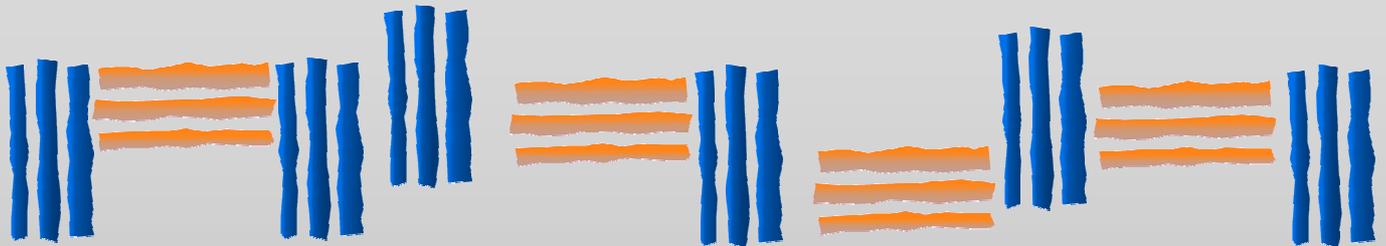


REVISTA DE
MÉTODOS CUANTITATIVOS
PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA



UNIVERSIDAD
**PABLO^D
OLAVIDE**
SEVILLA

Número 4
Diciembre de 2007
ISSN: 1886-516X
D.L: SE-2927-06

**REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS
PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA**

**Journal of Quantitative Methods for
Economics and Business Administration**

Número 4. Diciembre de 2007.

ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.

URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/>

Editores:

Dr. Eugenio M. Fedriani Martel
Universidad Pablo de Olavide
Ctra. de Utrera, Km. 1 - 41013
Sevilla (Spain).
Correo-e: efedmar@upo.es

Dr. Alfredo García Hernández-Díaz
Universidad Pablo de Olavide
Ctra. de Utrera, Km. 1 - 41013
Sevilla (Spain).
Correo-e: agarher@upo.es

Comité Editorial:

Dr. Ignacio Contreras Rubio, Universidad Pablo de Olavide (España)
Dr. Miguel Ángel Hinojosa Ramos, Universidad Pablo de Olavide (España)
Dr. M. Kazim Khan, Kent Sate University, Ohio (USA)
Dra. María Amparo León Sánchez, Universidad de Pinar del Río (Cuba)
Dr. Cecilio Mar Molinero, University of Kent (United Kingdom)
Dr. Ana María Martín Caraballo, Universidad Pablo de Olavide (España)
Dra. M^a Carmen Melgar Hiraldo, Universidad Pablo de Olavide (España)
Dr. José Antonio Ordaz Sanz, Universidad Pablo de Olavide (España)
Dr. José Manuel Rueda Cantuche, IPTS-DG J.R. Centre-European Commission



Editorial

Con este cuarto número, la Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa (RevMetCuant) completa su segundo año de vida, editada en el seno del Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica de la Universidad Pablo de Olavide, de Sevilla (España). Como en sus inicios, la Revista pretende ser un medio de comunicación útil para todos los que investigan en técnicas Matemáticas, Estadísticas o Econométricas y sus posibles aplicaciones al ámbito económico o empresarial.

Durante este tiempo, se ha tratado de introducir en el espacio universitario una publicación gratuita que permitiese la difusión de ideas y trabajos científicos tanto en inglés como en español. Hemos prestado especial atención a que las aportaciones fuesen originales e inéditas, como también a que su temática estuviese relacionada con de la aplicación de la Matemática o la Estadística a las Ciencias Económicas y Empresariales.

Entre nuestras características más destacables, según lo que se ha podido comprobar hasta el momento, se encuentran la de facilitar un proceso de revisión ágil a los artículos, la de posibilitar la publicación de trabajos de extensiones y formatos muy diversos y la de dar a conocer trabajos inteligibles e interesantes para un amplio conjunto de investigadores internacionales.

También podemos presumir de haber publicado trabajos muy cuidados en su forma y fondo, así como de haber cumplido escrupulosamente con el doble anonimato en los procesos de revisión por pares y con las fechas de publicación que nos habíamos fijado: el primer número de cada año se publica en junio y el segundo en diciembre.

Hasta el momento, el porcentaje de aceptación de artículos es muy elevado. Esto es, principalmente, gracias a que los revisores procuran ayudar siempre en la mejora de los artículos y a que los autores, hasta ahora, colaboran en el mismo sentido. No obstante lo anterior, queremos que los autores se sientan con libertad de exponer sus trabajos y sus opiniones en ellos. Por eso, tampoco imponemos un formato específico a los artículos. La única condición inexcusable para poder admitir un trabajo a revisión es que se trate de un artículo original e inédito, como se indica en las instrucciones para los autores y en la editorial del primer número.

Parece que RevMetCuant se ha establecido en el marco proyectado en sus inicios y evoluciona favorablemente. Como revista electrónica, ha alcanzado rápidamente una difusión internacional que difícilmente se podía haber imaginado hace solo un par de años. Como muestra, debemos comentar que hemos recibido más de 7000 visitas¹, de muchos pases de habla hispana y

¹El 1 de diciembre de 2007 se ha producido la visita número 7000.

de habla no hispana, siendo mucho más abundantes las visitas de países hispanohablantes, como es lógico si se atiende al idioma mayoritariamente utilizado en los artículos. El mayor número de visitas, hasta la fecha, procede de España, aunque ha habido semanas en las que éramos más visitados desde México o Perú, por ejemplo.

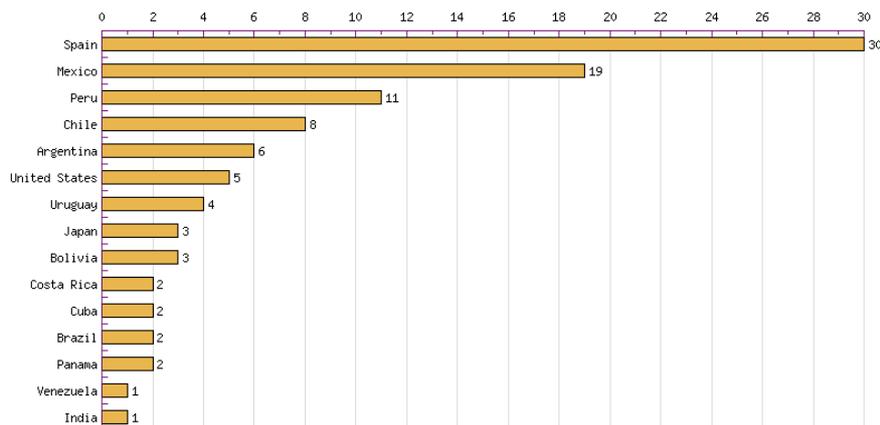


Figura: visitas recibidas de diferentes países (primeras visitas recibidas en diciembre de 2007).

De acuerdo con los principios que motivaron su creación, nuestra intención es que la Revista siga siendo gratuita, tanto para aquellos que la consultan como para los que se suscriben o publican en ella. Actualmente, contamos con 40 suscriptores, que reciben un aviso cada vez que se publica un nuevo número de la Revista. De momento, la mayor parte de nuestros lectores parece que prefiere visitarnos en las fechas previstas para la publicación de nuestros volúmenes, sin necesidad de suscribirse.

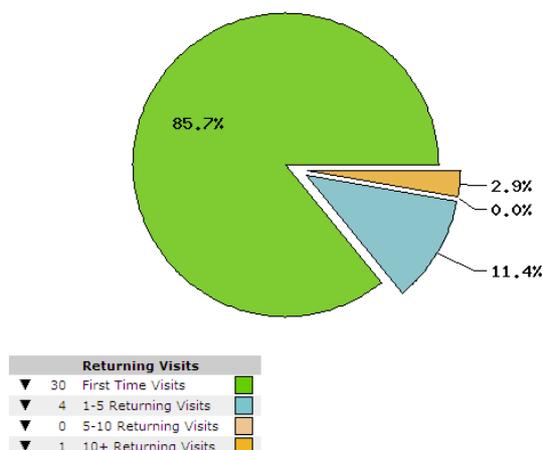


Figura: visitas recibidas por parte de lectores nuevos o habituales (últimas visitas recibidas antes de diciembre de 2007).

En cuanto a la inclusión de RevMetCuant en las bases de datos internacionales más prestigiosas, aún nos queda mucho camino por recorrer (a modo de ejemplo, seguimos tratando de ser incluidos en el *Journal Citation Reports del Institute for Scientific Information - ISI*), pero seguimos avanzando en ese sentido² y ya aparecemos en un listado importante de páginas, revistas y bases de datos. A continuación recogemos algunas de las que consideramos más importantes de entre las primeras que nos han aceptado:

- Directory of Open Access Journals (DOAJ): <http://www.doaj.org>
- Universia: <http://www.universia.net>
- Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM): <http://www.fisem.org/>
- SUMA (Revista de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas): <http://www.revistasuma.es/>
- Epsilon (Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”): <http://thales.cica.es/epsilon/>
- Dialnet: <http://dialnet.unirioja.es/>
- Ulrichsweb.com: <http://www.ulrichsweb.com/>
- Journal Info: <http://jinfo.lub.lu.se/>
- RePEc: <http://edirc.repec.org>
- Oasis.br (ibict): <http://www.ibict.br/oasis.br/>
- Total Quality Management (TQM): <http://tqminformation.com/>
- E-Resources UNC-University Libraries: <http://www.lib.unc.edu/>
- EducaMadrid: <http://www.educa.madrid.org/>
- Université de Caen Basse-Normandie: <http://www.unicaen.fr>
- Bibliotecas de todo el mundo (mayoritariamente universitarias); las primeras en incluirnos fueron: Georgetown University, San José State University, Saskatchewan University, Barton College, York University, Universidad Nacional Autónoma de México, Institute of European and American Studies, Vrije Universiteit Brussel, etc.

Próximamente, los artículos de RevMetCuant serán incluidos en Mathematical Reviews, Current Mathematical Publications y MathSciNet; además, la Revista ingresará en Latindex (<http://www.latindex.unam.mx>) y en Scopus (<http://www.scopus.com/>), donde ya ha sido seleccionada y se estima que aparecerá en el primer trimestre de 2008.

²Las listas del *ISI* son particularmente para los investigadores, pues es muy habitual la evaluación de los méritos científicos en función de estas listas y del tan conocido *Impact Factor*. El *Impact Factor* se calcula como el cociente entre el número de citas que reciben los artículos publicados en la Revista y el número de artículos publicados ese año. Por eso, es fundamental conseguir que los trabajos que publicamos sean citados en otros artículos publicados en revistas que sí estén ya incluidas en las listas del *ISI*.

En función de los indicadores considerados, creemos que RevMetCuant ha pasado ya la fase de creación e introducción y ahora comienza la siguiente fase: el crecimiento y consolidación. De acuerdo con esto, nuestra política editorial irá tendiendo a la publicación cada vez de un número mayor de artículos por volumen. Al mismo tiempo, procuraremos ir remodelando el Comité Editorial, para dar cabida a aquellos investigadores que quieran colaborar con nuestro proyecto y que completen la visión que actualmente tenemos de la investigación en los métodos cuantitativos aplicados a problemas económicos o empresariales.

Para finalizar esta Editorial, publicamos la lista de los revisores anónimos que han participado en los 4 primeros números de la Revista (en realidad, los que han aceptado aparecer en este listado). Tenemos que destacar su esfuerzo y dedicación. De hecho, su labor ha sido muy valorada y varios autores han decidido incluir agradecimientos en sus artículos haciendo referencia al trabajo desarrollado por los evaluadores:

Prof. Dr. D. Raúl Brey Sánchez;
Prof. Dr. D. Ignacio Contreras Rubio;
Prof. Dr. D. Eugenio M. Fedriani Martel;
Prof.^a Dra. D.^a Ana Fernández Carazo;
Prof. Dr. D. Osvaldo A. Fosado Téllez;
Prof. Dr. D. Alfredo García Hernández-Díaz;
Prof.^a Dra. D.^a Patricia Herranz Peinado;
Prof. Dr. D. Miguel Ángel Hinojosa Ramos;
Prof.^a Dra. D.^a M.^a Amparo León Cruz;
Prof.^a Dra. D.^a Ana M. Martín Caraballo;
Prof.^a Dra. D.^a M.^a Carmen Melgar Hiraldo;
Prof.^a Dra. D.^a Sara López Pintado;
Prof. Dr. D. Julián Molina Luque;
Prof. Dr. D. José Antonio Ordaz Sanz;
Prof.^a Dra. D.^a Concepción Paralera Morales;
Prof. Dr. D. José Manuel Ramírez Hurtado;
Prof.^a Dra. D.^a Laura Riesgo Álvarez;
Prof. Dr. D. José Manuel Rueda Cantuche;
Prof.^a Dra. D.^a Manuela Segovia González;
Prof. Dr. D. Ángel F. Tenorio Villalón.

Los Editores también agradecen a cada uno de los miembros del Comité Editorial y a los evaluadores el esfuerzo desarrollado desinteresadamente. Además, agradecen a la Universidad Pablo de Olavide y, en especial, al Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica la colaboración prestada durante la elaboración de los primeros números.

LOS EDITORES.





Un análisis transversal y longitudinal en el estado de pobreza en Alemania

GONZÁLEZ RODRÍGUEZ, MARÍA ROSARIO

Departamento de Economía Aplicada I
Universidad de Sevilla

Correo electrónico: rosaglez@us.es

MARTÍN MARTÍN, DOMINGO

Departamento de Economía Aplicada I
Universidad de Sevilla

Correo electrónico: domartin@us.es

GONZÁLEZ ABRIL, LUIS

Departamento de Economía Aplicada I
Universidad de Sevilla

Correo electrónico: luisgon@us.es

VELASCO MORENTE, FRANCISCO

Departamento de Economía Aplicada I
Universidad de Sevilla

Correo electrónico: velasco@us.es

RESUMEN

El objetivo del trabajo se centra en un análisis transversal y longitudinal de la pobreza en Alemania en el período de 1985 a 1996, utilizando la base de datos Panel Comparability Project. El análisis transversal nos permite conocer cómo el proceso de reunificación alemana influye en el nivel de pobreza y en la intensidad de la misma. Por su parte, el análisis longitudinal nos permite seguir a los individuos en el tiempo, posibilitando la observación de los períodos en el estado de pobreza, la transición al estado de no pobreza, así como la longitud de su permanencia por debajo del umbral de pobreza.

Dado que los datos contienen información de características individuales y del hogar, un análisis basado en las estimaciones de la función riesgo y de supervivencia hace posible la identificación de aquellas características socioeconómicas más destacables de la población que son propias de la pobreza permanente y transitoria.

Palabras clave: pobreza; intensidad; duración; pobreza permanente; pobreza transitoria; estimador Kaplan-Meier; función riesgo.

Clasificación JEL: C14; C41; C43; I30; I32.

2000MSC: 91B82; 62P20.

A cross-sectional and longitudinal analysis of poverty in Germany

ABSTRACT

The objective of this research focuses on both a cross-sectional and longitudinal analyses of poverty in Germany from 1986 to 1996, using the Panel Comparability Project data set. On the one hand, the cross-sectional analysis allows us to know how the Reunification Process influences on the level and the intensity of poverty. On the other hand, the longitudinal analysis allows us to follow up the individuals in time, and therefore to observe the permanence in poverty, and the transition out of poverty.

Since the data set contains information about household and individual characteristics, an analysis based on the estimations of the risk and survival function makes possible the identification of those socioeconomic characteristics of the population which are more proper of the permanent and transitory poverty.

Keywords: poverty; intensity; duration; permanent poverty; transitory poverty; Kaplan-Meier estimator.

JEL classification: C14; C41; C43; I30; I32.

2000MSC: 91B82; 62P20.



Introducción

Las bases de datos de corte transversal se han utilizado durante mucho tiempo en los estudios de pobreza permitiendo, entre otras cosas, cuantificar la proporción de hogares que son pobres e identificar aquellas características socioeconómicas de dicha población en un momento específico del tiempo [CES (1996), Deleeck et al. (1990), Escribano (1990)]. No obstante, el desarrollo reciente de otro tipo de bases de datos, datos de panel, hacen viable el análisis del fenómeno de la pobreza en el tiempo de una forma más detallada [Cantó (1996, 2000), Jenkins (2000), Krause (2003)]. En este sentido, dichas encuestas permiten determinar si la pobreza es una situación a corto plazo, debido por ejemplo a factores negativos como depresión en el ciclo económico, o si por el contrario es una situación a largo plazo, es decir, si constituye una condición permanente que se transmite de generación en generación.

La distinción entre “pobreza transitoria” y “pobreza permanente” es de vital importancia hoy día, sobre todo en los países industrializados [Bane and Ellwood (1986), Stevens (1999)], en los que un gran número de hogares experimentan períodos cortos de pobreza a lo largo de sus vidas [Stevens (1999)]. Además esta distinción es crucial en lo que se refiere a la formulación de políticas públicas, puesto que si bien la pobreza transitoria aparece como un fenómeno que tiende a solventarse por sí mismo, la pobreza permanente por el contrario, constituye un problema más grave que requiere la acción de políticas públicas para la reducción de la misma [Jenkins (2000), Cantó et al. (2002)].

En los países en vías de desarrollo, por el contrario, no se observa la transición hacia la “no pobreza” con la misma intensidad dado que una inmensa mayoría de los individuos u hogares experimentan pobreza permanente, siendo muy pocos los que superan un estado de pobreza transitoria en el transcurso de sus vidas. La medición y análisis de la duración en el estado de “pobreza” y la transición hacia la “no pobreza” tiene, por tanto, más relevancia en los países industrializados en los que se observa como una proporción importante de la población experimenta períodos de bajos ingresos y, por consiguiente, “privación económica” durante sus vidas. Es por ello por lo que resulta interesante realizar un estudio de la duración del estado de pobreza en un país como Alemania, analizando si la pobreza es un fenómeno a corto plazo o a largo plazo, si la duración en el estado de pobreza tiene un efecto positivo o negativo en la probabilidad de salir de la pobreza e identificando aquellas características que tienen un importante efecto en la duración de la pobreza.

El periodo que abarca nuestro estudio 1985-1996 es de una trascendencia histórica a tener en cuenta dado que en dicho periodo se sucedieron importantes hechos que afectarían al estado de pobreza y de bienestar de la población. Si bien, hacia finales de los años 80, el gobierno alemán alcanzó la consolidación en el presupuesto de Seguridad Social, este hecho cambió drásticamente después de la Reunificación Alemana el 3 de octubre de 1990. El canciller de la unificación Helmut Kohl prometió en la antigua República Democrática Alemana un mejor escenario en el que tuviera lugar una mejora en las condiciones de vida de la población. Esta decisión política de ajustar las condiciones de vida en Alemania Oriental a la de Alemania Occidental produjo un crecimiento de los gastos gubernamentales. Los gastos en Seguridad Social crecieron más que proporcionalmente después de 1990. El gasto total en Seguridad Social en los estados de la antigua RDA alcanzó un máximo, el mayor gasto en Seguridad Social a nivel mundial en 1992 con un 67,7% respecto al presupuesto general del nuevo estado.

Es el 1 de julio de 1990 cuando tiene lugar el comienzo del proceso de Reunificación con la unión económica, monetaria y social de Alemania, iniciándose la transición y dando entrada al este alemán en el proceso de integración europea. A partir de entonces, Alemania reunificada se regiría por los principios de la economía social de mercado, lo que implicaba el reconocimiento de una serie de principios como la propiedad privada, la libre competencia, el libre establecimiento de precios, la libre movilidad de los trabajadores, introduciéndose además como moneda válida el marco alemán de la RFA. El procedimiento de unificación monetaria debilitó la moneda alemana y la diferencia de desarrollo económico entre la República Democrática y la República Federal de Alemania hizo necesario realizar un traspaso masivo de capital de la parte occidental a la oriental. Esto obligó al Bundesbank (Banco Central) a elevar los tipos de interés y al gobierno a subir los impuestos. Alemania fue reunificada oficialmente el 3 de octubre de 1990, cuando los cinco estados Federales de la República Democrática Alemana (Alemania Oriental) fueron unificados con los de la República Federal (Alemania Occidental). No obstante, el coste de la Reunificación afectó negativamente a la economía alemana, contribuyendo a una ralentización de su crecimiento económico especialmente entre 1991 y 1993, donde el país entró en un período de recesión.

El objetivo del artículo se centra, por tanto, en un análisis de la dinámica de la pobreza en Alemania en el período 1985-1996, utilizando para ello un análisis no paramétrico¹. Para tal

¹ Este trabajo constituye una versión modificada de la comunicación presentada en el 46th Congress of the European Regional Science Association. El estudio presentado en el congreso fue meramente descriptivo cuyo

fin, el trabajo se ha organizado de acuerdo con las siguientes secciones. En la sección 2, se describen los aspectos metodológicos necesarios para la cuantificación de la pobreza, así como los conceptos básicos de duración para llevar a cabo un análisis no paramétrico de la duración en el estado de pobreza. En la sección tercera describimos la base de datos utilizada y presentamos el análisis empírico realizado. Y por último, se presentan las conclusiones más interesantes del trabajo.

