarca (1999)	No	28% (principalmente complementario)
España (1999)	0,6%	11,4%
Finlandia (1996)	No	Niños < 7 años: 34,8% (suplementario) Niños 7-17 años: 25,7% (suplementario) Adultos: 6,7% (suplementario)
Francia (2000)	Marginal	94% (complementario)
Grecia (2000)	No	10% (suplementario)
Holanda (1999)	24,7%	> 60% (fundamentalmente complementario)
Irlanda (2000)	No	45%
Italia (1999)	No	15,6%
Luxemburgo (2000)	No	70% (principalmente complementario)
Portugal (1998)	No	12% (principalmente suplementario)
Reino Unido (2000)	No	11,5% (principalmente suplementario)
Suecia (1999)	No	1-1,5% (principalmente suplementario)

Fuente: Mossialos, Thomson *et al*. (2002).

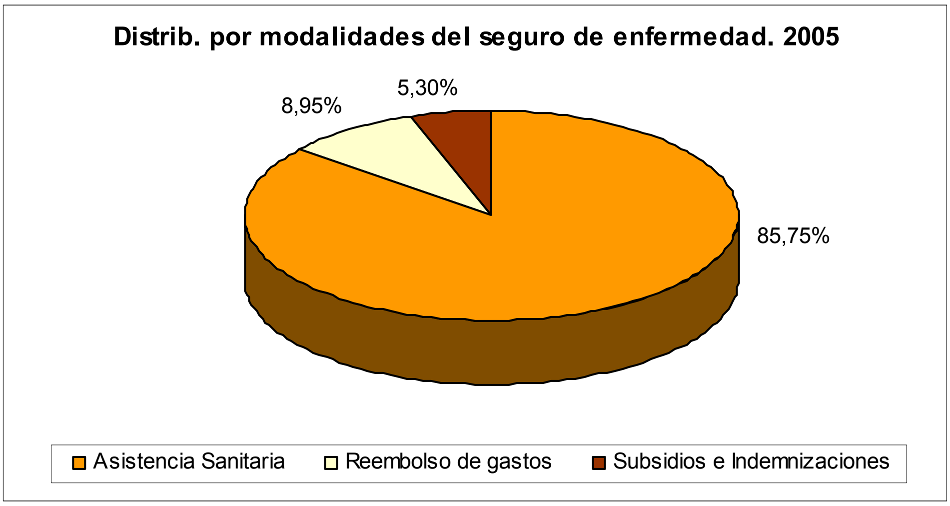
En este punto, cabe indicar que se puede establecer una clasificación del seguro voluntario de enfermedad según si:

- sustituye la cobertura que de otro modo ofrecería el Estado (*sustitutivo*);
- provee cobertura complementaria de servicios excluidos o no cubiertos plenamente por el Estado, incluyendo cobertura sufragada mediante co-pagos impuesta por el sistema sanitario público (*complementario*);
- provee cobertura suplementaria para un acceso más rápido a la atención y una mayor capacidad de elección por parte del consumidor (*suplementario*).

De la cifra española del 12%, la inmensa mayoría (11,4%) se corresponde con seguros de tipo complementario y suplementario.

Tres son principalmente las modalidades que las entidades aseguradoras ofrecen a sus clientes en este sector: la asistencia sanitaria, el reembolso de gastos médicos y el pago de subsidios e indemnizaciones. De ellas, la asistencia sanitaria representa el 85,75% del volumen total de primas emitidas, mientras que los reembolsos y subsidios e indemnizaciones suponen el resto (Gráfico 2).

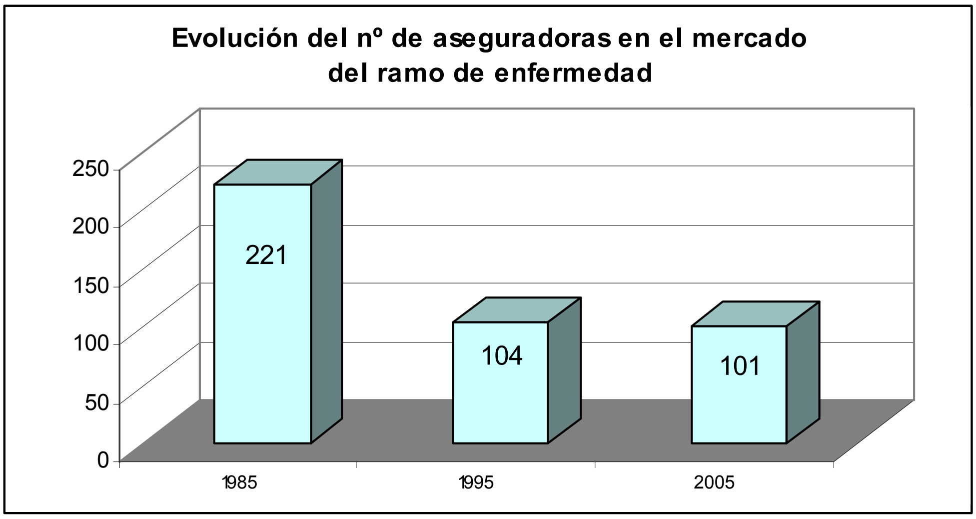
Gráfico 2. Distribución por modalidades del seguro de enfermedad en España.



Fuente: ICEA (2006). Elaboración propia.

Un rasgo muy significativo del mercado del seguro privado de enfermedad es su alta concentración. En 20 años, de 1985 a 2005, en España han pasado en este mercado de operar 221 entidades a hacerlo solamente 101 (Gráfico 3).

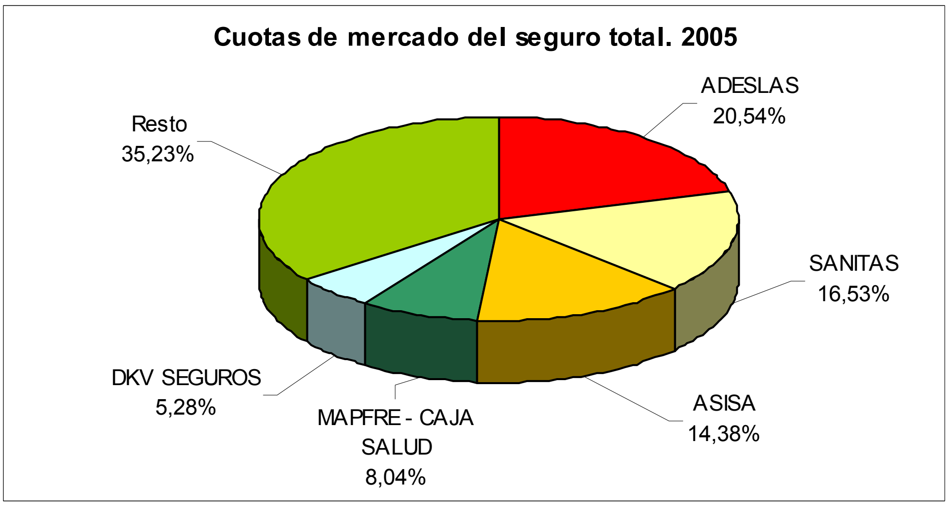
Gráfico 3. Evolución del nº de aseguradoras en el mercado del ramo de enfermedad en España.



Fuente: UNESPA (1994, 1997) y Ministerio de Economía y Hacienda, DGSFP (2006). Elaboración propia.

Este proceso de concentración se ha dado fundamentalmente de 1985 a 1995, como consecuencia de la búsqueda de economías de escala y competitividad por parte de las entidades de cara a operar en el Mercado Único europeo. El proceso se ha registrado también de manera similar en toda la UE. Fruto de ello puede verse cómo, en 2005, el 51,45% del volumen total de negocio del ramo es controlado únicamente por 3 compañías. Y las 5 primeras representan el 64,77% (Gráfico 4).