2. Aspectos metodológicos en la medición de la pobreza

Definir y medir la pobreza constituye una tarea ardua, sobre todo cuando se requiere como instrumento para emprender acciones políticas destinadas a reducir y a erradicar la pobreza. De hecho, la Comisión Europea en 1991 afirmaba: “la definición y medición de la pobreza son cuestiones que tienen importantes consecuencias en la identificación de responsabilidades y procesos, así como en la formulación de políticas específicas”. Siendo conscientes de la controversia existente en la literatura sobre la definición [Citro and Michel (1995), Sen (1992)] y consiguiente medición de la pobreza [González (2003), Domínguez y Martín (2006)], hemos optado por una definición operativa de pobreza estrechamente relacionada con la privación económica. Utilizamos para el objetivo que nos ocupa una línea de pobreza relativa, concretamente definimos el umbral de pobreza como el 50 por ciento del ingreso disponible per cápita mediano/medio para cada año. Las líneas de pobreza relativas constituyen herramientas ampliamente aceptadas para el análisis de la pobreza en los países desarrollados y en particular la línea del 50 por ciento se presenta como la línea de pobreza estándar de la Unión Europea [Krause et al. (2003)].

Calculada la línea de pobreza, surge el problema de medición. En la literatura aparecen multitud de índices para medir el grado de pobreza [Chakravarty (1990)] y aunque si bien es cierto que todas las medidas presentan deficiencias [Donaldson and Weimark (1986)], hemos optado por utilizar la familia de índices de Foster, Greer y Thobercke (1984). Estos índices ponderan la importancia relativa del desnivel de pobreza respecto del umbral z :

objetivo no era otro que comprobar que en el análisis longitudinal se obtenían resultados muy similares tanto si se utilizaban múltiples periodos de pobreza o un único período de pobreza para cada hogar. El artículo actual permite además observar cómo incidió el proceso de Reunificación en la situación de pobreza de los hogares alemanes y cómo afectó al proceso de salida de la pobreza de un cierto tipo de hogares.

El presente artículo mejora también el análisis realizado en el artículo “A non-parametric study of poverty dynamics in Germany from 1985-1996”. En González (2006) se ajustaba el estimador Kaplan-Meier por una función continua, que si bien permitía una mejor interpretación de las curvas de supervivencia, se incorporaba en la construcción de dichas curvas supuestos muy restrictivos que, por otra parte, nos hacían perder información de interés contenidas en la representación gráfica de la función de supervivencia empírica.

$$FGT_{\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^q \left(\frac{z - y_i}{z} \right)^{\alpha-1} \quad \alpha > 0$$

A medida que α aumenta crece la importancia relativa que el índice concede a los desniveles de pobreza más fuertes, por lo que α se interpreta como el parámetro de aversión a la pobreza. Se puede observar como para $\alpha=1$ el índice FGT coincide con el índice H, que nos ofrece la “proporción de pobres” existentes en una sociedad. Para $\alpha=2$ el índice de FGT coincide con el producto HI (siendo I, el índice “intensidad de la pobreza”). El índice de Foster-Greer-Thobercke satisface el axioma de transferencia para $\alpha>3$, por lo que el índice FGT_4 es muy utilizado cuando se pretende prestar atención a los más pobres. Para el propósito del trabajo emplearemos los índices, H, FGT_2 y FGT_4 y así tener una primera idea sobre la trayectoria de la pobreza relativa en Alemania en el periodo 1985-1996.

2.1 *Análisis Estadístico de la duración en el estado de pobreza*

El análisis estadístico de los modelos de duración llamados también modelos de tiempo de vida o de supervivencia [Cox (1972), Lawless (1982), Lancaster (1990)] han sido aplicados en distintas ramas de la ciencia, adquiriendo un gran auge en la ingeniería y la medicina. Su aplicación a las ciencias sociales empezó hacia finales de los años 70 y durante los últimos 15 años han proliferado los trabajos en los que se analizan cuestiones como el tiempo que un individuo permanece en desempleo [Ahn y Ugidos (1995)], duración de una patente [Pakes (1989)], duración de huelgas [Kennan (1985)], duración en pobreza [Duncan (1993), Jenkins, Rigg and Devicienti (2001)], etc.

Con los modelos de duración se intenta analizar las transiciones que sufre un individuo entre dos estados, inicial y final. En estos modelos la variable de interés es la duración, que se puede definir como el tiempo de permanencia de un individuo en un estado inicial y que finaliza cuando el individuo pasa al estado final. En nuestro caso, el estado inicial es la situación de pobreza y el estado final se corresponde con la salida de la pobreza. A la duración en pobreza de un hogar, que es una variable aleatoria, la denotaremos por T . Esta es una variable absolutamente continua que toma valores en el intervalo $[0,+\infty)$, tomando el valor cero en el momento en que el hogar entra en el estado de pobreza y además, se supone por simplicidad que $P(T=\infty)=0$.

Nuestro análisis abarca el periodo 1985-1996, como consecuencia de ello aparece una característica común a los datos de duración, la censura. Posibles esquemas de censura son

"censura a la derecha" y "censura a la izquierda". La censura a la derecha tiene lugar en el caso en que nos ocupa, cuando el hogar todavía permanece en pobreza cuando el periodo de estudio ha terminado. La censura a la izquierda aparece cuando los hogares ya se encontraban en el estado inicial, pobreza, en el momento en que se comenzó el estudio.

En el contexto de los modelos de duración adquieren relevancia además de la función de densidad, $f(t)$ y la función de distribución, $F(t)$, la función de supervivencia o permanencia, y la función riesgo o de salida de la variable T , "tiempo de permanencia en pobreza" [Lancaster (1990), Lawless (1982)].

Siendo la función de distribución $F(t)$ o de "fallo",

$$F(t) = P(T \leq t),$$

la función de supervivencia o de permanencia de la variable T , denotada por S , se define como:

$$S(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$$

Esta función nos da la probabilidad de que la duración en el estado de pobreza sea mayor que un tiempo t . Se caracteriza porque es una función no creciente, que toma el valor uno en $T=0$ y el valor cero en $T=\infty$.

La función de densidad $f(t)$, viene dada por:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\partial F(t)}{\partial t} = -\frac{\partial S(t)}{\partial t}$$

donde $f(t)\Delta t$ es la probabilidad de tener una duración de longitud t , es decir, la probabilidad de salir del estado de pobreza en el intervalo $[t, t + \Delta t]$.

La función riesgo o de salida de la variable T y denotada por θ se define como:

$$\theta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[t \leq T < t + \Delta t / T \geq t]}{\Delta t}$$

$\theta \cdot \Delta t$ se interpreta como la probabilidad de que un hogar en pobreza en el momento t salga de la pobreza en el instante inmediatamente posterior.

La función riesgo también puede expresarse de acuerdo con la siguiente expresión,

$$\theta(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{S(t)}$$

de hecho, si denominamos $P(A)$ a la probabilidad de salir del estado de pobreza en el intervalo $[t, t + \Delta t]$, y $P(B)$ a la probabilidad de permanecer en el estado hasta t , entonces la probabilidad de salir en el intervalo $[t, t + \Delta t]$ sabiendo que ha permanecido hasta t , se puede obtener a partir de las reglas de la probabilidad condicionada:

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = P(B/A) / P(B) = P(A) / P(B)$$

ya que $P(B/A) = 1$. Dado que $P(A/B) = f(t)\Delta t / S(t)$, obtenemos la siguiente expresión para la función riesgo,

$$\theta(t)\Delta t = \frac{f(t)\Delta t}{S(t)}$$

Por último, creemos conveniente resaltar la siguiente relación entre especificación de la función riesgo y la función de supervivencia,

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{-\partial[1 - F(t)] / \partial t}{1 - F(t)} = \\ &= \frac{\partial\{-\ln[1 - F(t)]\}}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial\{-\ln[S(t)]\}}{\partial t} \end{aligned}$$

En la literatura se pueden encontrar trabajos que estudian la duración en el estado de pobreza aplicando métodos no paramétricos [Bane and Ellwood (1983)] y métodos paramétricos [Ruggles and Williams (1989), Stevens (1994)]. En este trabajo hemos optado por un análisis no paramétrico dado que no exige asumir una forma funcional específica para la función riesgo.

Obtención de los períodos de pobreza y Estimación de la Función de Supervivencia

Para el desarrollo del análisis empírico ha sido necesario el cálculo de los períodos de pobreza, así como la obtención del estimador Kaplan-Meier de la función de supervivencia.

En la obtención de los períodos de pobreza se han seguido los siguientes pasos:

- 1) Cálculo de la línea de pobreza y la clasificación de hogares en pobres y no pobres.
- 2) Enlace de hogares y obtención de los períodos

Para el análisis no paramétrico se ha utilizado como línea de pobreza el 50% de la mediana del ingreso total disponible per cápita. Como consecuencia de la rotación de hogares en la muestra en el período contemplado fue preciso enlazar los hogares para ver sus cambios de estado, pobre/no pobres, y así poder calcular los períodos en pobreza. En función de las transiciones que experimentaron los hogares, hemos clasificado los hogares en cuatro tipos:

- i) hogares que nunca fueron pobres en la totalidad del período, es decir, son aquellos que no tienen períodos en pobreza (3273 hogares);
- ii) hogares que fueron pobres al menos un año en el periodo 1985-1996 (5282 hogares);
- iii) hogares que siempre fueron pobres en dicho periodo y que por tanto sufrieron un periodo de pobreza de duración 12 censurado a la izquierda y a la derecha (1400 hogares);
- iv) y hogares para los que no existía información disponible sobre la variable ingreso considerada (1193 hogares).

En nuestro análisis se procedió a eliminar de la muestra aquellos hogares del tipo i), iii) y iv), siendo objeto de estudio aquéllos que salieron alguna vez de la pobreza.

Estimador Kaplan-Meier (o Producto Límite) de la función de supervivencia

Al objeto de definir el estimador Kaplan-Meier de la función de supervivencia, supongamos que $t_1 < t_2 < \dots < t_j < \dots < t_k < \infty$ representan los tiempos de supervivencia que son observados en la base de datos. A partir de los datos, se pueden determinar las siguientes cantidades:

d_j : número de individuos observados que abandonan la pobreza en $t_{(j)}$ (realizan una transición fuera del estado).

m_j : número de individuos cuya duración observada es censurada en el intervalo $[t_{(j)}, t_{(j+1)})$.

n_j : número de individuos en riesgo de hacer una transición (terminación del período de pobreza) inmediatamente antes de t_j , y formado por aquellos quienes tienen un período censurado o completo de longitud t_j o mayor.

$$n_j = (m_j + d_j) + (m_{j+1} + d_{j+1}) + \dots + (m_k + d_k)$$

La proporción de individuos en el estado de pobreza que sobreviven al primer tiempo observado t_1 , $\hat{S}(t_1)$, es uno menos la proporción de quienes salieron del estado en ese tiempo y donde la proporción puede ser estimada por el número de salidas dividido por el número de quienes estuvieron en riesgo de transición $d_1 / (d_1 + m_1) = d_1 / n_1$. Análogamente, la proporción de aquellos que sobrevivieron a t_2 es $\hat{S}(t_1)$ multiplicada por uno menos la proporción de quienes salieron del estado entre t_1 y t_2 . En general, en el momento t_j ,

$$\hat{S}(t) = \prod_{t_{(j)} < t} (1 - \hat{\theta}_j) \quad \text{donde} \quad \hat{\theta}_j = \frac{d_j}{n_j}$$

De este modo, el estimador de la función de supervivencia está dado por el producto de uno menos el número de salidas dividido por el número de individuos en riesgo de salida, es decir, el producto de uno menos la “tasa de salida” en cada uno de los tiempos de supervivencia.

2.2 Estudio no paramétrico de los factores que influyen la duración en pobreza

Una vez seleccionada la sub-muestra de hogares², se ha llevado a cabo un estudio basado en la estimación de la probabilidad de salida de la pobreza y el estimador Kaplan-Meier de la función de supervivencia $S(t)$, proporcionando dicho estimador una representación discreta de la función de supervivencia.

El análisis permitirá observar cómo afectan ciertas características del hogar al proceso de salida de la pobreza. La forma de analizar este efecto consiste en comparar la función de supervivencia y de riesgo de las unidades de análisis con distintas características. Estas variables las podemos agrupar en dos grupos: i) En primer lugar analizaremos cómo afectan ciertas variables relacionadas con el sustentador principal como pueden ser el sexo, el nivel de estudios y la situación laboral. Debido a que estas dos últimas variables varían a lo largo de un periodo, se ha optado por elegir la modalidad que presentaba en la fecha de entrada a la pobreza, es decir, al principio del periodo. ii) El otro grupo de variables que se va a analizar

² Para un total de 11148 hogares en el período 1985-1996, la muestra seleccionada resultó ser de 5282 hogares. la muestra representa pues un 47% del total de hogares en el panel correspondiente al período 1985-1996.

está relacionada con las características del hogar. En concreto, veremos los efectos que tienen sobre la duración el número de perceptores³. Al igual que ocurre en el caso anterior se ha optado por medir esas variables en el momento de la entrada en la pobreza.

Definiendo la variable duración (T) como el período de permanencia en pobreza, es importante para el estudio destacar que cuando dos funciones de supervivencia se comparan, aquella situada por debajo de la otra significa que el grupo representado por esta curva permanecerá menos tiempo en pobreza que el grupo representado por la otra curva. En otras palabras, en cualquier momento del tiempo, la proporción de individuos que continúan siendo pobres es menor para el grupo representado por la curva que se sitúa por debajo de aquella curva con la que se establece la comparación.

3. Análisis de la pobreza en Alemania

En el trabajo utilizamos la base de datos PACO (Panel comparability project)[PACO, 1997]. Esta es una base de datos de corte transversal y longitudinal; contiene variables comparables para varios países (Alemania, Reino Unido, Francia, Luxemburgo, Estados Unidos, Hungría, Polonia), las cuales, fueron creadas partiendo de los datos de panel originales de cada país (PSELL/Luxemburgo, BHPS/UK, ESEML/Lorraine, SOEP/Alemania, y PSID/USA) utilizando un plan de trabajo común, así como clasificaciones internacionales estandarizadas en aquellos casos donde fueran posibles. A pesar de que esta base de datos nos permitiría realizar comparaciones entre los países anteriormente citados, nuestro interés se centra en un análisis de la pobreza, su duración, así como de los factores que influyen en ella, para el caso de Alemania. Para el objetivo que nos ocupa, la base de datos de Alemania se caracteriza, con relación al resto de las mencionadas previamente, porque el panel de datos de Alemania en la base de datos armonizada PACO abarca un mayor periodo de observación, permitiendo así un análisis de la duración de la pobreza más amplio, detallado y representativo. Además, dado que hasta el año 1990⁴, solo se incluye en la muestra hogares de Alemania Occidental, es posible observar cómo el proceso de Reunificación de Alemania ha afectado al porcentaje de pobres y al grado de pobreza experimentado por los mismos.

³ La variable tamaño del hogar ha sido analizada en el trabajo González et al. (2006) observándose que las submuestras por número de miembros del hogar no eran homogéneas, no aportando conclusiones interesantes al estudio.

⁴ La base de datos de Alemania en el período 1985-1989 incluía entrevistas realizadas a hogares e individuos procedentes únicamente de Alemania Occidental. Es en el año 1990 cuando se incluyen entrevistas a hogares e individuos de la República Democrática Alemana. En particular 2179 hogares fueron encuestados en la República Democrática Alemana en 1990 frente a 4293 hogares en la República Federal Alemana.

Las unidades de observación que aparecen en la base de datos PACO para Alemania son el individuo y el hogar. El hogar se define como un conjunto de personas que viven bajo un mismo techo (casa, apartamento, grupo de habitaciones o una sola habitación) compartiendo la totalidad de ingresos y gastos del hogar. Se incluyen las parejas no casadas, si conviven de una forma casi permanente. Se excluyen los huéspedes, los compañeros de cuarto convencionales, o los empleados que comparten alojamiento.

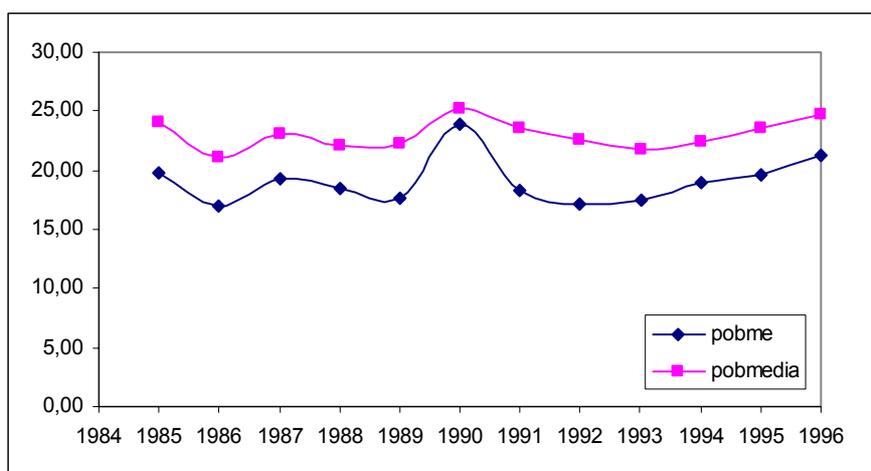
Para el propósito del trabajo, se presenta en el Cuadro 1 el número de hogares para los que existía información disponible sobre la variable ingreso para cada año, así como el valor de la media y mediana del ingreso disponible per cápita, que se han utilizado para la definición del umbral de pobreza.

Cuadro 1: Datos muestrales

	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
obs	5053	4831	4771	4571	4445	6472	6358	6326	6298	6442	6605	6525
Media	1453,77	1576,54	1586,35	1687,72	1800,30	1474,82	1670,31	1716,75	1912,70	1961,04	2006,40	2005,43
Mediana	1200,00	1325,00	1350,00	1430,06	1531,63	1195,00	1359,04	1487,18	1591,67	1654,21	1700,00	1702,08

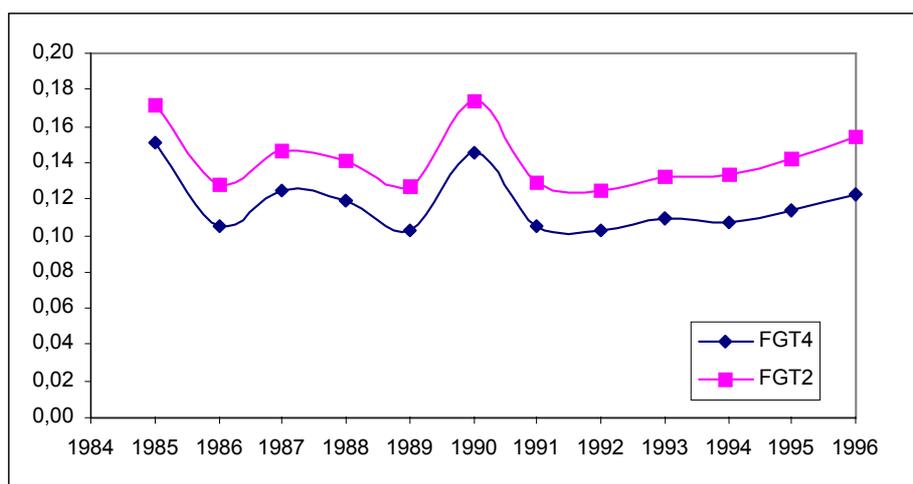
Las Figuras 1 y 2 obtenidas a partir de los índices H, FGT₂ y FGT₄ permiten conocer la trayectoria de la pobreza en Alemania en el periodo 1985-1996.

Figura 1: Trayectoria del índice “Incidencia de la Pobreza”, H=FGT₁, Alemania 1985-1996



En la Figura 1 puede observarse la trayectoria seguida por el índice “incidencia de la pobreza” calculado utilizando dos líneas de pobreza: i) línea de pobreza definida como el 50% de la renta per cápita disponible media (pobmedia) y ii) aquella definida como el 50% de la mediana del ingreso disponible per cápita (pobme). Se observa que desde 1987 hasta 1989 la proporción de hogares pobres disminuye, aumenta bruscamente en 1990 (año de la Reunificación Alemana), decrece considerablemente justamente después de la Reunificación como consecuencia de las medidas de política social emprendidas. En el período 1992-1996 crece paulatinamente hasta alcanzar en 1996 un valor aproximado al de 1985 debido a los esfuerzos económicos que exigió el proceso de Reunificación. Como cabría esperar, dada las propiedades estadísticas de la media y mediana, la proporción de pobres obtenida con la media es mayor que aquella calculada con la mediana.

Figura 2: Trayectoria de los índices FGT₂ y FGT₄ Alemania 1980-1996



Como se puede observar en la Figura 2, la trayectoria seguida por FGT₂ y FGT₄ en el periodo 1985-1996 es análoga a la seguida por el índice FGT₁. En el año 1985 y 1990 nos encontramos con las mayores proporciones de hogares pobres y además estos hogares son más intensamente pobres. Como era de esperar no solo el número de pobres y la intensidad de la pobreza se acentuó en el año de la Reunificación Alemana, ya que las condiciones de vida de Alemania Oriental fueron mucho peores que en Alemania Occidental. La decisión política de ajustar las condiciones de vida en las dos Alemanias provocó un importante incremento del gasto público, motivando así una reducción considerable del porcentaje de pobres y de la intensidad de la pobreza justamente a partir del año 1990. A partir de 1990 a 1996 se observa un crecimiento suave en la intensidad de la pobreza debido a que el gasto público se mantuvo constante en dicho periodo.