Gráfico 4. Cuotas de mercado del seguro privado de enfermedad en España.



Fuente: ICEA (2006). Elaboración propia.

3. Metodología y resultados

En un mercado como éste, caracterizado por su gran concentración, una cuestión que se antoja fundamental es el conocimiento de las principales variables que pueden incidir en la fijación de los precios de las pólizas.

La metodología de esta investigación se basa en la teoría de los precios hedónicos, que establece que los productos heterogéneos se valoren según las utilidades que generen sus atributos. En este sentido, pueden servir de referencia los trabajos iniciales de Tinbergen (1956), Griliches (1961) y Rosen (1974). En el caso español, resulta muy interesante el trabajo, más reciente, de Bover e Izquierdo (2001).

Los métodos más habituales que se utilizan en la fijación de los precios de las pólizas de la actividad aseguradora se basan fundamentalmente en criterios actuariales. También pueden encontrarse trabajos basados en la teoría del ajuste del riesgo [Lee *et al*. (1997), Newhouse (1998), Greenwald *et al*. (1998), Buglioli y Ortún (2000)]. Desde esta óptica, los factores básicos que se consideran como condicionantes del precio de las pólizas son las características personales de los individuos: edad (sobre todo), sexo…, que determinan, en gran medida, el riesgo de ocurrencia de la contingencia asegurada o la utilización de los servicios ofertados por las aseguradoras.

La teoría de los precios hedónicos supone, por su parte, una concepción del análisis de los precios diferente. El planteamiento es sumamente sencillo. De acuerdo con esta teoría, un bien z se caracteriza por estar conformado por el conjunto de sus características z_i, pudiéndose expresar mediante el vector:

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

El precio del bien z, $p(z)$, es función entonces del precio de todas sus características z_i:

$$p(z) = p(z_1, z_2, \ldots, z_n) = f\left(p(z_1), p(z_2), \ldots, p(z_n)\right).$$

La función de precios, $p(z)$, puede adoptar distintas especificaciones matemáticas: lineal, logarítmica, semilogarítmica…

El enfoque de los precios hedónicos presenta como ventaja frente a otras teorías, como la del ajuste del riesgo, la consideración no solo de las características personales de los individuos, sino también de las prestaciones de las pólizas. Pero más allá de esto, el auténtico potencial de la teoría de los precios hedónicos reside en la ulterior posibilidad de construir índices de precios compuestos distintos de los habituales de Laspeyres o de Paasche, donde se ponderan, con el número de pólizas, los precios simples de las mismas. La metodología hedónica permite estudiar la evolución de los precios de las pólizas teniendo en cuenta también su calidad, lo cual se hace justamente atendiendo a las prestaciones que ofrecen.

En la literatura pueden encontrarse innumerables estudios basados en la teoría de los precios hedónicos para bienes tan diversos como: la vivienda [Linneman (1980), Fleming y Nellis (1985), Bover y Velilla (2001)], los ordenadores personales [Cole *et al*. (1986), Landefeld y Grimm (2000), Bernd y Rappaport (2001), Izquierdo y Matea (2001)] o, incluso, el vino [Oczkowski (1994), Nerlove (1995), Combris *et al*. (2000), Castells (2005)]. En el ámbito sanitario también hay referencias [Jensen y Morrisey (1990), por ejemplo], si bien parecen no centrarse exactamente en la misma cuestión que aquí se trata, por lo que en este sentido el presente trabajo podría resultar innovador, al menos en el caso de España.

En este artículo solo nos centramos en el establecimiento de una función de precios hedónicos para un único momento en el tiempo, dejando la vía abierta para la construcción de un índice de precios en el futuro, siempre y cuando se pueda disponer de la información temporal necesaria.

En cuanto a los datos que se utilizan en este estudio, éstos provienen directamente de un sondeo del mercado español en el año 2006; en unos casos, de consultas directas en oficinas aseguradoras y, en otros, del análisis de las prestaciones y los correspondientes precios de las pólizas ofertadas por las entidades a través de sus páginas web en Internet. En total, se han estudiado 252 registros correspondientes a 5 entidades aseguradoras que operan en España. Se han analizado los precios de las pólizas correspondientes a diferentes tramos de edad: 4, 10, 25, 36, 45, 50 y 64 años. Igualmente, se ha tenido en cuenta el sexo del asegurado, así como el lugar de su residencia. En relación a esta última variable, se han considerado tres provincias de distinto nivel de desarrollo: Barcelona, Sevilla y Soria.

Por último, y fundamental para nuestro estudio, se han tomado características que, además de la asistencia médica básica, ofrecen las distintas pólizas y que definen, finalmente, su "calidad": transporte en ambulancia, asistencia psicológica, hospitalización psiquiátrica, cobertura de determinadas prótesis, tratamiento de hemodiálisis, planes de medicina preventiva, asistencia urgente en el extranjero y derecho a una segunda opinión medica.

Como se podrá ver enseguida, el análisis del precio de las distintas opciones de pólizas de seguro disponibles en el mercado permite comprobar que podría establecerse una función de precios hedónicos basada en sus características propias. Para la elaboración de este estudio se ha utilizado el *software* “Econometric Views v.5.0”.

Tras un proceso de selección previo sobre la forma funcional a elegir para $p(z)$, se ha optado por la de tipo semilogarítmico, por ser la que mejores resultados ha proporcionado para los datos disponibles, tanto en términos de significatividad como de bondad del ajuste. Otra ventaja adicional de este tipo de especificación es la facilidad de interpretación de sus parámetros. Así pues, la variable dependiente de nuestro modelo es el logaritmo del precio de la mensualidad pagada por la póliza en cuestión (LOG_MENS). En cuanto a las variables explicativas, se han introducido como variables ficticias siguiendo un esquema aditivo.

Los resultados del modelo finalmente elegido se ofrecen en la Tabla 3.

La función de precios planteada se ha estimado según el método de los mínimos cuadrados ponderados. La razón estriba en que el análisis de heteroscedasticidad de las perturbaciones aleatorias, llevado a cabo a través del test de White, reveló inicialmente ciertos problemas en este sentido. La corrección realizada, utilizando la ponderación oportuna, proporciona estimadores eficientes. En cuanto a la presencia de posibles problemas de autocorrelación en las perturbaciones aleatorias, el valor del estadístico de Durbin-Watson obtenido es 1,33; dicho valor no resulta del todo determinante, pero dado que los datos son de tipo transversal, la lógica sugiere que no cabe esperar problemas de esta naturaleza en la realidad.

Por lo que respecta a la idoneidad del modelo en su globalidad, el estadístico F indica su plena significatividad. Este hecho, así como la significatividad de todas las variables explicativas que aparecen, sugieren, además, la ausencia de problemas de multicolinealidad en esta especificación del modelo, lo cual se ha visto refrendado por los valores muy cercanos a cero observados en la matriz de correlaciones de estas variables.

El valor del coeficiente de determinación (0,55), por su parte, podría entenderse que no es muy elevado. No obstante, como señala Gujarati (2003), no se debe sobrevalorar el papel del R^2. Lo que reviste mayor importancia es la justificación teórica del modelo elegido, los signos de los coeficientes estimados y su significatividad.

Tabla 3. Estimación de la función de precios hedónicos.

Dependent Variable: LOG_MENS
Method: Least Squares (Weighted)
Included observations: 252
Weighting series: 1/SQR(PREDIC)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	3.851259	0.027971	137.6878	0.0000
ED_10	-0.094444	0.026607	-3.549549	0.0005
ED_25	0.083936	0.026921	3.117825	0.0020
ED_36	0.118644	0.026981	4.397249	0.0000
ED_45	0.207262	0.027135	7.638202	0.0000
ED_50	0.273733	0.027250	10.04534	0.0000
ED_64	0.711634	0.027991	25.42373	0.0000
VARON	-0.061945	0.014630	-4.234022	0.0000
SEVILLA	-0.108073	0.017965	-6.015628	0.0000
SORIA	-0.115437	0.017957	-6.428450	0.0000
PSICO	0.049921	0.016421	3.039998	0.0026
PROT	0.092951	0.020494	4.535524	0.0000