Una vez realizado el análisis de corte transversal, procedemos a llevar a cabo el análisis de duración en el estado de pobreza, para lo cual presentamos en el Cuadro 2 una clasificación de los hogares de acuerdo con su estado de pobreza/no pobreza.

Cuadro 2: Distribución hogares 1985-1996 (N=11.148)

Nunca Pobres	Pobres algún año		No disponibles
	Salen algún año de la pobreza	Siempre Pobres	
3273	5282	1400	1193

Para nuestro análisis se eligieron aquellos hogares que salen de la pobreza algún año. Con la sub-muestra de estos hogares se procedió a calcular la duración de cada uno de los periodos y el tipo de censura. De algunos hogares se obtuvieron varios periodos en pobreza. El tipo de periodos y el número de los mismos se presentan en el cuadro siguiente. Para el análisis empírico se utilizaron los periodos no censurados y aquellos censurados a la derecha.

Cuadro 3. Distribución de los periodos de pobreza y censura

No Censurados	Censurados Izquierda	Censurados Derecha	Censurados Izquierda-Derecha
2059	1404	3825	1702

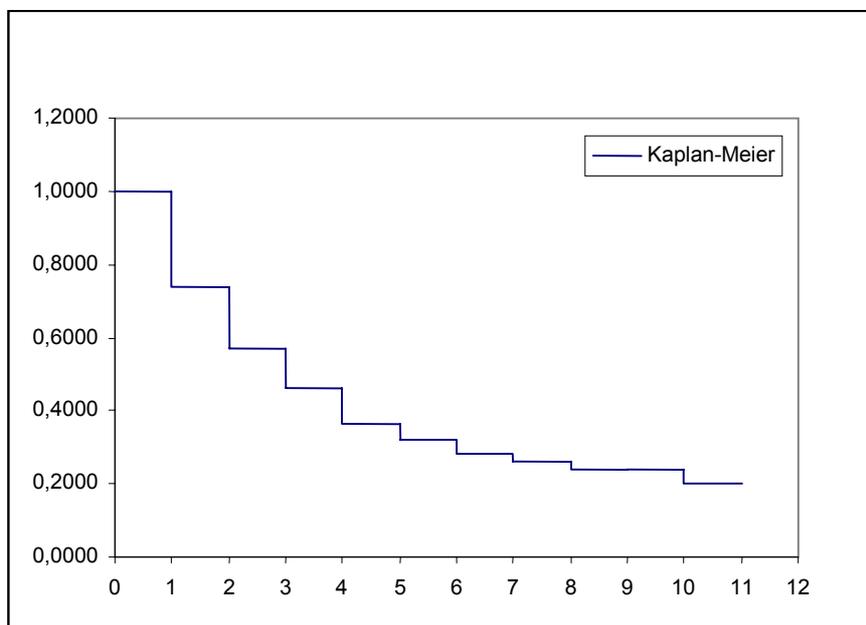
El Cuadro 4 ofrece una descripción de la estructura de la variable duración o permanencia en la pobreza expresada en años para la muestra y la representación gráfica del estimador de Kaplan-Meier se muestra en la Figura 3.

Cuadro 4

Estimador de Kaplan-Meier										
T. pobreza	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	L. inferior	L. superior	$\theta_j=dj/nj$	ES(θ_j)	
0	0	0	5884	1,0000						
1	1536	3033	5884	0,7390	0,0077	0,7503	0,7278	0,2610	0,0057	
2	305	417	1315	0,5676	0,0170	0,5868	0,5489	0,2319	0,0116	
3	113	170	593	0,4594	0,0262	0,4836	0,4364	0,1906	0,0161	
4	64	73	310	0,3646	0,0391	0,3936	0,3377	0,2065	0,0230	
5	21	53	173	0,3203	0,0482	0,3521	0,2914	0,1214	0,0248	
6	11	36	99	0,2847	0,0599	0,3202	0,2532	0,1111	0,0316	
7	4	14	52	0,2628	0,0720	0,3027	0,2282	0,0769	0,0370	
8	3	9	34	0,2396	0,0896	0,2857	0,2010	0,0882	0,0486	
9	0	9	22	0,2396	0,0896	0,2857	0,2010	0,0000	0,0000	
10	2	6	13	0,2028	0,1484	0,2712	0,1516	0,1538	0,1001	
11	0	5	5	0,2028	0,1484	0,2712	0,1516	0,0000	0,0000	
Media	4,68				0,12	4,44	4,92			
Mediana	3,00				0,12	2,77	3,23			

En esta tabla n_j es el número de hogares en riesgo en T_j (es decir, el número de hogares cuyo periodo de pobreza es mayor o igual que T_j); d_j es el número de hogares que abandonan la pobreza en T_j ; w_j se corresponde con el número de censurados a la derecha en T_j (es decir, número de hogares del cual no se sabe con exactitud su duración debido a que o bien ha terminado el estudio sin que hayan salido de la pobreza o bien se han perdido para la muestra). La única información de la que se dispone para estos últimos es que su periodo de permanencia en la pobreza es mayor que T_j . Con estos tres estadísticos se puede realizar la estimación de la función de supervivencia o permanencia en la pobreza, $S(t)$, y la tasa de salida o riesgo, θ_j . Para estimar la función de supervivencia se utiliza el estimador de Kaplan-Meier. Además, se proporciona el error estándar y un intervalo asintótico del 95% de confianza, utilizando la fórmula de Greenwood [Lancaster (1990)], para este último. Asimismo, se proporciona una estimación de la función riesgo subyacente en el estimador de Kaplan-Meier y su error estándar. En las últimas filas se proporcionan las estimaciones de la media (limitada a un periodo de 11 años) y de la mediana, así como sus respectivos errores estándar y un intervalo asintótico del 95% de confianza.

Figura 3: Estimador Kaplan-Meier



Como se puede observar si un hogar está en su primer año en pobreza, la probabilidad de salir es 0,2610 (θ_1). Sin embargo, si un hogar está en el sexto año la probabilidad de salir cae a 0,1111 (θ_6). La tasa de salida decrece por dos razones: primero, se observa dependencia de duración negativa a partir del primer periodo, es decir, a medida que transcurre el tiempo en

pobreza disminuye la probabilidad de salir de la pobreza⁵. Este fenómeno puede ser explicado desde un punto de vista social, porque a mayor tiempo del hogar en pobreza mayor será el efecto necesario para salir de ella. Por otra el decrecimiento en la probabilidad de salida de la pobreza vendría provocado por la heterogeneidad de la población en pobreza.

A continuación se observa cómo algunas características de los hogares afectan al proceso de salida de la pobreza.

3.1 Variable género

El Cuadro 5 permite estudiar el efecto de la variable género en la duración en pobreza. La comparación entre las funciones de supervivencia de acuerdo con el sexo del sustentador principal se muestra en la Figura 4.

Cuadro 5: Duraciones de la muestra según el sexo del sustentador principal

T. pobreza	Hombres							Mujeres						
	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	θj	ES(θj)	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	θj	ES(θj)
0	0	0	3846	1,0000				0	0	2038	1,0000			
1	1010	1972	3846	0,7374	0,0096	0,2626	0,0071	526	1061	2038	0,7419	0,0131	0,2581	0,0097
2	199	270	864	0,5676	0,0210	0,2303	0,0143	106	147	451	0,5675	0,0292	0,2350	0,0200
3	69	107	395	0,4684	0,0312	0,1747	0,0191	44	63	198	0,4414	0,0479	0,2222	0,0295
4	52	51	219	0,3572	0,0490	0,2374	0,0288	12	22	91	0,3832	0,0630	0,1319	0,0355
5	15	32	116	0,3110	0,0606	0,1293	0,0312	6	21	57	0,3429	0,0776	0,1053	0,0406
6	7	26	69	0,2794	0,0729	0,1014	0,0363	4	10	30	0,2972	0,1056	0,1333	0,0621
7	3	11	36	0,2562	0,0885	0,0833	0,0461	1	3	16	0,2786	0,1238	0,0625	0,0605
8	3	5	22	0,2212	0,1225	0,1364	0,0732	0	4	12	0,2786	0,1238	0,0000	0,0000
9	0	6	14	0,2212	0,1225	0,0000	0,0000	0	3	8	0,2786	0,1238	0,0000	0,0000
10	1	3	8	0,1936	0,1813	0,1250	0,1169	1	3	5	0,2229	0,2556	0,2000	0,1789
11	0	4	4	0,1936	0,1813	0,0000	0,0000	0	1	1	0,2229	0,2556	0,0000	0,0000
Media	4,61				0,15			4,8				0,22		
Mediana	3				0,14			3				0,17		

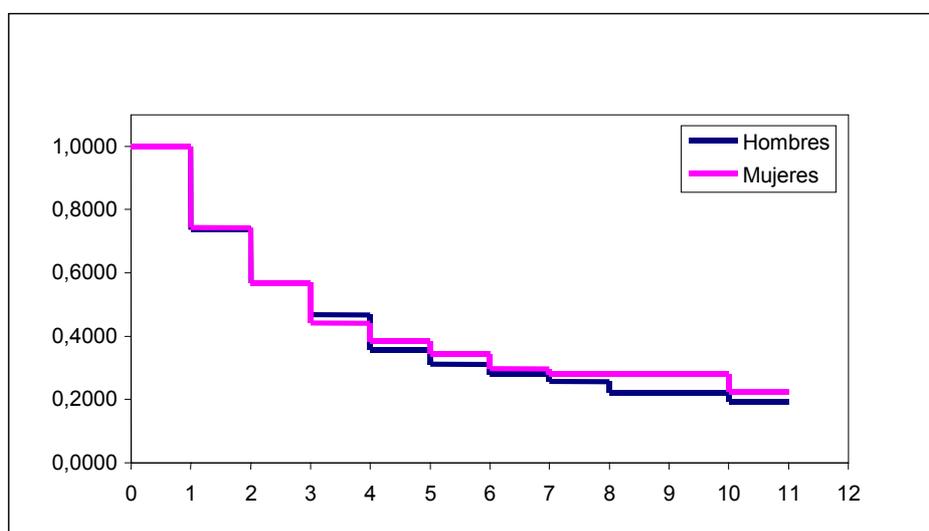
En principio, a raíz de los datos de la tabla se podría concluir que no hay diferencias significativas en la probabilidad de salir de la pobreza para “períodos cortos de pobreza”, concretamente hasta dos años en pobreza, entre aquellos hogares cuyo sustentador principal es hombre de aquellos en los que es una mujer. Por tanto, se observa que el fenómeno de la feminización de la pobreza, que se obtiene en los estudios de corte transversal [Renés (1993)], no se traslada con la misma “intensidad” a los estudios longitudinales cuando nos centramos

⁵ Este resultado ha sido también observado en estudios de pobreza en relación a otros países [Bane and Ellwood (1986), Cantó (1996), González (2001)]

en “períodos cortos de pobreza”. Por otra parte, sí se observan diferencias importantes en la probabilidad de salir de la pobreza cuando la duración es de más de dos años.

Por otra parte, si atendemos a las estimaciones de la función de supervivencia, observamos que la probabilidad de experimentar pobreza más de cinco años es mayor si el sustentador principal es mujer que si es hombre. Este hecho vendría a confirmar que las mujeres experimentan períodos de pobreza permanente en mayor medida que los hombres, lo que pone de manifiesto una vez más el fenómeno de feminización de pobreza para períodos amplios de pobreza⁶.

Figura 4: Estimador Kaplan-Meier según sexo del sustentador principal



Por último, destacamos cómo la duración media en el estado de pobreza es mayor en aquellos hogares donde el sustentador principal es mujer respecto a aquellos en los que el sustentador principal es hombre. De hecho, mientras que la duración media en el hombre es de 4,61 años en la mujer es 4,8. Por otra parte, tal y como se observa en la representación gráfica del estimador Kaplan-Meier y en el Cuadro 5 la mediana de la duración en pobreza coincide en aquellos hogares con sustentador principal mujer y con sustentador principal hombre.

3.2 Variable Educación

En el Cuadro 6 se encuentran los resultados de la comparación de las sub-muestras según el nivel de estudio del sustentador principal en el momento en que empezaba el periodo de

⁶ La mayor permanencia en pobreza de los hogares con sustentador principal mujer se corrobora en otros estudios longitudinales [Jenkins et al. (2001), Cantó et al. (2002), González (2001)]

pobreza. La representación gráfica de la función de supervivencia se presenta en la Figura 5. El nivel educativo lo forman las siguientes modalidades: i) ED1, Primer nivel (primaria). En Alemania comprende desde el primer hasta el sexto grado; ii) ED2, nivel que corresponde a la educación obligatoria; iii) ED3, nivel que incluye la preparación para la Universidad u otro nivel educativo dirigido a una profesión; iv) ED4, nivel que incluye estudios universitarios o estudios técnicos.

Cuadro 6

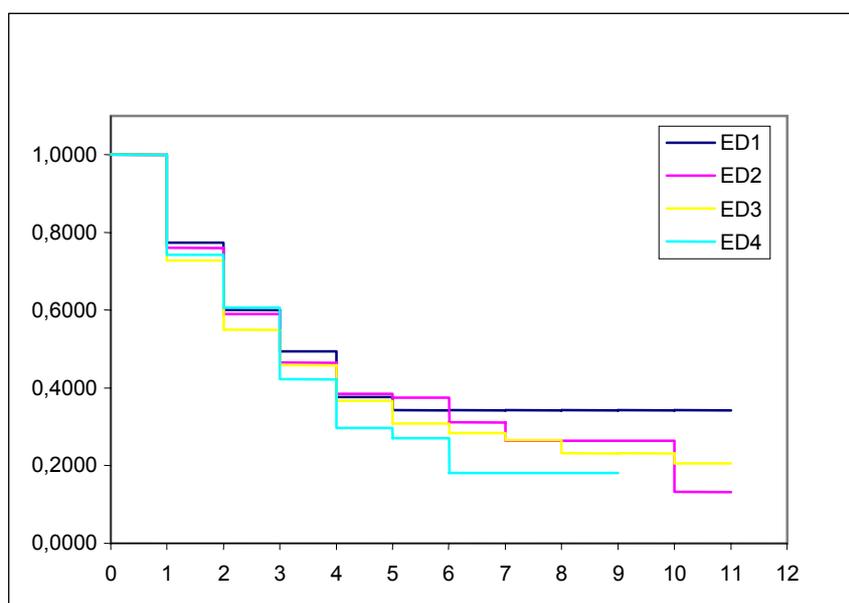
Duraciones de la muestra según el nivel educativo del sustentador principal																
	Con estudios de primer nivel								Con estudios de segundo nivel							
	T. pobreza	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	θ_j	ES(θ_j)	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	θ_j	ES(θ_j)	
0	0	0	309	1,0000					0	0	1113	1,0000				
1	70	145	309	0,7735	0,0308	0,2265	0,0238	266	557	1113	0,7610	0,0168	0,2390	0,0128		
2	21	28	94	0,6007	0,0633	0,2234	0,0430	65	83	290	0,5904	0,0358	0,2241	0,0245		
3	8	16	45	0,4939	0,0939	0,1778	0,0570	30	43	142	0,4657	0,0563	0,2113	0,0343		
4	5	5	21	0,3763	0,1539	0,2381	0,0929	12	19	69	0,3847	0,0788	0,1739	0,0456		
5	1	4	11	0,3421	0,1811	0,0909	0,0867	1	13	38	0,3746	0,0832	0,0263	0,0260		
6	0	2	6	0,3421	0,1811	0,0000	0,0000	4	7	24	0,3122	0,1235	0,1667	0,0761		
7	0	1	4	0,3421	0,1811	0,0000	0,0000	2	4	13	0,2641	0,1710	0,1538	0,1001		
8	0	1	3	0,3421	0,1811	0,0000	0,0000	0	2	7	0,2641	0,1710	0,0000	0,0000		
9	0	1	2	0,3421	0,1811	0,0000	0,0000	0	3	5	0,2641	0,1710	0,0000	0,0000		
10	0	0	1	0,3421	0,1811	0,0000	0,0000	1	0	2	0,1321	0,7275	0,5000	0,3536		
11	0	1	1					0	1	1	0,1321	0,7275	0,0000	0,0000		
Media	5,3					0,47		4,81					0,27			
Mediana	3,00					0,41		3					0,25			
	Con estudios de tercer nivel								Con estudios de cuarto nivel							
	T. pobreza	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	θ_j	ES(θ_j)	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	θ_j	ES(θ_j)	
0	0	0	3600	1,0000					0	0	862	1,0000				
1	978	1823	3600	0,7283	0,0102	0,2717	0,0074	222	508	862	0,7425	0,0201	0,2575	0,0149		
2	195	254	799	0,5506	0,0225	0,2441	0,0152	24	52	132	0,6075	0,0457	0,1818	0,0336		
3	58	99	350	0,4593	0,0328	0,1657	0,0199	17	12	56	0,4231	0,0993	0,3036	0,0614		
4	39	41	193	0,3665	0,0489	0,2021	0,0289	8	8	27	0,2977	0,1596	0,2963	0,0879		
5	18	32	113	0,3081	0,0638	0,1593	0,0344	1	4	11	0,2706	0,1859	0,0909	0,0867		
6	5	25	63	0,2837	0,0737	0,0794	0,0341	2	2	6	0,1804	0,3433	0,3333	0,1925		
7	2	8	33	0,2665	0,0860	0,0606	0,0415	0	1	2	0,1804	0,3433	0,0000	0,0000		
8	3	6	23	0,2317	0,1179	0,1304	0,0702	0	0	1	0,1804	0,3433	0,0000	0,0000		
9	0	5	14	0,2317	0,1179	0,0000	0,0000	0	0	1						
10	1	5	9	0,2060	0,1667	0,1111	0,1048	0	1	1						
11	0	3	3	0,2060	0,1667	0,0000	0,0000	0	0	0						
Media	4,63					0,15		4,06					0,34	Limitada a 10		
Mediana	3,00					0,16		3,00					0,23			

En términos generales, se puede afirmar que las duraciones en la pobreza son más cortas cuanto más elevado es el nivel de estudios. Así por ejemplo, mientras que el 37,46% de hogares cuyo sustentador principal tiene educación obligatoria (ED2) tienen periodos de

pobreza persistentes, este porcentaje se reduce al 30,81% en el caso de los que ostentan un tercer ciclo de educación (ED3) y a un 27,06% para universitarios y diplomados (ED4).

Se observa que las estimaciones de la función riesgo para aquellos hogares con estudios superiores (ED4) suelen ser mayores que en las otras tres sub-muestras, pudiéndose incluso hablar de otro comportamiento. La función riesgo sería creciente por lo que podría haber dependencia de duración positiva⁷.

Figura 5: Estimador Kaplan-Meier según nivel educativo del sustentador principal



Cuando analizamos las sub-muestras correspondientes a los diferentes niveles educativos, observamos que en general, la curva de supervivencia para los hogares cuyo sustentador principal tiene educación superior está por debajo de las otras tres curvas. Este resultado muestra que a mayor nivel educativo mejores posibilidades tiene el sustentador principal en el mercado de trabajo. Este hecho permitiría que el período de permanencia en pobreza para aquellos sustentadores con nivel de estudios universitarios sea menor que para el resto.

3.3 Variable Trabajo

Los resultados de la comparación de las sub-muestras según la situación laboral del sustentador principal se ofrecen en el Cuadro 7 y la representación gráfica del estimador de Kaplan-Meier en la Figura 6.

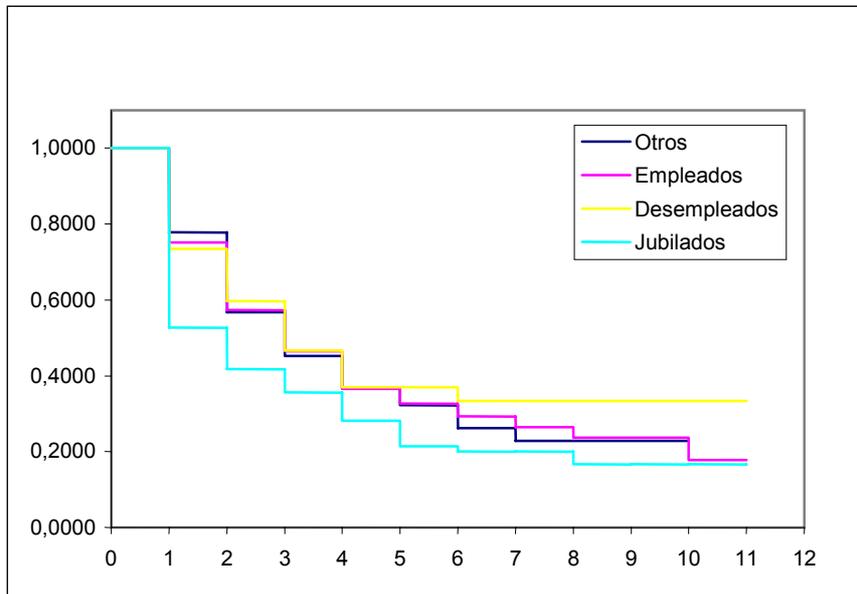
⁷ Los resultados obtenidos para el nivel educativo del sustentador principal también se observan en otros estudios relativos a la duración de la pobreza en España [Cantó (1996)].

Cuadro 7

Duraciones de la muestra según la situación laboral del sustentador principal														
Situación Laboral Otros								Situación Laboral Empleado						
T. pobreza	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	θ_j	ES(θ_j)	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	θ_j	ES(θ_j)
0	0	0	1630	1,0000				0	0	3171	1,0000			
1	362	1010	1630	0,7779	0,0132	0,2221	0,0103	788	1699	3171	0,7515	0,0102	0,2485	0,0077
2	70	74	258	0,5669	0,0402	0,2713	0,0277	162	222	684	0,5735	0,0236	0,2368	0,0163
3	23	33	114	0,4525	0,0619	0,2018	0,0376	57	78	300	0,4645	0,0366	0,1900	0,0226
4	11	14	58	0,3667	0,0887	0,1897	0,0515	35	37	165	0,3660	0,0545	0,2121	0,0318
5	4	13	33	0,3222	0,1098	0,1212	0,0568	10	25	93	0,3266	0,0653	0,1075	0,0321
6	3	5	16	0,2618	0,1627	0,1875	0,0976	6	21	58	0,2929	0,0791	0,1034	0,0400
7	1	1	8	0,2291	0,2105	0,1250	0,1169	3	9	31	0,2645	0,0986	0,0968	0,0531
8	0	2	6	0,2291	0,2105	0,0000	0,0000	2	4	19	0,2367	0,1261	0,1053	0,0704
9	0	3	4	0,2291	0,2105	0,0000	0,0000	0	5	13	0,2367	0,1261	0,0000	0,0000
10	0	1	1	0,2291	0,2105	0,0000	0,0000	2	4	8	0,1775	0,2399	0,2500	0,1531
11	0	0	0					0	2	2	0,1775	0,2399	0,0000	0,0000
Media	4,44	Limitada a 10		0,25				4,69	0,17					
Mediana	3,00			0,28				3	0,16					
Situación Laboral Desempleado								Situación Laboral Jubilado						
T. pobreza	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	θ_j	ES(θ_j)	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	θ_j	ES(θ_j)
0	0	0	610	1,0000				0	0	473	1,0000			
1	162	250	610	0,7344	0,0243	0,2656	0,0179	224	74	473	0,5264	0,0436	0,4736	0,0230
2	37	70	198	0,5972	0,0419	0,1869	0,0277	36	51	175	0,4181	0,0582	0,2057	0,0306
3	20	32	91	0,4659	0,0696	0,2198	0,0434	13	27	88	0,3564	0,0732	0,1477	0,0378
4	8	13	39	0,3704	0,1071	0,2051	0,0647	10	9	48	0,2821	0,1041	0,2083	0,0586
5	0	8	18	0,3704	0,1071	0,0000	0,0000	7	7	29	0,2140	0,1477	0,2414	0,0795
6	1	3	10	0,3333	0,1503	0,1000	0,0949	1	7	15	0,1998	0,1630	0,0667	0,0644
7	0	3	6	0,3333	0,1503	0,0000	0,0000	0	1	7	0,1998	0,1630	0,0000	0,0000
8	0	1	3	0,3333	0,1503	0,0000	0,0000	1	2	6	0,1665	0,2447	0,1667	0,1521
9	0	1	2	0,3333	0,1503	0,0000	0,0000	0	0	3	0,1665		0,0000	0,0000
10	0	0	1	0,3333		0,0000	0,0000	0	1	3	0,1665	0,2447	0,0000	0,0000
11	0	1	1	0,3333	0,1503	0,0000	0,0000	0	2	2	0,1665	0,2447	0,0000	0,0000
Media	5,2			0,35				3,7	0,25					
Mediana	3,00			0,29				2	0,23					

Se observan diferencias entre las sub-muestras de empleados y desempleados, sobre todo para periodos superiores a cinco años. Así, mientras que la probabilidad de permanecer en la pobreza cinco o más años para la sub-muestra de desempleados es de 0,3704 para los empleados es de 0,3266. Sin embargo, para periodos cortos no parece que haya muchas diferencias en cuanto a comportamiento. Si atendemos a las estimaciones de la función riesgo se observa que la probabilidad de salir de la pobreza en el primer año para el grupo de jubilados es casi el doble de dicha probabilidad para el grupo de desempleados. Esta posición favorable del sustentador principal jubilado respecto al sustentador principal desempleado también es evidente si atendemos a las estimaciones de sus correspondientes funciones de supervivencia.

Figura 6: Estimador Kaplan-Meier según situación laboral del sustentador principal



Como se puede apreciar, la curva de supervivencia del grupo de jubilados está por debajo de las demás, lo que pone de manifiesto que en Alemania los jubilados gozan de un buen sistema de protección social que acorta la duración en situación de pobreza. De hecho el gobierno de Khol se enfocó principalmente en ajustar las pensiones de la República Democrática a las pensiones que se recibían en la República Federal de Alemania. Las pensiones incrementaron considerablemente y se estrechó el gap que existía en pensiones en las dos Alemanias.

3.4 El número de preceptores de ingresos

Los resultados de la comparación de las sub-muestras según el número de perceptores se ofrecen en el Cuadro 8 y la representación gráfica de la función de supervivencia según el número de perceptores del hogar en la Figura 7.

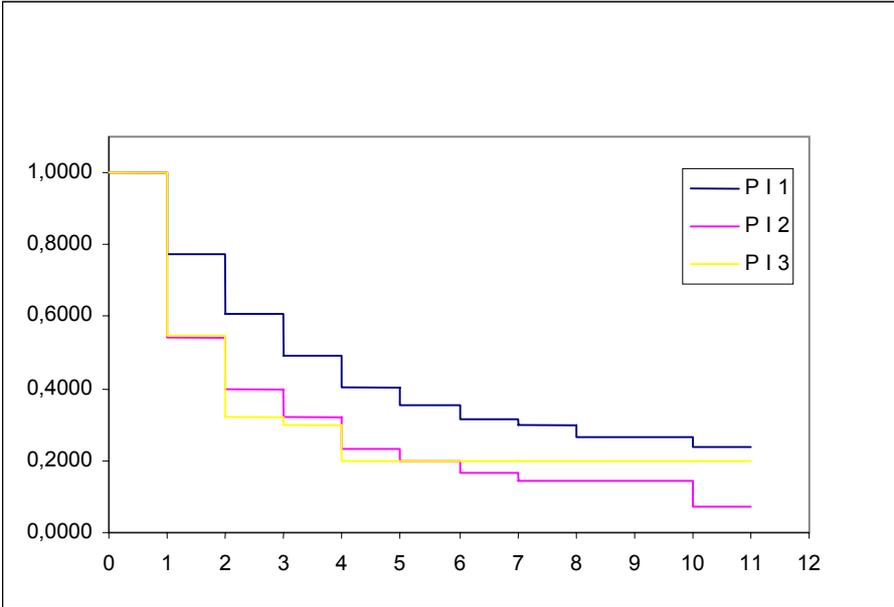
Cuadro 8

Duraciones de la pobreza según el número de perceptores del hogar														
Un Perceptor de Ingresos							Dos Perceptores de Ingresos							
T. pobreza	dj	wj	nj	S(t+)	E.S. θj	ES(θj)	dj	wj	nj	S(t+)	E.S. θj	ES(θj)		
0	0	0	4963	1,0000			0	0	766	1,0000				
1	1115	2849	4963	0,7753	0,0076	0,2247	0,0059	351	154	766	0,5418	0,0332	0,4582	0,0180
2	213	333	999	0,6100	0,0182	0,2132	0,0130	69	67	261	0,3985	0,0498	0,2644	0,0273
3	88	128	453	0,4915	0,0294	0,1943	0,0186	24	37	125	0,3220	0,0662	0,1920	0,0352
4	43	55	237	0,4023	0,0424	0,1814	0,0250	18	15	64	0,2315	0,1025	0,2813	0,0562
5	17	43	139	0,3531	0,0529	0,1223	0,0278	4	10	31	0,2016	0,1236	0,1290	0,0602
6	8	27	79	0,3174	0,0650	0,1013	0,0339	3	7	17	0,1660	0,1670	0,1765	0,0925
7	3	12	44	0,2957	0,0767	0,0682	0,0380	1	2	7	0,1423	0,2274	0,1429	0,1323
8	3	8	29	0,2651	0,0993	0,1034	0,0566	0	1	4	0,1423	0,2274	0,0000	0,0000
9	0	8	18	0,2651	0,0993	0,0000	0,0000	0	1	3	0,1423	0,2274	0,0000	0,0000
10	1	5	10	0,2386	0,1448	0,1000	0,0949	1	1	2	0,0711	0,7428	0,5000	0,3536
11	0	4	4	0,2386	0,1448	0,0000	0,0000	0	0	0				
Media	5,01				0,15			3,94	Limitado a 10		0,15			
Mediana	3,00				0,14			2			0,11			
Tres o más Perceptores de Ingresos														
T. pobreza	dj	wj	nj	S(t+)	E.S. θj	ES(θj)								
0	0	0	155	1,0000										
1	70	30	155	0,5484	0,0729	0,4516	0,0400							
2	23	17	55	0,3191	0,1356	0,4182	0,0665							
3	1	5	15	0,2978	0,1521	0,0667	0,0644							
4	3	3	9	0,1985	0,2805	0,3333	0,1571							
5	0	0	3	0,1985										
6	0	2	3	0,1985	0,2805	0,0000	0,0000							
7	0	0	1	0,1985										
8	0	0	1	0,1985										
9	0	0	1	0,1985										
10	0	0	1	0,1985	0,2805	0,0000	0,0000							
11	0	1	1											
Media	3,55				0,46									
Mediana	2,00				0,43									

Como se puede deducir, el número de perceptores del hogar es una variable que incide en el tiempo de permanencia en la pobreza. Se puede observar que a medida que aumenta el número de perceptores en el hogar la curva de supervivencia se desplaza hacia abajo, por lo que a mayor número de perceptores en el hogar, menor será el tiempo de permanencia en la pobreza. Así por ejemplo, el porcentaje de hogares con periodos de pobreza persistentes era para la sub-muestra de un solo perceptor de ingresos de 35,31%, mientras que para las sub-muestras de dos perceptores y tres y más son de 20,16% y 19,85% respectivamente. También

se puede ver que las tasas de riesgos son mayores para los hogares donde el número de perceptores es mayor y dentro de las sub-muestras se observa dependencia de duración negativa.

Figura 8: Estimador Kaplan-Meier según número de perceptores de ingresos



3.5 Pobreza Permanente

Por último, hemos creído interesante elaborar el Cuadro 9, en el que se presenta una estimación de la probabilidad de que un hogar sea calificado como “pobre permanente” según las características que hemos analizado. Consideramos que un hogar es calificado de “pobre permanente” si su duración en pobreza es superior a cinco años, $S(5)=P(T>5)$. Se observa que para todas las sub-muestras el porcentaje de hogares en pobreza permanente es siempre menor que el porcentaje en pobreza transitoria, oscilando entre el 20% y el 37%. Entre las características proclives a períodos de pobreza permanente destacamos las de sustentador principal mujer, o sustentador con nivel educativo hasta educación obligatoria o se encuentra desempleado o bien el hogar tiene un solo perceptor.

Cuadro 9

Probabilidad de que un hogar sea pobre permanente	
	Pobreza PermanenteP(T>t)
Muestra completa n=5884	0,3202
Sexo Hombre n=3846	0,3110
Sexo Mujer n=2038	0,3429
ED1 n=309	0,3421
ED2 n=113	0,3746
ED3 n=3600	0,3081
ED4 n=862	0,2706
SL otros n=1630	0,3222
SL empleado n=3171	0,3266
SL Desempleado n=610	0,3704
SL jubilado n=473	0,2140
PI1 n=4963	0,3531
PI2 n=766	0,2016
PI3 n=155	0,1985

3. Conclusiones

Se ha realizado un análisis de la pobreza en Alemania y una identificación de los factores que influyen en la duración de un período de pobreza. El período de estudio que cubre los años 1985 a 1996, ha permitido conocer la influencia que la Reunificación Alemana ha tenido en el estado de pobreza de un hogar. Se observó que el porcentaje de pobres se incrementó considerablemente en el año 1990 debido a las peores condiciones de vida de Alemania Oriental en comparación con Alemania Occidental. La Reunificación intensificó, por otra parte, el grado de pobreza. La decisión política de ajustar las condiciones de vida en las dos Alemanias supuso un incremento del gasto público, motivando una reducción no solo en el número de pobres sino también en la intensidad de pobreza experimentada por los mismos, justamente después del año 1990.

Los resultados del estudio reflejan que un análisis no paramétrico es suficientemente ilustrativo para describir la experiencia en pobreza de un grupo de hogares. Además, nos ha permitido determinar la probabilidad de estar en el estado de pobreza más de un cierto número de años, permitiendo así la obtención de proporción de hogares en “pobreza transitoria” y en “pobreza permanente”. Se observa que para cada sub-muestra el porcentaje de hogares en “pobreza permanente” es siempre menor que el correspondiente a “pobreza transitoria”, variando entre un 20 y un 37% respectivamente. De acuerdo con nuestros resultados, podemos afirmar que aquellos sustentadores mujeres o que tiene un nivel de educación obligatoria, o que es desempleado y formado por un único miembro son más propensos a experimentar periodos de pobreza permanente.

Resulta también interesante destacar cómo el proceso de feminización de la pobreza, observado en los estudios de corte transversal, no se aprecian con la misma evidencia en los estudios de corte longitudinal para los periodos en pobreza de corta duración. De hecho, apenas existen diferencias significativas entre hombres y mujeres para aquellos hogares que están en pobreza hasta dos años. No obstante, este fenómeno es especialmente evidente en el supuesto de pobreza permanente, siendo el sustentador principal mujer el que experimenta periodos de pobreza más amplios.

El grupo que experimentó menos períodos de pobreza permanente pertenece a aquellos hogares con dos o más preceptores de ingresos, o con sustentador principal jubilado o con estudios superiores. Como se explicó en el texto, el proceso de Reunificación supuso un crecimiento en el gasto de pensiones más que los correspondientes al desempleo. De hecho, una consolidación real del gasto de desempleo no se logró a pesar de una explosión de la tasa de desempleo. Por otra parte, el grupo de hogares más desfavorecido se caracterizó porque los hogares estaban formados por sustentadores que o bien estaban desempleados o bien tenían estudios primarios.

Agradecimientos: Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por ayudas 2005/SEJ-442, 2006/SEJ-442, P06-TIC-02141 de la Junta de Andalucía. Así mismo, ha sido subvencionado por los proyectos del Ministerio de Ciencia y Tecnología (TIN2004-07246-C03-03), (TSI2006-13390-C02-02). Los autores desean agradecer a los revisores su minuciosidad en la lectura de este trabajo, así como sus sugerencias relativas a futuros trabajos de investigación.

Bibliografía

Ahn, N. and Ugidos-Olazabal, A. (1995). Duration of unemployment in Spain: Relative effects of unemployment benefits and family characteristics, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, vol.57, pp.249-264.

Bane, M. and Ellwood, D. (1986). Slipping into and out of poverty: The dynamics of spells, *Journal of Human Resources*, vol.21, no.1, pp.1-23.

Buhmann, B., Rainwater, L., Schmaus, G. and Smeeding, T. (1988). Equivalence scales, well-being, inequality and poverty, *Review of Income and Wealth*, 34, pp.115-142.

- Cantó, O. (1996). Poverty dynamics in Spain: A study of transitions in the 1990s. Tech. Rep. 15, STICERD Analysis Research Programme.
- Cantó, O. (2000). Income mobility in Spain: How much is there?, *Review of Income and Wealth*, vol.43, n.1, pp.85-102.
- Cantó, O., Río, C. and Gradín, C. (2002). Poverty statistics and dynamics: does accounting period matter?, *Papeles de Trabajo 22/02*, Instituto de Estudios Fiscales.
- CES (1996). *La pobreza y la exclusión social en España*. Ed. Nices.
- Chakravarty, S. (1990). *Ethical Social Index numbers*. Springer Verlag, Berlin.
- Citro, C. and Michel, R. (1995). *Measuring Poverty: A new approach*, National Academy Press, Washington D.C.
- Cox, D. (1972). Regression models and life tables, *Journal of the Royal Statistical Society*, vol.34, series B, pp.1987-220.
- Cox, D. and Oakes, D. (1984). *Analysis of Survival Data*, Chapman and Hall, London.
- Deleeck, K. and Van den Bosch, L. (1990). Dimensión de la pobreza en un contexto comparativo: Evidencia empírica y evaluación metodológica de cuatro umbrales de la pobreza en siete países de la comunidad europea. *Cuadernos de Acción Social*, vol.4, pp.76-107.
- Domínguez, J. y Martín, A. (2006). Medición de la pobreza: una revisión de los principales indicadores, *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, vol.2, pp.27-66.
- Donaldson, D. and Weimark, J. (1986). Properties of fixed population poverty indices. *International Economic Review*, 3(27), pp.667-688.
- Duncan, G., Gustafsson, B. Schmauss G. Messinger, H. Muffels H. and Ray J. (1993). Poverty dynamics in eight countries, *Journal of Population Economics*, vol.6, pp.215-234.
- Escribano, C. (1990). Evolución de la pobreza en España 1973-1987, *Información Comercial Española*, no.686, pp.81-108.
- Foster, J., Greer, J. and Thobercke, E. (1984). A class of decomposable poverty measures, *Econometrica*, 3(52), pp.761-766.

González, M.R. (2001). Aspectos Metodológicos en la Medición de la Pobreza. Las Prestaciones Sociales y el Perfil de la Pobreza. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

González, M.R. (2003). La situación de la pobreza en España en el período 1985-1995 según la Encuesta Continua de Presupuestos Familiares, *Revista de Humanidades*, vol.12, pp.263-284.

González, M.R., Velasco, F., González, L. y Martín, D. (2006). A non-parametric study of poverty dynamics in Germany from 1985-1996, *Scientific Bulletin of Chelo*, n.1, pp.47-66.

Guzmán, P., Toledo, M., Bellido, N., López, J. y Jano, P. (1996). Desigualdad y Pobreza en España. Un estudio basado en las Encuestas de Presupuestos Familiares de 1973-74, 1981-82 y 1990-91. INE, Madrid.

Heckman, B. and Singer, B. (1984). Econometric duration analysis, *Journal of Econometrics* vol. 24, no.1, pp.63-132.

Hosmer, D.W. and Lemeshow S. (1999). *Applied survival analysis: Regression modelling of time to event data*, John Wiley & Sons Inc., New York.

Jenkins, S. (2000). Modelling household income dynamics, *Journal of Population Economics*, vol.13, pp.93-116.

Jenkins, S., Rigg, J. and Devicienti, F. (2001). *Dynamic of Poverty in Britain*, DWP Research Report 157, Institute for Social and Economic Research (ISER).

Jenkins, S. and Serrano, C. (2004). The relationship between unemployment benefits and re-employment probabilities: evidence from Spain, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, vol. 66, pp.239-260.

Kalbfleisch, J.D. and Prentice, R.L. (1980). *The statistical analysis of failure time data*, John Wiley and Sons Inc., New York.

Kennan, J. (1985). The duration of contract strikes in US manufacturing, *Journal of Econometrics*, vol.28, pp.5-28.

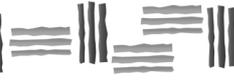
Kiefer, N. (1988). Economic duration data and hazard functions, *Journal of Economic Literature*, vol.26, pp.646-679.

Krause, P. (2003). Poverty and income dynamics in Germany. In: Krause, P. et al. (2003): *Combating Poverty in Europe*, pp.93-116.

- Krause, P., Bäcker, G. and Hanesch, W. (2003). *Combating Poverty in Europe*, Ed. Ashgate Verlag.
- Lancaster, T. (1990). *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, New York.
- Lawless, J. F. (1982). *Statistical models methods for lifetime data*, John Wiley & Sons, New York.
- Mercader, M. (1995). *The low income population in Spain and a comparison with France and UK. Evidence from the Household Expenditures Surveys. WSP/95.*
- Pakes, A. and Simpson, M. (1989). *Patent renewal data*, Tech Report, Brooking Papers on Economic Activity, Microeconomics.
- Renés, A. (1993). *Luchar contra la pobreza hoy*. Hoac, Madrid.
- Ruggles, P. and Williams, R. (1989). *Longitudinal measures of poverty: accounting for income and assets over time*, *Review of Income and Wealth*, 35(3).
- Sen, A.K. (1976). *Poverty: an ordinal approach to measurement*, *Econometrica*, vol.44, n.2, pp.219-231.
- Sen, A.K. (1978). *Three notes on the concept of poverty*, International Labour Office, Geneva (WEP 2-23/WP 65).
- Sen, A.K. (1979). *Issues in the measurement of poverty*, *Scandinavian Journal of Economics*, vol.81, pp.285-307.
- Sen, A.K. (1992). *Nuevo examen de la desigualdad*. Alianza Editorial, Madrid.
- Shmaus, G. and Riebschläger, M. (1997). *Paco Panel Comparability*, User Manual, version 30-9-97, CEPS-INSTEAD.
- Stevens, A. (1994). *The dynamics of poverty spells: Updating Bane and Ellwood*, *American Economic Review*, vol.84, n.2, pp.34-37.
- Stevens, A. (1995). *Measuring the Persistence of Poverty over multiple Spells*, NBER Working Paper no.5390, Cambridge MA.
- Stevens, A. (1999). *Climbing out of Poverty, falling back in*, *Journal of Human Resources* vol.34, pp.557-588.