Weighted Statistics

R-squared	0.549247	Mean dependent var.	4.017919
Adjusted R-squared	0.528588	S.D. dependent var.	0.169205
S.E. of regression	0.116175	Akaike info criterion	-1.420991
Sum squared resid.	3.239190	Schwarz criterion	-1.252923
Log likelihood	191.0448	F-statistic	103.9095
Durbin-Watson stat	1.328350	Prob. (F-statistic)	0.000000

Unweighted Statistics

R-squared	0.834392	Mean dependent var.	4.025706
Adjusted R-squared	0.826801	S.D. dependent var.	0.280994
S.E. of regression	0.116942	Sum squared resid.	3.282088
Durbin-Watson stat	1.318940		

Analizando ya las variables explicativas del modelo, se puede observar que las que son habitualmente utilizadas en el sector para fijar los precios, se han mostrado, como cabía esperar, relevantes (para un nivel de significación $\alpha = 5\%$):

- La edad del asegurado se ha evidenciado como un factor fundamental. Tomando como categoría base la edad de 4 años, todos los tramos de edad resultan significativos. Con excepción del referido a los niños de 10 años, que presenta un precio menor, el resto ofrece valores crecientemente positivos (como cabría esperar), destacando sobremanera el grupo de mayor edad: el de personas de 64 años. En este caso, el precio es un 71,16% superior en media al de las pólizas de los niños de 4 años.

- El sexo del asegurado también es significativo. El precio de las pólizas de las mujeres es superior al de los hombres en un 6,19% de media. Los cuidados relacionados con la maternidad parecen estar en la base de ello.
- El lugar de residencia es igualmente significativo. Adoptando como categoría básica la provincia de Barcelona, las otras dos provincias consideradas, Sevilla y Soria, han resultado relevantes. El precio de la póliza parece estar directamente relacionado con el nivel de desarrollo de la provincia y, por tanto, con el nivel de vida y carestía de ésta. El precio de las pólizas en Sevilla es, por término medio, un 10,81% menor que en Barcelona. Y en Soria un 11,54%.

Junto con las variables anteriores, también aparecen como significativas algunas características directamente relacionadas con el nivel de cobertura y, consiguientemente, con la calidad de la póliza contratada:

- Asistencia psicológica (PSICO).
- Cobertura de determinadas prótesis (PROT).

La entrada de ambas variables en la función de precios de las pólizas lo hace con el signo esperado: positivo. La inclusión de asistencia psicológica en las prestaciones de la póliza hace que el precio de ésta se incremente de media un 4,99%, mientras que la cobertura de determinadas prótesis la eleva de media el 9,30%.

Las restantes variables indicativas de calidad inicialmente consideradas no han resultado significativas, observándose además importantes problemas de multicolinealidad con su inclusión. Ello se deriva de la presencia de buena parte de ellas en todas las pólizas estudiadas, por lo que no constituyen factores diferenciales; de ahí su ausencia en la especificación final del modelo.

4. Conclusiones y discusión

La importancia del ramo del seguro privado de enfermedad en las sociedades del bienestar actuales merece el estudio de todo lo relativo a su funcionamiento. El sector representa en España en el año 2005 el 8,84% del volumen total de primas emitidas de la actividad aseguradora, lo que lo sitúa en el cuarto lugar en el conjunto del mercado. En lo que se refiere a su papel dentro del campo de la sanidad, el gasto privado supone en España cerca de una tercera parte del total del gasto sanitario, proviniendo en su gran mayoría de las entidades aseguradoras que operan en este ramo.

El análisis de los factores que determinan el establecimiento del precio de las pólizas de este ramo constituye un campo relevante de investigación, máxime teniendo en cuenta que en torno al 12% de la población española disfruta de este tipo de cobertura. El empleo de la metodología de los precios hedónicos con este fin puede arrojar resultados interesantes.