UNIVERSIDAD
PABLO
OLAVIDE
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA
LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (4). Páginas 35–55.
Diciembre de 2007. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/art13.pdf>

Matemática financiera con MATLAB®

MERINO, MARÍA

Departamento de Matemática Aplicada, Estadística e Investigación Operativa
Universidad del País Vasco

Correo electrónico: maria.merino@ehu.es

VADILLO, FERNANDO

Departamento de Matemática Aplicada, Estadística e Investigación Operativa
Universidad del País Vasco

Correo electrónico: fernando.vadillo@ehu.es

RESUMEN

Este artículo quiere mostrar los usos y las utilidades de *MATLAB*®, tanto en la enseñanza como en las aplicaciones de la Matemática Financiera. El artículo tiene dos partes bien diferenciadas: en la primera se hace un estudio estadístico de los datos del Ibex 35 durante gran parte del año 2006 y en la segunda se comentan y aplican los métodos matemáticos utilizados para estimar la prima de las opciones financieras.

Palabras clave: MATLAB; Ibex 35; valoración de opciones; componentes principales; ecuaciones de Black-Scholes; método Monte Carlo; método binomial.

Clasificación JEL: C15; C63; G13.

2000MSC: 62P20; 82B80.

Mathematical Finance with MATLAB[®]

ABSTRACT

The aim of this paper is to present the MATLAB tools for the teaching and the applications in the Mathematical Finance. This paper has two parts; the first one is a statistical study of the movement of the prices for the securities in the Ibex 35 during the year 2006. The second one is about the different procedures: the Black-Scholes equation, Monte-Carlo method and Binomial method, to calculate the prices of financial options.

Keywords: MATLAB; Ibex 35; options valuation; principal components; Black-Scholes equations; Monte Carlo method; binomial method.

JEL classification: C15; C63; G13.

2000MSC: 62P20; 82B80.



1. INTRODUCCIÓN

MATLAB® (MATrix LABoratory) es un lenguaje para la computación científica y un entorno computacional interactivo orientado a matrices. Se distingue de otros lenguajes como Fortran o C++ porque su nivel de ejecución es muy superior, incluyendo cientos de operaciones con un solo comando.

Desde las primeras versiones de Cleve Moler y sus colaboradores a finales de los años setenta (véase [25]), ha llegado a ser una poderosa herramienta para investigar y resolver problemas en todos los campos científicos y técnicos. Actualmente, son ya numerosos los textos que ofrecen introducciones a *MATLAB*®, si bien las referencias [13] y [26] aún no han sido mejoradas. En la página de Internet <http://www.mathworks.es> se puede apreciar la enorme cantidad de información en su entorno: libros, programas, enlaces, grupos de noticias, reuniones científicas...

En el campo de la Matemática Financiera, *MATLAB*® dispone de un conjunto muy amplio de comandos agrupados en tres *Toolboxes* o librerías de funciones:

- **Statistics Toolbox.**
- **Financial Toolbox.**
- **Financial Derivative Toolbox.**

Este conjunto de programas permiten realizar muchas de las operaciones estadísticas y financieras habituales con gran eficacia y rapidez. Los resultados que se presentan utilizan algunos de estos comandos, incluidos en rutinas de elaboración propia. Toda la computación se ha realizado en un ordenador portátil Fujitsu-Siemens, con el procesador Intel(R) Pentium(R) M a 1.60 GHz, de 504 MB de RAM.

El artículo tiene dos partes diferentes: en la primera (Sección 2) se analizan estadísticamente los datos de las cotizaciones de las empresas del Ibex 35 durante casi todo el año 2006, un estudio realizado con ayuda de **Statistics Toolbox**. Los resultados obtenidos han sido corroborados con el paquete estadístico *SPSS*®, si bien estos no se han reproducido para evitar mayor extensión en el texto.

La segunda parte (Secciones 3, 4 y 5) está dedicada a estimar el precio de las opciones financieras, para las que [17], [18] y [34] son referencias obligadas. En la Sección 3 se explica el modelo geométrico browniano y se estudia su adaptación en los datos anteriores. En la Sección 4 se comentan las técnicas de evaluación de opciones financieras que se aplican a un ejemplo para comprobar la proximidad de los resultados. Finalmente, en la Sección 5 se estudian las opciones americanas de venta para entender las dificultades que van apareciendo. Esta parte muestra las principales ventajas de *MATLAB*® frente a otras herramientas existentes en el mercado: su polivalencia y versatilidad.

En la Sección 6 se aportan las conclusiones de las que se destacan dos necesidades urgentes:

1. La de incluir alguna introducción de *MATLAB*® en los estudios de la Matemática Financiera.
2. La de crear grupos de investigación multidisciplinares.

Finalmente un comentario sobre la bibliografía: referencias sobre las herramientas estadísticas hay muchas; son tantos los textos y tan parecidos que casi cualquiera de ellos puede ayudar al lector con dificultades; en particular, se recomienda por comodidad y rapidez el diccionario [10].

2. UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE LOS DATOS

Los datos que aquí se analizan son los valores, al cierre de la sesiones, de las acciones de las empresas que formaban el Ibex 35 el día 4 de diciembre del 2006, fecha en que se recibieron los datos que van desde el 1 de enero del 2006 hasta el 29 de noviembre del mismo año; en total son 234 días de cotizaciones.

En la Figura 1 se representan las variaciones en los precios de los cinco valores que se indican, en abcisas se representan los 234 días y en ordenadas los valores de las acciones al cierre de la sesión en cada uno ellos. Los tres primeros fueron elegidos por su volumen, Endesa por los motivos conocidos por la prensa diaria y Antena 3 porque destacará en el análisis posterior. A la vista de estas gráficas, lo único que cabe destacar son los comportamientos erráticos de subida y bajada de las acciones que no parecen responder a ninguna ley matemática.

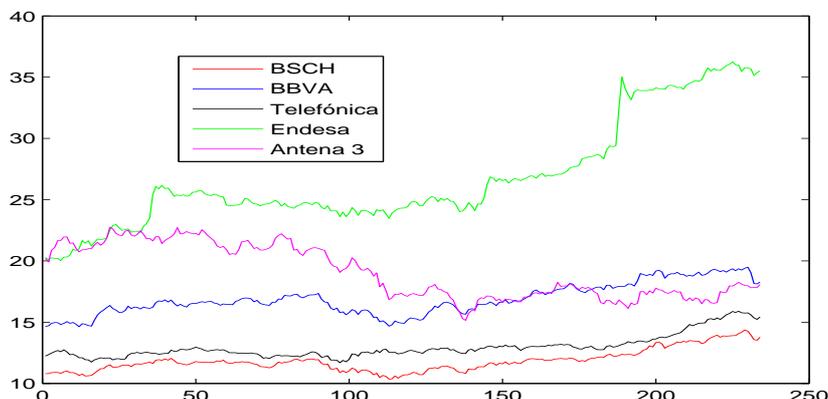


FIGURA 1. Variaciones de cinco valores

Para estudiar la evolución de los precios de los 35 valores es evidente que se necesita reducir su número, puesto que analizarlos todos, sería una labor larga y poco clarificadora. Lo habitual es analizar las **componentes principales**, una técnica del Análisis Multivariante introducida por Kart Pearson a principios del siglo XX (véase [28]), posteriormente estudiada por Hotelling en los años 30 (véase [15] y [16]) y que ha alcanzado una gran popularidad desde la aparición de los ordenadores.

Se ha realizado la prueba de esfericidad de Bartlett, siendo la hipótesis nula que la matriz de correlaciones, R , se ajuste a la matriz identidad, I , (es decir, ausencia de correlación significativa entre las variables, con lo que la nube de puntos se ajustaría a una esfera perfecta). Tomando como tamaño muestral $n = 234$ y como número de variables $m = 35$, el estadístico χ -cuadrado se expresa como $\chi_p^2 = -(n - 1 - \frac{1}{6}(2m + 5)) \ln(|R|)$, siguiendo una distribución χ_g^2 con $g = C_m^2 = m(m - 1)/2 = 595$ grados de libertad. Bajo la hipótesis nula $H_0 : R = I$, el estadístico toma el valor 0, con lo que el p-valor $p = P(\chi_{595}^2 > \chi_p^2)$ resulta ser $p < 0,0005$ a un nivel de confianza del 95%. Por tanto, hay evidencia estadística para rechazar la ausencia de correlación, es decir, se rechaza la hipótesis nula.

Por otro lado, se ha calculado el índice KMO de Kaiser-Meyer-Olkin (que es una medida de adecuación muestral). Su valor se calcula como el cociente entre la suma de correlaciones

simples y la suma de correlaciones simples y parciales. Si el valor de este índice resultase pequeño, se desaconsejaría usar el análisis de componentes principales. En este caso el índice vale 0,942, por lo que resulta muy aceptable utilizar dicho análisis.

El comando `princomp` de *MATLAB*® calcula las componentes principales para una matriz de datos. También se pueden calcular los valores y vectores propios de la matriz de correlación usando los comandos `corrcoef` y `eigs` porque la componente principal es el autovector asociado al autovalor dominante de dicha matriz. En los resultados se han obtenido cuatro autovalores mayores que uno que son 23,877, 5,8266, 1,768 y 1,1055.

Por otra parte, la prueba de Bartlett, que puede realizarse con el comando `barttest`, calcula el número de componentes principales que deben considerarse. En este caso, se obtienen dos componentes con una significación del 5% y que recogen el 84,87% de la varianza original, lo cual es un porcentaje muy aceptable. En la Figura 2 se han representado, para las 35 empresas, las dos primeras componentes principales rotadas utilizando el comando `rotatefactors`.

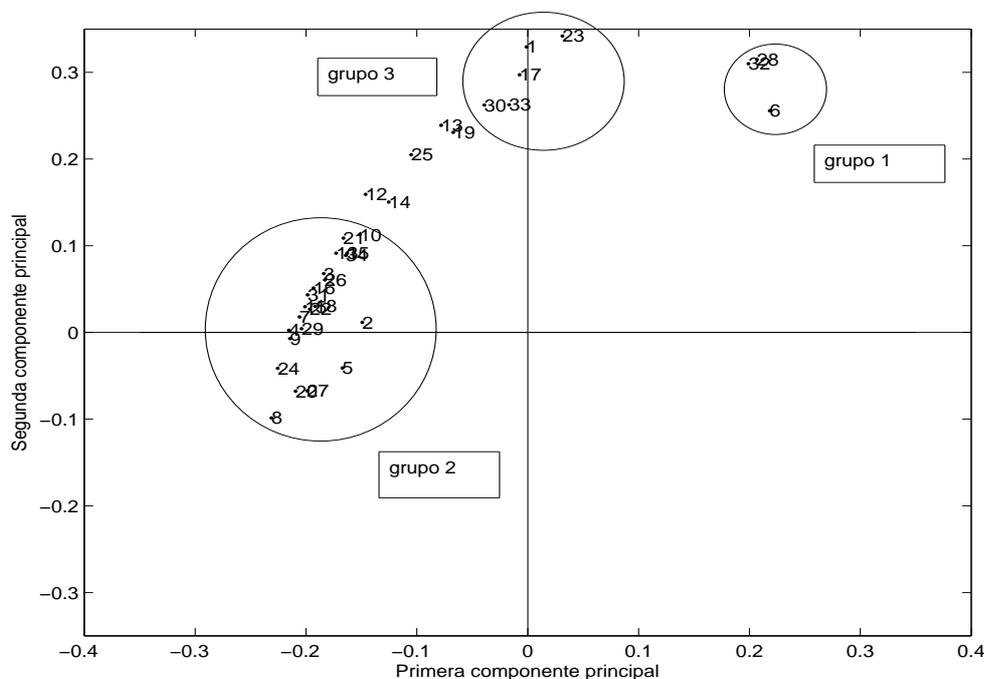


FIGURA 2. Componentes principales de las 35 compañías

En el eje de abscisas se ha representado la primera componente principal. Los puntos representados parecen dividirse en dos grupos. El grupo 1 (con los índices 6, 28 y 32, correspondientes a las compañías Antena 3 TV, Prisa y Sogecable, respectivamente) se sitúa en un extremo del eje positivo, mientras que el grupo 2 (formado por una gran mayoría) se sitúa en el extremo opuesto. En la primera gráfica de la Figura 3 se ha representado la evolución del grupo 1, mientras que en la segunda aparece la evolución de ACS, Banco Sabadell, Banesto e Inditex, que corresponden a los índices 4, 8, 9 y 24, respectivamente, del grupo 2. Se podría concluir que la primera componente principal representaría la tendencia general, asociando el lado positivo a la tendencia a la baja y el negativo a la alza.

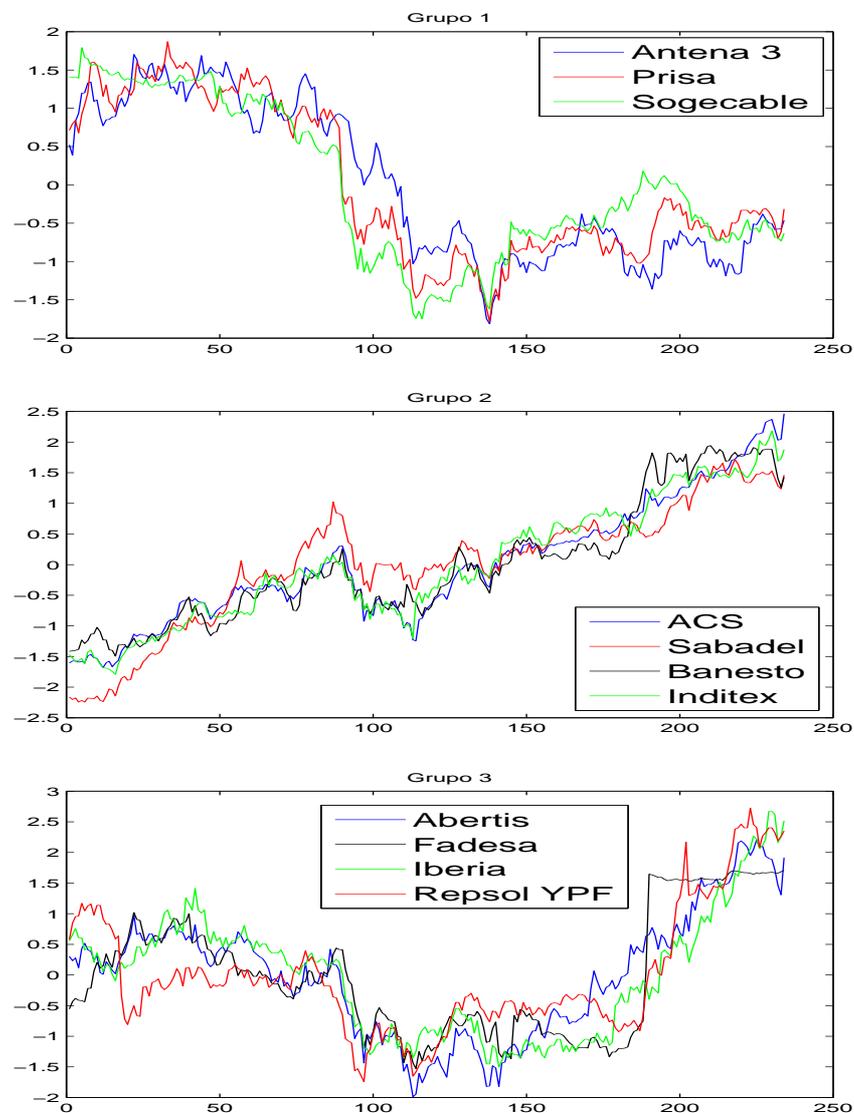


FIGURA 3. Evolución de los precios en los tres grupos

Respecto a la segunda componente principal, representada en el eje de ordenadas, parece detectar los saltos importantes en la evolución de los precios. Esto se observa en los grupos 1 y 3, situados en el lado positivo. En este último grupo se han elegido Abertis, Fadesa, Iberia y Repsol YPF, que corresponden a los índices 1, 17, 23 y 30, respectivamente. Los saltos comentados anteriormente no se observan en el grupo 2, en el que los valores de las ordenadas son pequeños.

En conclusión se han observado tres grupos de comportamientos diferenciados en las empresas del Ibex 35:

1. Tendencia a la baja con saltos.
2. Tendencia a la alza con movimientos suaves.
3. Tendencia menos alcista pero con saltos.

3. UN MODELO ESTOCÁSTICO PARA LA EVOLUCIÓN DE LOS PRECIOS

Todos hemos observado en algún momento un movimiento browniano. Uno de los ejemplos clásicos consiste en las trayectorias de partículas de polvo danzando en un rayo de luz solar. Cada partícula gira de acá para allá, se eleva, se hunde, se vuelve a elevar...: el movimiento es totalmente aleatorio sin llegar jamás al reposo.

El movimiento browniano toma su nombre del botánico inglés *Robert Brown*, que en 1827 lo describió como el movimiento de una partícula sumergida en un líquido o gas (véase [6]). Brown inicialmente colocó bajo el microscopio células sexuales masculinas pertenecientes al polen de una planta y el movimiento que observó lo argumentó diciendo que era el movimiento vital de los espermatozoides. Después Brown observó el mismo movimiento en células pertenecientes a otras partes de la planta, formulando una nueva hipótesis sobre el movimiento vital: se trata de la **Urmolekül**, la molécula básica de la vida que está contenida en toda materia viviente, una teoría que tuvo mucha importancia para los biólogos de la época. Pero la principal complicación se le planteó cuando descubrió este movimiento perpetuo en las raspaduras de rocas sumergidas en el agua: ¿acaso la materia inanimada contiene también la Urmolekül vital? Llegado a este punto, prudentemente, Brown se abstuvo de realizar más hipótesis y dejó sin explicar la naturaleza del movimiento browniano.

Algunos años después, el movimiento browniano apareció en la Física a finales del siglo XIX por la controversia entre los atomistas y los energicistas. Los principales defensores de la teoría atomista, J. Clerk Maxwell y Ludwig Boltzmann en [3], [4], [5] y [21], desarrollaron modelos de gases compuestos por átomos o moléculas en constante movimiento relacionado con la temperatura. Sin embargo, destacados científicos de la época, como Ernst Mach y Wilhelm Ostwald en [19], [20] y [27] rechazaron la hipótesis atomista porque en su opinión estaba basada en átomos y movimientos invisibles. Este rechazo se cree que fue una de las causas de la depresión que acabó en el suicidio de Boltzmann en 1906.

Años después, en 1901 un joven y desconocido Albert Einstein en [9] explicó la termodinámica partiendo del movimiento de las partículas y en 1905 en colaboración con físicos experimentales, pudo confirmar que las propiedades cualitativas del movimiento browniano y las magnitudes de los caminos recorridos por las partículas correspondían con los resultados de la teoría, este argumento acabó con la resistencia a la teoría atomista.

La definición matemática de movimiento browniano la dió el matemático americano Norbert Wiener en 1920 (véase [32] y [33]) y es la siguiente:

Definición. Un proceso de Wiener o movimiento browniano W_t es un proceso continuo con las propiedades siguientes:

- (a) $W_0 = 0$ con probabilidad uno.
- (b) Para todo $t \geq 0$, $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$; es decir, W_t es una variable normalmente distribuida de media 0 y varianza t .
- (c) Todo los incrementos $\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t$ son independientes; es decir, para todo $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$, los desplazamientos $W_{t_2} - W_{t_1}$ y $W_{t_4} - W_{t_3}$ son independientes.
- (d) W_t depende continuamente de t .

En realidad se puede prescindir de la condición $W_0 = 0$ cambiando ligeramente la definición (Ejercicio 1.9 de la referencia [30]).

Resulta bastante sencillo simular numéricamente movimientos brownianos. El algoritmo es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Valores iniciales:} \quad & W_0 = 0, t_0 = 0, \Delta t, \\ \text{para} \quad & j = 1, 2, \dots \\ & t_j = t_{j-1} + \Delta t \\ & \mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ & W_j = W_{j-1} + \mathcal{Z} \sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

donde \mathcal{Z} es un número aleatorio con distribución normal de media cero y varianza uno. El algoritmo para generar este tipo de números está explicado en el Capítulo 2 de la referencia [30] y en *MATLAB*® está implementado en el comando `randn`, que puede consultarse en el Capítulo 20 de la referencia [13].

En la Figura 4 se han dibujado tres trayectorias del movimiento browniano que evidentemente recuerdan a las trayectorias de la Figura 1.

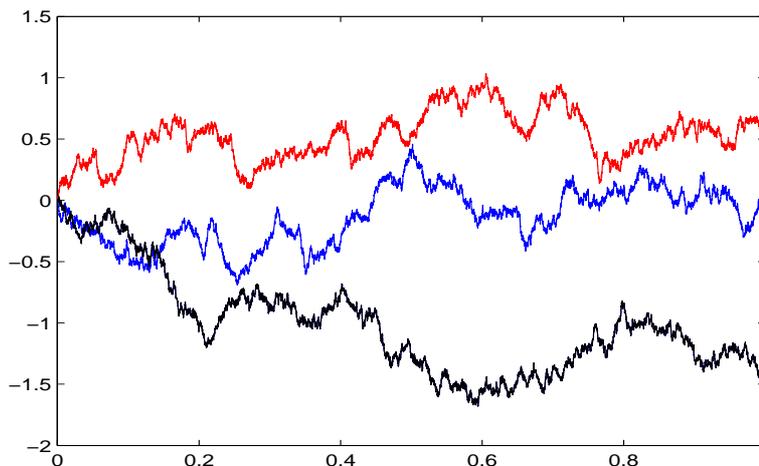


FIGURA 4. Tres trayectorias brownianas

En 1900 el matemático francés Louis Bachelier, discípulo de Poincaré, utilizó en su tesis doctoral [1] el movimiento browniano como modelo para estudiar las variaciones en los precios de los stocks, si bien el proceso de Wiener presenta dos importantes inconvenientes para esta aplicación:

1. Si los precios siguieran este modelo, estos podrían tomar valores negativos.
2. El movimiento browniano verifica que, para $0 \leq s < t$, el incremento de la variable $W_t - W_s$ se distribuye como una variable aleatoria $\mathcal{N}(0, t - s)$, sin considerar si s y t son grandes o pequeños, sólo cuenta su diferencia. Una hipótesis que parece poco razonable para los precios de los stocks y las materias primas.

Para describir el comportamiento del precio de las acciones, suele asumirse la denominada **hipótesis del mercado eficiente**, la cual afirma que el precio actual incluye toda la información disponible concerniente a las acciones, incluida la información en el pasado. Esto significa que todos los inversores conocen al momento cualquier tipo de noticia que pueda afectar a los precios, y que sus movimientos de futuro no dependen del pasado, por lo que serían modelizables por procesos de Markov.

En el modelo geométrico browniano (**GBM**: Geometric Brownian Motion) se impone una hipótesis logarítmica normal según la cual, si $S(t)$ es la variable aleatoria que representa el precio de la acción en el instante t y que inicialmente vale S_0 , entonces:

$$(3.1) \quad \ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma\right)t, \sigma^2 t\right),$$

donde aparecen los dos parámetros siguientes:

1. μ es el rendimiento esperado de las acciones, porque la esperanza de la variable aleatoria $S(t)$ resulta ser:

$$\mathbb{E}(S(t)) = S_0 e^{\mu t}.$$

2. σ es la volatilidad del precio de las acciones, porque mide la incertidumbre sobre los movimientos futuros. La varianza de $S(t)$ es:

$$\text{Var}(S(t)) = S_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1).$$

Basándose en estos argumentos, el precio de la acción en el instante t sería:

$$(3.2) \quad S(t) = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}\mathcal{Z}}, \quad \text{donde } \mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

En las referencias [12] y [30], se utiliza el método de Monte Carlo para simular numéricamente GBM con distintos valores para los parámetros μ y σ . En realidad es algo muy parecido a lo que antes se hizo para el movimiento browniano.

El objetivo ahora es comprobar si el movimiento de los precios de las acciones ha seguido modelos GBM con distintos valores de los parámetros μ y σ . Para ello se calcula la nueva variable aleatoria

$$D(n) = \ln\left(\frac{S(n)}{S(n-1)}\right)$$

a la que se realiza el clásico test de los cuantiles de normalidad. En la parte superior de la Figura 5 se representa la gráfica cuantil-cuantil normal para las acciones del BSCH. Los puntos o cruces cercanos a la bisectriz del primer cuadrante parecen confirmar la hipótesis de normalidad y, por tanto, el GBM. En la parte inferior de dicha figura se ha comparado el histograma de los datos con la distribución normal, siendo el resultado otro argumento favorable para la hipótesis de normalidad.

En los tests realizados para otras compañías, los resultados son muy parecidos al anterior excepto para la compañía eléctrica Endesa, cuyos resultados se han representado en la Figura 6. En este caso, los puntos alejados de la diagonal y el histograma parecen rechazar el modelo GBM.

Según el contraste de hipótesis de normalidad de Kolmogorov-Smirnov (que se realizaría con el comando `kstest`), la hipótesis de normalidad queda rechazada a un nivel de significación del 5% para los casos Endesa, Fadesa, Metrovacesa y NHhoteles ($p < 0,0005$) y para los casos ACS ($p = 0,015$), Gas Natural ($p = 0,038$), Iberdrola ($p = 0,012$), Repsol YPF ($p = 0,040$) y Sacyr Vallehermoso ($p = 0,033$). Para los casos restantes, no hay evidencia estadística para rechazar la normalidad.

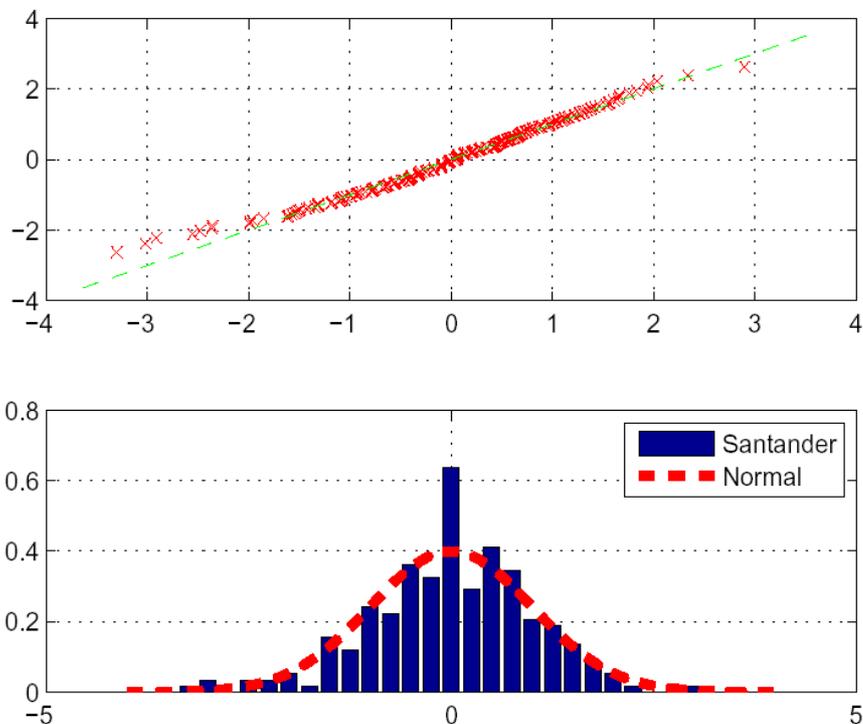


FIGURA 5. Santander: gráfica cuantil-cuantil normal

Otra cuestión a considerar en el estudio realizado es la aleatoriedad o no en el precio de las acciones de Endesa. Para estudiar esta cuestión, se realiza una prueba χ -cuadrado a partir de una tabla de contingencia construida de la siguiente manera.

Se clasifica cada día por uno de los cuatro estados siguientes:

1. si $D(n) \leq -0,01$,
2. si $-0,01 < D(n) \leq 0$,
3. si $0 < D(n) \leq 0,01$,
4. si $0,01 < D(n)$.

Esto significa que si al día n le corresponde el estado 1, entonces:

$$D(n) = \ln \left(\frac{S(n)}{S(n-1)} \right) \leq -0,01 \Leftrightarrow \frac{S(n)}{S(n-1)} \leq e^{-0,01} \approx 0,99005;$$

es decir, ese día el valor habría bajado, al menos, un 1%. El estado 2 indicaría que la bajada habría sido menor al 1%; el estado 3 una subida no superior al 1% y el estado 4, una mayor que el 1%. Después de conocer el estado de cada día, se contará el número de cambios de estado del i al j ; anotándolo en la posición (i,j) de la tabla de contingencias. Finalmente, si la variable $D(n)$ es aleatoria, como supone el GBM, las filas de la tabla deben ser independientes. Esta hipótesis puede cuantificarse con la prueba χ -cuadrado. Las tablas

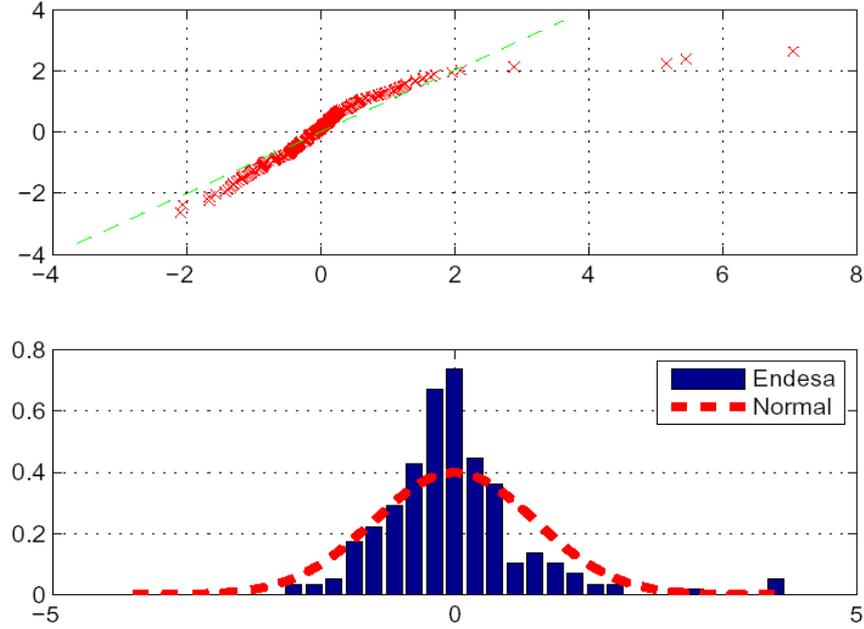


FIGURA 6. Endesa: gráfica cuantil-cuantil normal

de contingencia se obtuvieron implementando el algoritmo de clasificación de los cuatro estados en *MATLAB*© y la χ -estimación con el comando `chi2cdf`.

En el Cuadro 1 se reproducen las tablas de contingencia para el BSCH y Endesa. El test χ -cuadrado para el BSCH indica que no hay evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula de aleatoriedad porque el p -valor es 0,784. Por el contrario, para Endesa dicha probabilidad es 0,032, lo que evidentemente provoca un absoluto rechazo de la hipótesis; es decir, Endesa en este periodo de cotizaciones no parece haber seguido un movimiento aleatorio. Realizando la prueba de rachas (más débil que la anterior prueba χ -cuadrado) para la media, se rechaza la hipótesis de aleatoriedad en las compañías FCC y NHoteles.

Los dos parámetros que describen el movimiento de los precios, según el modelo GBM, son el rendimiento μ y la volatilidad σ . Sin embargo, el parámetro que diferencia los movimientos de unas acciones de otras es la volatilidad porque se aplica el conocido **principio de valoración neutral del riesgo** que conlleva la hipótesis $\mu = r$, siendo r el tipo de interés libre de riesgo.

Para estimar las volatilidades se utilizan los datos de la siguiente manera: para cada sucesión de valores $D(n)$, con $n = 1, \dots, M$, se calculan su media y varianza, con las siguientes expresiones respectivas:

$$a_M = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M D(n),$$

$$b_M^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{n=1}^M (D(n) - a_M)^2.$$

BSCH					Endesa				
i \ j	1	2	3	4	i \ j	1	2	3	4
1	6	12	8	10	1	6	5	8	8
2	11	19	26	14	2	11	31	31	8
3	14	26	28	13	3	6	29	39	12
4	5	12	19	9	4	4	15	9	10

CUADRO 1.

Como además $D(n) \sim \mathcal{N}((\mu - \frac{1}{2}\sigma)\Delta t, \sigma^2\Delta t)$, donde Δt es el tiempo entre cada dos datos, se puede concluir que: $\sigma^2\Delta t \approx b_M^2$ y por tanto:

$$\sigma \approx \frac{b_M}{\sqrt{\Delta t}}.$$

En el Cuadro 2 se recogen las estimaciones de las distintas volatilidades, correspondiendo el mayor valor a Sacyr y los menores a Telefónica, BSCH y BBVA.

Compañía	Volatilidad
Acciona	0.2951
ACS	0.1925
Antena 3	0.2621
BBVA	0.1846
BSCH	0.1795
Endesa	0.2214
FCC	0.2646
Gamesa	0.2629
Iberdrola	0.2431
Iberia	0.2467
Prisa	0.2050
Repsol	0.2282
Sacyr	0.3770
Sogecable	0.2881
Telecinco	0.2238
Telefónica	0.1462

CUADRO 2.

Existen otros estimadores para la volatilidad de un GBM, (veáse, por ejemplo, el Capítulo 20 de la referencia [12]). En general, son leves modificaciones de la expresión anterior y en las comprobaciones numéricas los valores computados son ligeramente superiores, con lo que no afectan a las conclusiones realizadas en esta sección.

4. ESTIMACIÓN DEL PRECIO DE LAS OPCIONES FINANCIERAS

Un contrato de opciones financieras es un acuerdo que confiere al poseedor el derecho, pero no la obligación, de comprar (**call**) o vender (**put**) un activo financiero en una fecha

futura a un precio pactado en el momento del contrato. El activo objeto del contrato es el activo subyacente, el precio pactado es el precio de ejercicio (**strike**) y la fecha límite para ejercer el derecho es la fecha de expiración (**expiry**) o fecha de ejercicio o vencimiento de la opción.

Las opciones son uno de los productos financieros habituales para cubrir riesgos de carteras de valores. Actualmente, en los mercados se negocian opciones sobre:

- Acciones de empresas: en Estados Unidos se negocian opciones sobre las acciones de más de 500 empresas.
- Índices de acciones.
- Divisas.
- Contratos de futuros.

En España, el Mercado Oficial de Futuros y Opciones Financieras es el MEFF. En su página web <http://www.meff.com> se pueden consultar todos los productos financieros de futuros y opciones disponibles en el mercado local.

La cuestión matemática que se plantea en la siguiente sección es determinar el precio de las opciones, lo que se denomina la **prima** de la opción. Dicha prima se debe calcular para evitar estrategias de ganancia segura superior a la conseguida en un depósito bancario con el mismo capital, son los conocidos **principios de no arbitraje** que se explican en textos clásicos, como [12], [18] y [29], además de en [34].

Para calcular la prima de una opción, se utilizan tres métodos o técnicas que brevemente se comentan a continuación:

1. Las ecuaciones de Black-Scholes.
2. El método binomial.
3. El método de Monte Carlo.

4.1. Las ecuaciones de Black-Scholes. Uno de los descubrimientos más influyentes en la Matemática Financiera fue el realizado por F. Black y M. Scholes [2] en 1973 para estimar el precio de las opciones sobre acciones, aunque fue R. Merton [22], también en 1973, el que realizó el análisis matemático riguroso. Merton y Scholes obtuvieron por estas investigaciones el premio Nobel de Economía en 1997; desgraciadamente Black había fallecido en 1995.

Las hipótesis que consideraron Black y Scholes para el tiempo T de vida de la opción son las siguientes:

1. El movimiento del precio de las acciones es un GBM con los valores de los parámetros μ y σ constantes.
2. No hay costes de transacción ni impuestos.
3. No hay reparto de dividendos ni partición sobre las acciones.
4. El tipo de interés libre de riesgo r es constante.
5. Los inversores pueden pedir o dejar prestado al mismo tipo de interés.
6. La negociación de valores es continua.
7. Se permiten las ventas en corto.

Suponiendo que las opciones se pueden comprar y vender a su precio $V(t)$ en cualquier momento $0 \leq t \leq T$, un análisis utilizando argumentos clásicos de no arbitraje (véase, por ejemplo, Capítulo 8 de [12]), demuestra que $V(t)$ verifica la famosa **ecuación de Black-Scholes**:

$$(4.1) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

donde S representa el precio del activo subyacente, y además destacan dos cuestiones importantes:

1. No aparece el parámetro del rendimiento esperado de la acción μ .
2. No se ha especificado el tipo de opción: europea, americana...

Para determinar un único precio de la opción $V(S, t)$, además de la ecuación en derivadas parciales (4.1), se deberán especificar condiciones iniciales y de contorno sobre cada tipo de opción en particular. Por ejemplo, para las opciones europeas de venta (put) sería:

$$\begin{aligned} P^{Eu}(S, T) &= \text{máx}(E - S(T), 0), \\ P^{Eu}(0, t) &= Ee^{-r(T-t)}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq T, \\ P^{Eu}(S, t) &\approx 0, \quad \text{para } S \text{ grande,} \end{aligned}$$

donde E es el precio de ejercicio de la opción y T el tiempo de expiración. La solución exacta de (4.1) con estas condiciones son las famosas **fórmulas de Black-Scholes**, que se pueden encontrar en todos los textos clásicos [12], [17], [29], [34] y [35].

Estas fórmulas de Black-Scholes sólo involucran a la función de distribución de la normal y conllevan cálculos muy sencillos que se pueden realizar en cualquier ordenador. En *MATLAB*® por ejemplo, para los datos $S(0) = 3, E = 1, T = 1, r = 0,05$ y $\sigma = 0,3$, el precio de la opción europea put tiene la prima $P^{Eu} = 0,9276$; mientras que para la opción call por paridad sale $C^{Eu} = 0,1227$.

Para otros muchos tipos de opciones, no existen o no se conocen soluciones exactas de la ecuación en derivadas parciales (4.1) con las correspondientes condiciones iniciales y de frontera. En estos casos, se han de calcular aproximaciones numéricas. Para ello es conveniente realizar un cambio de variables, consistente en pasar de las variables (S, t, V) a las nuevas (x, τ, u) definidas por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} S &= E \cdot e^x, \\ t &= T - \frac{\tau}{\sigma^2/2}, \\ V &= E \cdot u(x, \tau). \end{aligned}$$

En estas nuevas variables se obtiene la ecuación en derivadas parciales:

$$(4.2) \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k - 1) \frac{\partial u}{\partial x} - ku,$$

que recuerda a las clásicas ecuaciones de difusión que además contienen un único parámetro $k = r/(\sigma^2/2)$. Llegado a este punto, se pueden utilizar los métodos numéricos clásicos para resolver ecuaciones en derivadas parciales, tal y como se explica en las referencias [12] y [30]. En el ejemplo anterior se utilizará el comando `pdepe` de *MATLAB*® explicado en [13].

En las nuevas variables la condición inicial es:

$$u(x, 0) = \text{máx}(1 - e^x, 0),$$

y las dos condiciones de frontera en el intervalo $[a, b]$ con $a = \ln(1/4)$ y $b = \ln(5/4)$, son

$$u(a, \tau) = \frac{4e^{-k\tau} - 1}{4}$$

y

$$u(b, \tau) = 0.$$

La superficie solución está dibujada en la la Figura 7. Después se recuperan las variables originales (S, t, V) e interpolando, la aproximación obtenida para el valor de la opción es $P^{Eu} \approx 0,9213$, obtenida en 8.583342 segundos de computación. Sin duda la aproximación es bastante satisfactoria e incluso se podría mejorar con menores tamaños de paso.

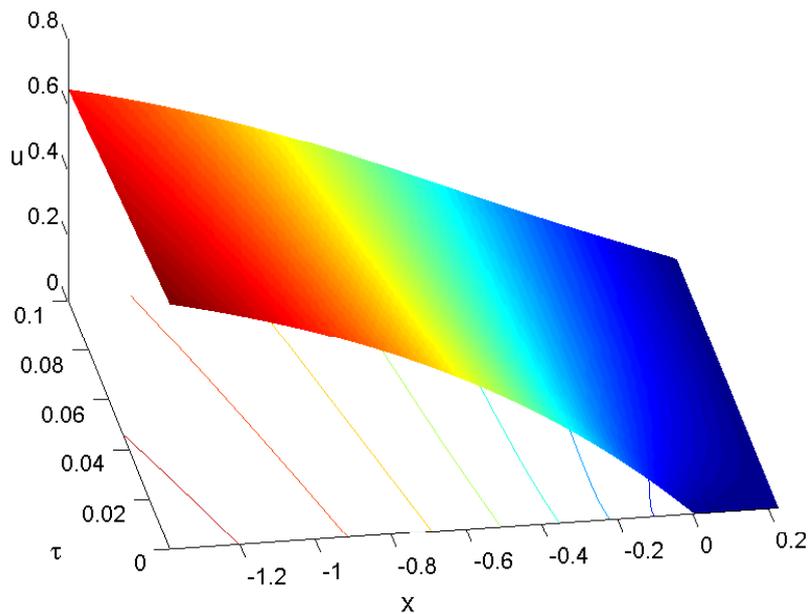


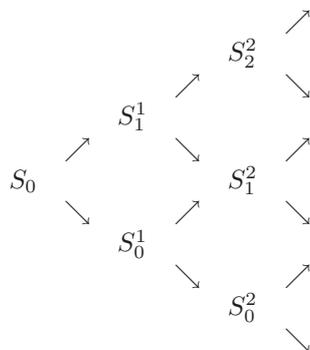
FIGURA 7. Opciones europeas Put

4.2. El método binomial. El método binomial fue propuesto por Cox, Ross y Rubinstein [7] en 1979 y tiene la ventaja de ser robusto y sencillo de programar, por lo que es ampliamente utilizado.

Ahora estamos ante un modelo discreto. En primer lugar, se toma un paso en tiempo $\Delta t = T/M$ con los niveles de tiempo $t_i = i\delta t$ para $i = 0, \dots, M$ y se supone que el precio de la acción en cada paso sube un factor u con probabilidad p o baja un factor d con probabilidad $1 - p$, es decir:

$$S_{i+1} = \begin{cases} u \cdot S_i, & \text{con probabilidad } p, \\ d \cdot S_i, & \text{con probabilidad } 1 - p, \end{cases}$$

donde $S_i = S(t_i)$. Entonces, para cada $0 \leq i \leq M$, todos los posibles precios son $S_n^i = d^{i-n}u^n S_0$ con $0 \leq n \leq i$, lo cual se resume en el esquema siguiente:



En el tiempo final $t_M = T$, el tipo de opción permite calcular el valor de la opción mediante la expresión:

$$V_n^M = \Lambda(S_n^M), \quad 0 \leq n \leq M,$$

donde Λ representa la función payoff final de la opción.