De acuerdo con este enfoque, las variables que usualmente utilizan las entidades para fijar sus precios en este sector resultan ser significativas todas ellas: edad, sexo y lugar de residencia. La edad se revela como un factor relacionado de forma positiva con los precios de las pólizas, por los mayores niveles de utilización de servicios médicos que conlleva; igual ocurre con el sexo femenino, cuya razón parece residir en este caso, esencialmente, en todos los aspectos relacionados con la maternidad. En cuanto al lugar de residencia, su nivel de desarrollo incide directamente en los precios de las prestaciones y, consecuentemente, en que las entidades repercutan sobre sus asegurados este hecho a través de sus pólizas. Pero, adicionalmente, distintas variables relativas a la calidad de la póliza también aparecen como significativas, lo que evidencia la utilidad de esta metodología. Es el caso de la cobertura de asistencia psicológica y de determinadas prótesis.

Los resultados obtenidos en este trabajo deben considerarse, no obstante, como preliminares. En el futuro, además de tomarse un mayor tamaño muestral, se deberían analizar con más profundidad los contenidos en cuanto a cobertura de las pólizas. El hecho de que algunas de las variables que caracterizan las pólizas no resulten significativas en la explicación de las variaciones en los precios, una vez controlados los efectos de las variables de edad, sexo o lugar de residencia, puede deberse a alguno de estos otros elementos:

- Que la mayor parte de las entidades ofrecen pólizas de características similares. Esto provoca una alta colinealidad en las variables explicativas, a la vez que insinúa que la clientela responde a otras cuestiones.

- Que la diferencia en precios entre las pólizas puede venir dada por otras razones distintas a las características intrínsecas de las mismas.
- Que la calidad de la prestación asociada a la siniestralidad cubierta por la póliza se aloja en otros elementos que probablemente son intangibles (marca, renombre y prestigio de la entidad, de las instalaciones y equipos, personal médico de los cuadros) o de acciones promocionales (servicios ofrecidos a los poseedores de otras pólizas, clientes de otros servicios...).
- Que la fidelización de la clientela supera los costes de la búsqueda de información sobre otras compañías y otros tipos de pólizas.

La consideración de todos estos aspectos puede permitir en el futuro un mejor conocimiento de los mecanismos de fijación de precios en el sector. Asimismo, el establecimiento de una función de precios adecuada para el seguro privado de enfermedad podría sentar las bases para construir un índice de precios hedónicos de este bien, siempre y cuando se pudiese disponer de una base de datos temporal lo suficientemente rica en información relevante.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado con el apoyo financiero de los Proyectos SEC 2003-00036 y P1045503 SEC 2003-09457 del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

Referencias bibliográficas

Bernd, E.R. y Rappaport, N. (2001): “Price and Quality of Desktop and Mobile Personal Computers: A Quarter Century of History”, *The American Economic Review*, mayo, pp. 268-273.

Bover, O. e Izquierdo, M. (2001): “Ajustes de calidad en los precios: métodos hedónicos y Contabilidad Nacional”, *Serie Estudios Económicos*, 70. Servicios de Estudios, Banco de España.

Bover, O. y Velilla, P. (2001): “Precios hedónicos de la vivienda sin características: el caso de las promociones de viviendas nuevas”, *Serie Estudios Económicos*, 73. Servicios de Estudios, Banco de España.

Buglioli, M. y Ortún. V. (2000): "Sistemas de ajuste por riesgo", *Revista Médica del Uruguay*, 16 (2), pp. 123-132.

Castells, P. (2005): "Qualitat, reputació i preu en el vi negre de qualitat a Espanya", *Revista Econòmica de Catalunya*, 51, pp. 23-26.

Cole, R., Chen, Y.C., Barquin-Stolleman, J.A., Dulberger, E., Helvacian, N. y Hodge, J.H. (1986): "Quality-Adjusted Price Indexes for Computer Processors and Selected Peripheral Equipment", *Survey of Current Business*, enero, pp. 41-50.