Como el valor buscado es V_0^0 (el valor de la opción en $t = 0$), un proceso inverso al anterior permite ir retrocediendo en el esquema de derecha a izquierda y calcular los valores de la opciones para cada i con $0 \leq i \leq M - 1$, usando las expresiones:

$$V_n^i = e^{-r\Delta t} (pV_{n+1}^{i+1} + (1-p)V_n^{i+1}), \quad 0 \leq n \leq i.$$

Para conocer los valores de los parámetros u , d y p , se supone el GBM en el precio de las acciones con lo que se obtienen las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} p \ln u + (1-p) \ln d &= (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t, \\ \ln\left(\frac{u}{d}\right) &= \sigma \sqrt{\frac{\Delta t}{p(1-p)}}, \end{aligned}$$

que se suelen completar con una hipótesis de simetría entre la subida y bajada de los precios que, matemáticamente, se expresa de la forma:

$$u \cdot d = 1,$$

o también se suele tomar $p = \frac{1}{2}$.

En el ejemplo anterior de las opciones europeas put, la función payoff es:

$$(4.3) \quad \Lambda(S(T)) = \max(E - S(T), 0),$$

que, implementada en *MATLAB*©, calcula una prima de 0.9277 en 0.072340 segundos de computación. Recuerde que el precio para la fórmula de Black-Scholes fue 0.9276.

4.3. El método de Monte Carlo. La aparición del método de Monte Carlo suele situarse en 1949, cuando J. von Neumann y S. Ulam propusieron utilizar la teoría de probabilidades para resolver mediante ordenadores las ecuaciones de los reactores atómicos [31], véase también la referencia clásica [24]. Un artículo que refleja bastante bien la evolución del desarrollo de este método en su inicio es [23]. Desde sus comienzos se ha utilizado con notable éxito en muy diferentes aplicaciones, como pueden ser las siguientes:

- Simulación de variables aleatorias con distintas distribuciones.
- Estimación de integrales múltiples.
- Resolución de ecuaciones integrales de segundo orden.
- Resolución de ecuaciones elípticas.

En Matemática Financiera la referencia más completa sobre este método es [11].

El método de Monte Carlo está basado en la simulación de variables aleatorias y el cálculo de estimadores estadísticos para las magnitudes buscadas. Los algoritmos para generar sucesiones de números aleatorios o, habitualmente, pseudoaleatorios con diferentes distribuciones son fundamentales para este método (ver Capítulo 2 de [30]). La librería *Statistic Toolbox* de *MATLAB*© dispone de una amplia variedad de generadores de este tipo de números.

Suponiendo que se quisiera conocer la esperanza a y, quizá también, la varianza b^2 de una variable aleatoria X cuya distribución es conocida, se generan los números pseudoaleatorios con la misma distribución X_1, X_2, \dots, X_M para M grande y se calculan los valores:

$$a_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i,$$

cuya esperanza vale a y que, por tanto, aproximan dicha media. Posteriormente, se calcula:

$$b_M^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (X_i - a_M)^2,$$

de esperanza también b^2 , por lo se obtiene una aproximación de la varianza buscada. Además, por el Teorema Central del Límite, $\sum_{i=1}^M X_i$ se comporta como una variable aleatoria normal de media $M \cdot a$ y varianza $M \cdot b^2$ por lo que:

$$a_M - a \approx \mathcal{N}\left(0, \frac{b^2}{M}\right),$$

pudiéndose concluir que existe una probabilidad del 95% de que la media a buscada se encuentre en el intervalo:

$$\left[a_M - \frac{1,96b_M}{\sqrt{M}}, a_M + \frac{1,96b_M}{\sqrt{M}} \right].$$

En esta expresión ya se aprecia la mayor debilidad de este método: la longitud del intervalo de confianza decrece como el inverso de la raíz cuadrada del número de ensayos M lo que resulta lento. Para reducir una décima el error, se debe multiplicar por 100 el número de ensayos. En los Capítulos 21 y 22 de [12] se explican algunas técnicas para mejorar estos resultados.

Para implementar este método se simula la evolución de los precios del activo usando la expresión (3.2), después se usa la función payoff (4.3) para calcular el precio de la opción en T y finalmente se traslada este valor a $t = 0$. Para el ejemplo del las opciones europeas, se han obtenido los resultados de la tabla adjunta. La aproximación también es buena, aunque requiere de un mayor tiempo de computación.

número de ensayos	intervalo de confianza al 95 %	tiempo de computación
10^5	[0,9246, 0,9331]	0.370456 segundos
10^6	[0,9258, 0,9285]	0.696400 segundos
10^7	[0,9270, 0,9279]	6.048441 segundos

5. LAS OPCIONES AMERICANAS

La mayoría de las opciones negociadas en los mercados son opciones americanas; esto significa que el poseedor puede ejercerlas en cualquier momento antes del final de ejercicio T . Comparadas con las opciones europeas que sólo permiten comprar o vender en el instante final T y utilizando argumentos vía arbitraje (véase Capítulo 5 de [29]) se puede demostrar que sus primas verifican las relaciones:

$$\begin{aligned} C^{Am} &= C^{Eu}, \\ P^{Am} &> P^{Eu}, \end{aligned}$$

donde C y P indican opción call o put y el superíndice las opciones europeas o americanas. La novedad está por lo tanto en las opciones americanas put.

La función payoff de dichas opciones es:

$$\Lambda(S(t)) = \max(E - S(t), 0), \quad \text{para } 0 \leq t \leq T,$$

verificándose también la desigualdad,

$$P^{Am}(S, t) \geq \Lambda(S(t)), \quad \text{para } 0 \leq t \leq T, \quad S \geq 0.$$

El método binomial tiene una extensión natural de las opciones europeas a las americanas. En realidad, sólo se necesita modificar el proceso que retrocede en el diagrama sustituyendo la iteración que calcula los valores V_n^i por una nueva que ahora es:

$$V_n^i = \max [\Lambda(S_n^i), e^{-r\Delta t} (pV_{n+1}^{i+1} + (1-p)V_n^{i+1})],$$

para $0 \leq n \leq i$, $0 \leq i \leq M-1$. Con esta leve modificación en el programa y los mismos valores del ejemplo del párrafo anterior, la prima calculada es:

$$P^{Am} = 1,0158.$$

Este mismo resultado se obtuvo usando los comandos `binprice` de la librería Financial Toolbox y `opstockbyeqp` de la librería Derivative Financial Toolbox.

Aplicar el método de Monte Carlo para valorar las opciones americanas no resulta tan sencillo porque necesita expresar, en términos de esperanzas, el valor de la opción, que en este caso es:

$$P^{Am}(S_0, 0) = \sup_{0 \leq \tau \leq T} \mathbb{E} [e^{-r\tau} \Lambda(S(\tau))],$$

que necesita calcular un supremo con la dificultad computacional que ello supone.

Para el ejemplo comentado, se tomaron 220 divisiones del año y se realizaron 100000 simulaciones para varias semillas que generan sucesiones aleatorias diferentes. Las primas calculadas, reproducidas en la tabla adjunta, son inferiores a la cantidad obtenida por el método binomial, aunque no se encuentran demasiado alejadas.

semilla	esperanza calculada	tiempo de computación
1	0.9988	7.710528 segundos
10	0.9988	7.772541 segundos
100	0.9992	7.733027 segundos
1000	0.9993	7.737147 segundos

Finalmente se han considerado las ecuaciones de Black-Scholes porque tienen más dificultades. Las condiciones iniciales y de frontera que se deben añadir a la ecuación en derivadas parciales para las opciones americanas put son tres:

$$\begin{aligned} P^{Am}(S, T) &= \Lambda(S(T)), \quad \text{para todo } S \geq 0, \\ P^{Am}(S, t) &\rightarrow E, \quad \text{cuando } S \rightarrow 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ P^{Am}(S, t) &\rightarrow 0, \quad \text{cuando } S \rightarrow \infty \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

y la solución exacta ya no se conoce. Además, tal y como se explica en el Epígrafe 4.5 de [30], la condición de frontera de la izquierda provoca dificultades numéricas, siendo el problema numérico más sutil desde un punto de vista computacional. Una reciente implementación de Mark Hoyle en la rutina `AmericanOptFD` (disponible en <http://www.mathworks.com>) consigue la solución dibujada en la Figura 8 con una prima a 1,0113 en 0.230643 segundos, un valor muy próximo al calculado por el método binomial.

6. CONCLUSIONES

En [8] y algunas de sus referencias se explica porqué el desarrollo de *MATLAB*® ha provocado el nacimiento de una nueva era en la Computación Científica y también en la enseñanza de todo lo relacionado con ella. La Matemática Financiera no puede quedar al margen de este nuevo paradigma y como aquí se ha mostrado, usando un modesto ordenador personal, se pueden resolver problemas que con otras herramientas parecen inalcanzables.

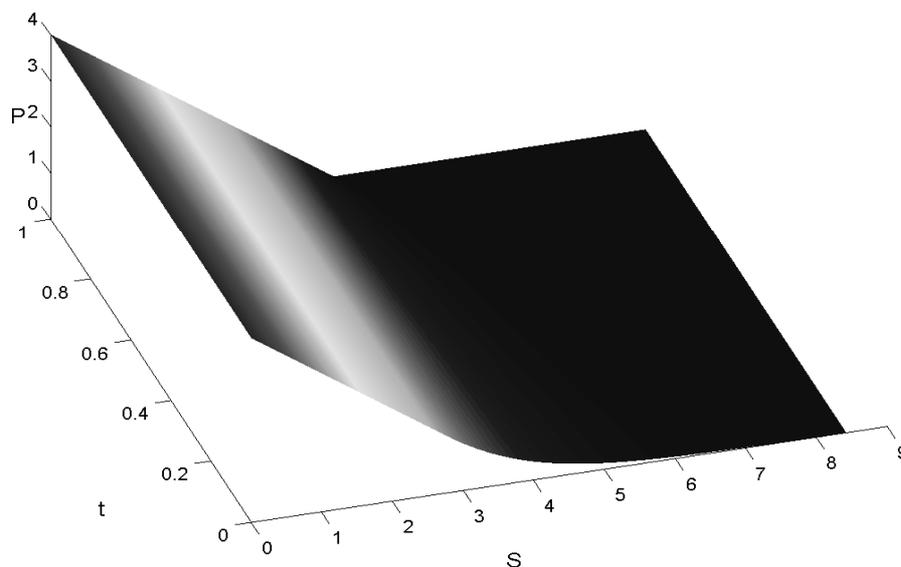


FIGURA 8. Opciones American Put

Comparado con otros lenguajes usados en la computación científica, como C++ ó Fortran, las cualidades que se destacan de *MATLAB*© fundamentalmente son tres:

- Sencillez de manejo.
- Polivalencia.
- Versatilidad.

Es evidente que para la manipulación estadística de datos, otras herramientas o paquetes informáticos son muy competitivos, por ejemplo el ya comentado *SPSS*© es más específico y extenso en este tema. Sin embargo, la polivalencia y versatilidad que muestra *MATLAB*© en la segunda parte de este artículo, quizá lo hagan más aconsejable en la formación de los alumnos que estudian Matemática Financiera en las escuelas y facultades de Economía. Este nuevo camino, que ahora debe comenzar, está repleto de obstáculos importantes, nada triviales, pero tampoco originales porque cada vez son más numerosos y sofisticados los Modelos Matemáticos que explican otras disciplinas científicas: Biología, Fisiología, Ecología... Quizá está comenzando un nuevo paradigma científico en el que las disciplinas hasta ahora más descriptivas están evolucionando a una mayor cuantificación de los resultados. La enorme información disponible en <http://www.mathworks.com/> sobre textos, programas, grupos de noticias, reuniones científicas... relacionados con *MATLAB*© es una buena muestra de lo comentado, aunque no la única porque cada vez son más numerosas las publicaciones interdisciplinarias que se pueden apreciar en catálogos de libros y revistas.

Otros programas de manipulación matemática, por ejemplo *Mathematica*©, también tienen paquetes para finanzas que se pueden consultar en <http://www.addlink.es/productos.asp?pid=3>. Sin embargo, la desventaja de *Mathematica*© es evidente porque es una

herramienta diseñada para la manipulación simbólica mientras que *MATLAB*® se creó pensando en la computación numérica.

En la página http://www.mathworks.es/applications/fin_modeling/segment/why_use_matlab.html, los profesionales financieros pueden encontrar las ventajas de utilizar *MATLAB*® y también se pueden consultar los modelos financieros que resuelve.

La Matemática Financiera tradicionalmente ha estado relacionada con la Estadística y los problemas estocásticos, siendo muchos los modelos que utilizan ecuaciones diferenciales estocásticas y que aquí no se han tratado. Para ese fin, la introducción dada en [14] es clara y concisa, por lo que resulta altamente recomendable.

Además del vigoroso campo de investigación que es la resolución numérica de ecuaciones diferenciales estocásticas, en años muy recientes también ha surgido la necesidad de utilizar técnicas numéricas y computacionales para aproximar las soluciones de otros modelos financieros, recuerde el caso de las opciones put americanas. Este nuevo campo de investigación, que se podría denominar **Computación Financiera**, trataría de aplicar las técnicas numéricas en los modelos financieros. Posiblemente [30] sea una de las mejores y más actualizadas referencias. En estas nuevas líneas de investigación se precisarían grupos interdisciplinarios de economistas, matemáticos, informáticos... capaces de comunicar y compartir sus variados conocimientos. Las distintas ramas del árbol de la Ciencia crecen a una velocidad vertiginosa y es necesario que compartan conocimientos para evitar un resultado deforme. Ya John von Neumann, quizá el matemático más influyente del siglo XX, en su conferencia en el Congreso de Amsterdam de 1954 advirtió de este peligro en las Matemáticas: *Hay un grave peligro de que se desarrolle a lo largo de la línea de menor resistencia, que el cauce, tan alejado de su fuente, se divida en multitud de ramas insignificantes, y que se transforme en un amasijo amorfo de detalles y complejidades.*

Agradecimientos. Los autores quieren agradecer a los anónimos revisores sus comentarios, consejos y sugerencias que han sido muy apreciados.

Este trabajo ha sido financiado por la Universidad del País Vasco con el proyecto 9/UPV 00127.310-15969/2004 y por el Ministerio de Educación y Ciencia con el proyecto SEJ2005-05549/ECON.

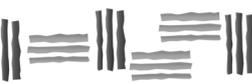
REFERENCIAS

1. L. Bachelier, *Theorie de la speculation*, Annales de l'École Normale Supérieure (1900), no. 17, 21–86.
2. F. Black and M. Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy (1973), no. 81, 637–59.
3. L. Boltzmann, *Über die mechanische Bedeutung des Zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie*, Wien. Ber. (1866), no. 53, 195–220.
4. ———, *Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten*, Wien. Ber. (1868), no. 58, 517–560.
5. ———, *Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen*, Wien. Ber. (1872), no. 66, 275–370.
6. R. Brown, *A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies*, Phil. Mag. (1828), no. 4, 161–173.
7. J.C. Cox, S.A. Ross, and M. Rubinstein, *Option pricing: a simplified approach*, Journal of Financial Economics (1979), no. 7, 229–263.
8. B. del Hoyo and F. Vadillo, *Sobre la enseñanza del Análisis Numérico*, Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada (2005), no. 33, 13–18.
9. A. Einstein, *Folgerungen aus den Capillaritätsercheinungen*, Ann. Phys. (Leipzig) (1901), no. 4, 513–523.
10. B.S. Everitt, *The Cambridge Dictionary of Statistics, 3th edn*, Cambridge University Press, 2006.

11. P. Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, 2004.
12. D.J. Higham, *An Introduction to Financial Option Valuation*, SIAM, 2000.
13. D.J. Higham and N.J. Higham, *MATLAB Guide*, SIAM, 2000.
14. D.J. Higham and P.E. Kloeden, *Maple and Matlab for E.D.E. in Finance*, disponible en: www.maths.strath.ac.uk.
15. H. Hotelling, *Analysis of a complex of statistical variables into principal components*, J. Educ. Psychol. (1933), no. 24, 417–441, 498–520.
16. ———, *Simplified calculation of principal components*, Psychometrika (1936), no. 1, 27–35.
17. John Hull, *Introducción a los mercados de futuros y opciones*, Prentice Hall, 1996.
18. ———, *Options, Futures and Others Derivatives, 4th edn*, Prentice Hall, 2000.
19. E. Mach, *Die Principien der Wärmelehre: Historisch-kritisch entwickelt*, Leipzig, Johann Ambrosius Barth, 1896.
20. ———, *Die Leitgedanken meiner naturwissenschaftlichen Erkenntnislehre und ihre Aufnahme durch die Zeitgenossen*, Physikalische Zeitschrift (1910), no. 11, 599–606.
21. J. C. Maxwell, *On the Dynamical Theory of Gases*, Philosophical Transactions (1866), no. CLVII, 49–88.
22. R.C. Merton, *Theory of rational option pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science (1973), no. 4, 141–183.
23. N. Metropolis, *The Beginning of the Monte Carlo Method*, Los Alamos Science (1987), no. 15, 125–130.
24. N. Metropolis and S. Ulam, *The Monte Carlo method*, J. of the American Statistical Association (1949), no. 44, 335–341.
25. C.B. Moler, *MATLAB- an interactive matrix laboratory*, University of New Mexico, Mathematics Department, Report 369 (1979).
26. ———, *Numerical Computing with MATLAB*, SIAM, 2004.
27. W. Ostwald, *Vorlesungen über Naturphilosophie*, Leipzig, Johann Ambrosius Barth, 1901.
28. K. Pearson, *On lines and planes of closest fit to system of points in space*, Philos. Mag. (1901), no. 2, 559–572.
29. S.R. Ross, *An Introduction to Mathematical Finance*, Cambridge University Press, 1999.
30. R. Seydel, *Tools for Computational Finance. Third Edition*, Springer, 2006.
31. S. Ulam, R.D. Richtmyer, and J. von Neumann, *Statistical methods in neutron diffusion*, Los Alamos Scientific Laboratory report LAMS-551 (1947).
32. N. Wiener, *The mean of a functional of arbitrary elements*, Ann. of Math. (1920), no. 22, 66–72.
33. ———, *The average of an analytical functional and the Brownian movement*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA (1921), no. 7, 294–298.
34. P. Wilmont, *Introduction Quantitative Finance*, John Wiley & Sons, 2001.
35. P. Wilmont, S. Howison, and J. Dewynne, *The Mathematic of Financial Derivatives. Un Student Introduction*, Cambridge University Press, 1995.



UNIVERSIDAD
**PABLO DE
OLAVIDE**
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA
LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (4). Páginas 56-74.
Diciembre de 2007. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/art14.pdf>

Asignación de primas en el seguro del automóvil utilizando el Análisis en Componentes Principales Funcionales

SEGOVIA GONZÁLEZ, M. MANUELA

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica.

Universidad Pablo de Olavide

Correo electrónico: mmseggon@upo.es

GUERRERO CASAS, FLOR M.

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica.

Universidad Pablo de Olavide

Correo electrónico: fguecas@upo.es

HERRANZ PEINADO, C. PATRICIA

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica.

Universidad Pablo de Olavide

Correo electrónico: pherpei@upo.es

RESUMEN

El estudio de las primas de riesgo en el seguro del automóvil es de suma importancia, debido a la gran competitividad existente en el mercado asegurador. En este artículo se pretende proponer un sistema de bonificación-penalización de las primas de riesgo utilizando el Análisis Funcional en Componentes Principales.

En concreto, se realiza un estudio empírico con los datos reales de una compañía aseguradora con cobertura nacional. Aplicando el sistema propuesto de bonificación-penalización a los perfiles de comportamiento de los asegurados, se obtienen las primas de riesgo para cada uno de los perfiles considerados y tramos de edad.

Palabras clave: primas; seguro del automóvil; análisis funcional en componentes principales; riesgo.

Clasificación JEL: C44; C73; D81; G22.

2000MSC: 62M99; 91B30; 91B70.

Premium allocation in the car insurance by using Functional Principal Component Analysis

ABSTRACT

The study of the premium risk in the car insurance is really important because the insurance market is very competitive. In this article we show a bonus-malus method of risk premiums. To do this, we use the Functional Principal Component Analysis.

More precisely, we explain an empirical study with the real data of an insurance company. By applying the bonus-malus method that we have given, we are able to obtain the premium risk for different profiles and age ranges.

Keywords: premium; car insurance; functional principal component analysis; risk.

JEL classification: C44; C73; D81; G22.

2000MSC: 62M99; 91B30; 91B70.



1. Introducción

El seguro del automóvil en España ha venido experimentando grandes cambios en los últimos años, tal y como ocurre en otros países industrializados. La gran competitividad que experimenta el mercado del seguro en general y el ramo de autos en particular, ha provocado entre otras medidas que las compañías aseguradoras cada vez estén más interesadas en establecer métodos eficientes para el control de la evolución de los accidentes y sus costes asociados (Ayuso y Guillén, 1999).