Combris, P., Lecocq, S. y Visser, M. (2000): "Estimation of a Hedonic Price Equation for Burgundy Wine", *Applied Economics*, 32, pp. 961-967.

Fleming, M.C. y Nellis, J.G. (1985): "The Application of Hedonic Indexing Methods: A Study of House Prices in the United Kingdom", *Statistical Journal of the United Nations*, ECE 3, pp. 249-270.

Greenwald, L., Esposito, A., Ingber, M. y Levy, J. (1998): "Risk adjustment for Medicare Program: Lessons Learned from Research and Demonstrations", *Inquiry*, 35, 193-209.

Griliches, Z. (1961): "Hedonic Price Indexes with Automobile: An Econometric Analysis of Quality Change", *The Price Statistics of the Federal Government*. New York, Columbia University Press.

Gujarati, D.N. (2003): *Econometría*. 4ª ed. McGraw-Hill Interamericana, México.

ICEA (2006): *El Seguro de Salud. Estadística año 2005*. Informe nº 983. Ed. Investigación Cooperativa de Entidades Aseguradoras, Madrid.

Izquierdo, M. y Matea, M.LL. (2001): "Precios hedónicos para ordenadores personales en España durante la década de los años noventa", *Serie Estudios Económicos*, 74. Servicios de Estudios, Banco de España.

Jensen, G.A. y Morrisey, M.A. (1990): "Group Health Insurance: A Hedonic Price Approach", *The Review of Economics and Statistics*, 72 (1), pp. 38-44.

Landefeld, S. y Grimm, B.T. (2000): "A Note on the Impact of Hedonics and Computers on Real GDP", *Survey of Current Business*, diciembre.

Lee, C., Rogal, D. y Gauthier, A.K. (1997): *Risk Adjustment: A Key to Changing Incentives in the Health Insurance Market*. Alpha Center, Washington D.C.

Linneman, P. (1980): “Some Empirical Results on the Nature of the Hedonic Price Function for the Urban Housing Market”, *Journal of Urban Economics*, julio, pp. 47-68.

Ministerio de Economía y Hacienda. Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones (DGSFP) (2005): *Seguros y Fondos de Pensiones. Informe 2004*. Madrid, España.

Ministerio de Economía y Hacienda. Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones (DGSFP) (2006): *Seguros y Fondos de Pensiones. Informe 2005*. Madrid, España.

Ministerio de Sanidad y Consumo (2006): *Datos básicos de la salud y los servicios sanitarios en España. 2005*. Instituto de Información Sanitaria. Madrid, España.

Mossialos, E., Thomson, S. *et al*. (2002): *Voluntary Health Insurance in the European Union: A Study for the European Commission*. Informe para la Dirección General de Empleo y Asuntos Sociales de la Comisión Europea. Draft 2702/2002.

Nerlove, M. (1995): “Hedonic Price Functions and the Measurement of Preferences: The Case of Swedish Wine Consumers”, *European Economic Review*, 39, pp. 1697-1716.

Newhouse, J. (1998): “Risk Adjustment: Where Are We Now?”, *Inquiry*, 35, pp. 122-131.

Oczkowski, E. (2001): “Hedonic Wine Price Function and Measurement Error”, *The Economic Record*, 77 (239), pp. 374-382.

Rosen, S. (1974): “Hedonic Prices and Implicit Markets: Product Differentiation in Pure Competition”, *Journal of Political Economy*, 82, pp. 34-55.

Tinbergen, J. (1956): “On the Theory of Income Distribution”, *Weltwirtschafliches*, 77, pp. 155-173.

UNESPA (1994): *Información estadística del seguro privado, 1984-1993*. Editorial Aseguradora. Madrid, España.

UNESPA (1997): *Información estadística del seguro privado, 1986-1995*. Editorial Aseguradora. Madrid, España.

Volumen 2 (diciembre de 2006)