Cuando se realizan estudios sobre la siniestralidad en un determinado ramo del seguro, interesa conocer la realidad lo más ampliamente posible identificando aquellos individuos que son más propensos al riesgo. Cuanto mayor sea la información que proporcione un mejor conocimiento del riesgo, mejor se podrá estudiar el riesgo de cada individuo y, por tanto, mejor se podrá ajustar el precio del seguro. Para ello, es fundamental contar tanto con datos que faciliten detalles de la siniestralidad y de las pólizas suscritas, como modelos estadísticos adecuados con los que se pueda extraer la información que precisa cada Entidad a la hora de tarificar el riesgo. Autores como Boj *et al.* (2005) describen el escenario de bases de datos y estadísticas sectoriales en España, convirtiendo su trabajo en un referente para el estudio a posteriori de los siniestros.

En el negocio del seguro el equilibrio técnico es su prioridad; por un lado, las compañías pretenden ofrecer buenos precios que sean competitivos y adecuados al mercado, y al mismo tiempo deben hacer una política de selección de riesgos que les garantice la solvencia del ramo y que les permita conseguir el mayor beneficio posible. Las normas de contratación de cada compañía es una de las actividades de mayor trascendencia en cuanto a los resultados de su negocio. Existen estudios que describen los comportamientos de fraude teniendo en cuenta las características de los asegurados y de las pólizas (Artis *et al.*, 1999, Ayuso *et al.*, 1999, Artis *et al.*, 2002).

Las compañías aseguradoras que trabajan el ramo de automóvil cuentan con datos tanto externos como datos de su propia cartera de asegurados para su estudio. Uno de los problemas con los que se encuentran, es dar con el sistema de análisis estadístico más adecuado para el cálculo de la prima de riesgo que le proporcione fiabilidad de que las tarifas aplicadas se asemejarán al comportamiento real de la cartera. Tal como recomienda la Unión Española de Entidades Aseguradoras y Reaseguradoras (UNESPA), así como aparece en diversos estudios (Melgar y Guerrero, 2005), se conoce la existencia de una serie de características que a priori son más influyentes a la hora de tener una mayor o menor siniestralidad. Dichas características son: la gama del vehículo, la zona de circulación, el uso del vehículo y las circunstancias personales del conductor, como la edad, el sexo, los años de posesión del carné de conducir, etc. Algunas de ellas son tenidas en cuenta por las aseguradoras para fijar la cuantía de las primas de riesgo; además, para fidelizar a sus buenos conductores, aplican sistemas de bonificación según las normas internas establecidas.

Para la selección de factores de riesgo en la tarificación y el cálculo actuarial podemos encontrar trabajos que realizan análisis multivariante como Boj *et al.* (2004) y Guillén *et al.* (2005).

Nosotros, en este artículo, pretendemos mostrar a las compañías aseguradoras un nuevo sistema de asignación de primas de riesgo de automóviles; para ello nos basaremos en las características descritas como influyentes a la hora de su potencial siniestralidad. Se estudiarán, por perfiles, grupos de individuos que verifiquen una serie de características comunes y trataremos de forma muy específica la edad del conductor habitual. En concreto, definimos un nuevo método que nos servirá para penalizar o bonificar la prima de los individuos según el tramo de edad en el que se encuentren. Este sistema de bonificación-penalización permite discriminar entre los individuos asegurados con un mismo perfil según su tramo de edad y opera a favor de una mayor competitividad de la compañía aseguradora. Además puede resultar útil a las aseguradoras para la búsqueda de clientes óptimos.

En la sección 2, describimos los datos con los que vamos a realizar nuestro trabajo empírico, y establecemos los perfiles objeto de nuestro estudio, así como la base del análisis funcional en componentes principales (AFCP). Hemos elegido esta técnica porque se realiza el análisis de componentes principales teniendo en cuenta el tiempo, edad de los asegurados, que es la variable que consideramos más importante y novedosa para las compañías aseguradoras. Para aplicar este método hemos realizado inicialmente una aproximación funcional¹ utilizando técnicas de suavizado (Ramsay y Silverman, 1997). En el caso que nos ocupa, los datos no se comportan de manera estable, no detectándose ningún tipo de periodicidad en ellos, por tanto la aproximación por medio de series de Fourier no es adecuada. Necesitamos, pues, una gran flexibilidad para poder ajustar de forma apropiada los datos. Por ello, hemos utilizado funciones base del tipo B-spline (Green y Silverman, 1994). Dichos datos son del territorio español y han sido cedidos por una compañía de seguros de ámbito internacional.

En la sección 3, mostramos los resultados obtenidos al aplicar el AFCP que nos determina los tramos de edades que se utilizarán en el resto del trabajo.

En la sección 4, establecemos un sistema de bonificación-penalización para cada uno de los perfiles y tramos de edades detectados. Para ello, se define una primera ponderación en función de las componentes principales funcionales y la edad; seguido de una segunda ponderación según el máximo riesgo de ocurrencia de un siniestro y los tramos de edad establecidos. Con estas dos ponderaciones, calculamos los pesos definitivos que aplicaremos a las primas calculadas por la compañía por el sistema tradicional, obteniendo la prima de riesgo que proponemos más equilibrada.

Finalmente, en la sección 5 se exponen las principales conclusiones y se termina con la bibliografía utilizada en la realización del trabajo.

¹La aplicación detallada se puede ver en Segovia (2005).

2. Materiales y métodos

2.1. Datos

Hemos de destacar que es difícil obtener información acerca de los asegurados, dadas las restricciones a que obliga la Ley Orgánica de Protección de Datos. No obstante, disponemos de los datos de una compañía de seguros con una amplia implantación a nivel nacional.

En nuestro trabajo, nos restringiremos a los individuos asegurados que conduzcan un vehículo de tipo turismo y cuyo uso sea particular, debido a que si considerásemos otro tipo de vehículos como es el caso de camiones, motos, taxis, etc., se podrían distorsionar los resultados, al hacer un uso distinto del vehículo con un riesgo de siniestro diferente, y por tanto con cálculo de prima distinto. Además, se tendrán en cuenta sólo los siniestros en los que la culpa haya sido directamente del asegurado de la compañía estudiada, o bien, compartida con el asegurado de otra entidad. Si contabilizáramos los siniestros de una póliza en los que el asegurado no tiene la responsabilidad, sino que el culpable ha sido el otro individuo implicado, estaríamos falseando la información al no conocer las características del que comete la falta, ya que la póliza pertenece a otra compañía.

Nuestro trabajo lo hemos desarrollado considerando una serie de perfiles basados en las características del conductor. Para ello, se ha realizado una estratificación de la muestra según el siguiente detalle: sexo, zona geográfica y tipo de turismo. La variable sexo se justifica por los previsibles diferentes comportamientos entre los hombres y las mujeres a la hora de conducir. La zona geográfica, ya que la climatología, la densidad de población y las infraestructuras actúan como componentes importantes en los resultados obtenidos. Se considerarán tres zonas distintas: la zona centro-norte (Castilla-León, Castilla-La Mancha, Madrid, Aragón, La Rioja, Galicia, Asturias, Cantabria, País Vasco y Navarra), la zona mediterránea (Cataluña, Valencia, Murcia y Baleares) y la zona sur (Andalucía, Extremadura y Canarias). Se optó por realizar una agregación territorial debido a que en determinadas zonas no disponíamos de tamaño muestral suficiente para realizar el estudio. Y por último, el tipo de turismo, distinguiendo entre gama baja y media-alta. Un coche de gran tamaño y potencia puede provocar, a iguales circunstancias de accidentes, mayores daños que uno pequeño; de la misma manera, también serán mayores los gastos de reparación de los daños propios del vehículo. Como resultado de esta estratificación, trabajaremos con 12 grupos de individuos.

Una vez aplicadas las restricciones anteriores y depurados los datos nos encontramos con 175.191 asegurados y 30.483 siniestros que serán el objeto de nuestro estudio. En la Tabla 1 se muestran los distintos perfiles con los que vamos a trabajar. De los 175.191 asegurados, 30.987 son mujeres y 144.204 hombres, correspondiendo a un 17,69 % y 82,31 %, respectivamente. De todos ellos, 92.509 (52,8 %) corresponde a coches de gama media-alta y 82.682 (47,2 %) a coches de gama baja. Con respecto a la distribución por zonas geográficas que consideramos, en la zona sur tenemos 95.520 (54,5 %) asegurados; en la zona centro-norte, 49.151 (28,1 %) y en la zona mediterránea, 30.520 (17,4 %).

Perfiles	Sexo	Gama del turismo	Zona geográfica
1	Mujer	Media-Alta	Sur
2	Mujer	Media-Alta	Centro-Norte
3	Mujer	Media-Alta	Mediterránea
4	Mujer	Baja	Sur
5	Mujer	Baja	Centro-Norte
6	Mujer	Baja	Mediterránea
7	Hombre	Media-Alta	Sur
8	Hombre	Media-Alta	Centro-Norte
9	Hombre	Media-Alta	Medierránea
10	Hombre	Baja	Sur
11	Hombre	Baja	Centro-Norte
12	Hombre	Baja	Mediterránea

Tabla 1: Perfiles considerados en el estudio de la siniestralidad.

Estudiaremos el riesgo de ocurrencia de un siniestro en cada uno de los perfiles y en cada una de las edades. Dicho riesgo lo definiremos como el cociente entre el número de siniestros ocurridos en un perfil determinado a una edad determinada y el número total de asegurados que tienen dicho perfil y dicha edad. Las edades van de los 18 a los 88 años; no obstante, al disponer de muy pocos asegurados menores de 25 y mayores de 71 años, hemos decidido estudiar de forma agrupada cada uno de estos grupos de individuos (estas edades se han denotado con los valores 25^- y 71^+). Esto tiene como desventaja que el comportamiento de los asegurados menores de veinticinco y mayores de setenta y uno no podrán estudiarse minuciosamente, sino que únicamente tendremos el comportamiento global en estos tramos.

2.2. Análisis funcional en componentes principales

En los últimos años se han desarrollado técnicas que consideran los datos desde una perspectiva continua. Entre estas técnicas se encuentra el análisis funcional en componentes principales (AFCP), que aparece como una generalización natural del análisis multivariante en componentes principales cuando se trabaja, no con p variables aleatorias observadas en n individuos, sino con un conjunto infinito numerable de variables, como ocurre con las series temporales, o incluso cuando hay una cantidad infinita no numerable de variables, como en los procesos estocásticos en tiempo continuo. Una visión general de algunos de los posibles análisis con datos funcionales y, de forma más precisa, acerca del AFCP la podemos encontrar en Rice y Silverman (1991), Silverman (1996), Ramsay y Silverman (1997), entre otros. Cinco años más tarde, los mismos autores publicaron un libro presentando diversas aplicaciones de algunas de las técnicas que habían desarrollado (Ramsay y Silverman, 2002). Sobre los métodos de aproximación del AFCP y su aplicación a modelos predictivos, muchas de las aportaciones se encuentran recogidas en Valderrama *et al.* (2000). En esta

misma línea, podemos citar los trabajos de Aguilera *et al.* (1996a, 1996b, 1996c, 1997a, 1997b, 1999a, 1999b, 1999c) y Escabias *et al.* (2003).

En nuestro estudio utilizaremos los resultados obtenidos al aplicar el AFCP a unas funciones estimadas previamente (Segovia, 2005). Dichas funciones son la función riesgo de ocurrencia de un siniestro para cada uno de los perfiles, que depende de la edad del conductor y varía en el intervalo $[25^-, 71^+]$. De forma análoga al caso finito, el objetivo del AFCP es reducir la dimensionalidad del problema. Es decir, pretendemos obtener unas variables ficticias (llamadas componentes principales) que resuman de la forma más precisa posible esta información. Se sabe que la primera componente principal será la que acumule la mayor variabilidad del proceso original; seguidamente, estará la segunda componente principal, la tercera y así sucesivamente. Haciendo uso de la función de correlación entre el proceso y cada una de las componentes obtenidas (Valderrama *et al.*, 2000) se obtienen los tramos de edades con los que están correlacionadas cada una de las componentes principales (Segovia, 2005) y serán los que utilizaremos posteriormente.

3. Resultados del análisis funcional en componentes principales

Al realizar el AFCP (Segovia, 2005), se obtuvo que la primera componente principal nos explica el 70,19%; la segunda, el 12,86%; la tercera, el 8,94% y la cuarta, el 4,08%. Luego, con las tres y cuatro primeras componentes explicamos el 91,99% y el 96,07%, respectivamente, de la variabilidad total del proceso, porcentajes elevados en ambos casos. Haciendo uso de la función de correlación se puede observar que la primera componente está muy correlacionada positivamente con el tramo que va de los 31 a los 67 años, ambos inclusive, y con los mayores de 71 años. La información que obtenemos para los mayores de setenta y un año no es muy fiable, pues en nuestro estudio los tuvimos que agrupar. Por tanto, no tendremos en cuenta la significación estadística detectada para la primera componente en dicho tramo de edad. La segunda y tercera componente principal, están muy correlacionadas positivamente con los tramos de edad que van de los 68 a los 70 años y de los 27 a los 30 años, respectivamente. Esto quiere decir que la primera, segunda y tercera componente obtenidas nos explican el comportamiento de los individuos en los tramos de edad $[31, 67]$, $[68, 70]$ y $[27, 30]$, respectivamente. No existe una fuerte correlación de la cuarta componente con ningún tramo de edad. Por ello, a partir de ahora no vamos a tener en cuenta esta componente en los estudios posteriores. Además, si utilizáramos el criterio de contraste de caída o el criterio de porcentaje de la varianza para elegir el número óptimo de componentes, tomaríamos las tres primeras componentes. Con ellas tendremos explicado el 91,99% de la variabilidad del proceso, siendo dicho porcentaje aceptable en estudios similares (Hair *et al.*, 2000).

4. Obtención de primas a través del análisis funcional en componentes principales

De manera general, para asignar el importe total de la prima, las compañías aseguradoras consideran una serie de componentes: la prima pura, el recargo de seguridad, los recargos para gastos, los recargos para beneficio o excedente y otros recargos.

Las primas de riesgo puras² recibidas, en conjunto, por el asegurador de los tomadores de un determinado seguro le sirven para atender los posibles siniestros o las prestaciones convenidas. La prima pura resulta de aplicar las estadísticas de acaecimiento del riesgo y la intensidad media del mismo.

El recargo de seguridad se destina a cubrir las desviaciones aleatorias desfavorables de la siniestralidad esperada, debiéndose constituir la correspondiente provisión para desviación de la siniestralidad cuando su importe no es consumido en el pago de los siniestros ocurridos.

Los recargos para gastos, que a partir de la entrada en vigor del nuevo Plan Contable para las entidades aseguradoras aprobado por el Real Decreto 2014/1997 de 26 de diciembre, se reclasifican en gastos por destino y se distinguen los gastos de gestión externa e interna. En los gastos de gestión externa denominados gastos de adquisición se incluirán los gastos de mantenimiento del negocio, justificados en función de la organización administrativa y comercial, actual y prevista (comisiones de la red comercial, gastos de cobro y mantenimiento de la cartera, etc.). En cuanto a los gastos de gestión interna son necesarios para administrar el funcionamiento de una entidad aseguradora. Se componen por: los gastos de administración (nóminas, alquileres, suministros, etc.) y otros gastos técnicos que no están vinculados directamente con el negocio, pero son necesarios para el mantenimiento de la empresa (vigilancia, salario del director general, etc.).

Los recargos para beneficio o excedente se destinan a remunerar los recursos financieros e incrementar la solvencia dinámica de la empresa.

Otros recargos atribuibles son impuestos, el recargo al Consorcio de Compensación de Seguros o el recargo a favor de la Comisión Liquidadora de Entidades Aseguradoras.

El resultado de la suma de los anteriores conceptos es la prima total, que es la que realmente satisface el tomador al hacer efectivo el recibo que le es pasado para su cobro por el asegurador. En definitiva, podemos observar que el coste de la prima total depende de la prima de riesgo que se establezca y de otros gastos atribuibles de forma más específica a la política llevada a cabo por la entidad aseguradora en cuestión.

²De acuerdo al Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados en su artículo 77.1.f (BOE, 1998) los gastos de gestión de los siniestros que hasta ahora formaban parte de los gastos de administración pasan a integrarse en la prima de riesgo. Por tanto, la prima de riesgo vendrá determinada por: la prima de riesgo pura correspondiente a los riesgos a cubrir y los gastos de gestión de siniestros. Por consiguiente, en todo nuestro estudio, cuando hablamos de prima de riesgo nos estaremos refiriendo a la prima de riesgo pura.

En este artículo nos centraremos en las primas de riesgo. Con una óptima política de gastos por parte de la compañía, su ventaja competitiva la debe obtener del ajuste de dicha prima; de ahí la importancia que al cálculo de ésta le otorgan las entidades. Plantearemos una nueva forma de calcular las primas de riesgo puras, realizando un tratamiento distinto en lo que a la variable edad del individuo corresponde. A continuación, mostraremos las penalizaciones o bonificaciones según los siguientes tres aspectos: los distintos rangos de edades, las puntuaciones de cada perfil en cada componente principal y la correlación detectada. Teniendo en cuenta todas estas circunstancias, definiremos una función de pesos que toma valores en cada edad, t , para cada uno de los perfiles considerados y que denotaremos como $u_i(t)$. Además, consideraremos el comportamiento de cada uno de los individuos en los tramos detectados, para lo cual definimos una segunda función de ponderación que denotaremos como $v_i(t)$. De esta forma, la ponderación que proponemos en nuestro estudio será el resultado de aplicar las dos funciones que se obtienen con anterioridad. Una vez que hayamos calculado los pesos correspondientes, estaremos en disposición de presentar a las compañías aseguradoras una nueva asignación de primas de riesgo puras.

4.1. Asignación de pesos según los distintos tramos de edad

Proponemos un método de bonificación-penalización que será el resultado de aplicar dos ponderaciones distintas. Con la primera de ellas, conseguimos medir el comportamiento de cada perfil con respecto al resto; es decir, tenemos una valoración vertical de las curvas en cada uno de los intervalos obtenidos con la técnica del AFCP. Por su parte, con la segunda ponderación, controlamos la tendencia del riesgo de ocurrencia de un siniestro para cada uno de los perfiles, obteniéndose así una valoración horizontal para cada individuo. El producto de ambas nos dará la ponderación final considerada.

4.1.1. Primera ponderación

Dado un instante de edad cualquiera, t , consideramos el conjunto A_t formado por todos los subíndices $j \in J$ (siendo J el conjunto formado por los subíndices de las componentes principales obtenidas) tales que la correlación existente entre el proceso riesgo de ocurrencia de un siniestro a la edad t , $X(t)$, y la componente principal ξ_j detectada al aplicar el AFCP, verifiquen ser mayor que 0,7 en valor absoluto; es decir, $A_t = \{j \in J \mid r(X(t), \xi_j) > 0,7\}$.

Sea j_0 la solución al problema de optimización:

$$\text{Max}_{j \in A_t} |r(X(t), \xi_j)|; \quad (1)$$

es decir, de entre todas las componentes que verifiquen estar fuertemente correlacionadas con el proceso en un determinado instante de tiempo, nos quedamos con aquella en la que la correlación detectada esté más próxima a uno en valor absoluto. En caso de

existir dos componentes principales cuyo subíndice sea solución de (1), nos quedamos con la componente principal que más información nos aporte, esto es, nos quedaremos con la de menor subíndice. De este modo, la función ponderación para el perfil i -ésimo en el instante de edad t vendrá dada como:

$$u_i(t) = \begin{cases} 1 + \frac{\xi_{j_0 i}}{K}, & \text{si } r(X(t), \xi_{j_0}) > 0,7; \\ \frac{\sum_{k=1}^K |\xi_{j_0 k}|}{\xi_{j_0 i}}, & \\ 1 - \frac{\xi_{j_0 i}}{K}, & \text{si } r(X(t), \xi_{j_0}) < -0,7; \\ \frac{\sum_{k=1}^K |\xi_{j_0 k}|}{\xi_{j_0 i}}, & \\ 1, & \text{si } A_t = \emptyset; \end{cases}$$

siendo j_0 la solución al problema anterior (1) y $\xi_{j_0 i}$ la puntuación del perfil P_i en la componente principal ξ_{j_0} .

En nuestro estudio, se verifica que A_t está compuesto por un único valor del conjunto J en cualquier instante de tiempo. Por tanto, al resolver el problema de optimización, j_0 tomará ese único valor que forma al conjunto A_t . Los posibles conjuntos A_t se muestran a continuación:

$$A_t = \begin{cases} \{1\}, & \forall t \in [31, 67]; \\ \{2\}, & \forall t \in [68, 70]; \\ \{3\}, & \forall t \in [27, 30]; \\ \emptyset, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Una vez que hemos detectado cuales son los posibles j_0 , estamos en condiciones de calcular la función de peso u_i para el perfil i -ésimo en el instante de edad t , donde $\xi_{j_0 k}$ es la puntuación que toma el perfil k -ésimo en la componente j_0 -ésima, con $K = 12$.

No obstante, la función anterior está definida de forma general y la podremos utilizar en cualquier otra situación que se nos presente. Obsérvese que dicha función está definida a trozos y que se obtiene dependiendo de una serie de consideraciones:

- Que exista o no una correlación estadísticamente significativa de alguna de las componentes con algunos de los instantes de edades.
- En el caso de existir algunos instantes de edad en los que la correlación sea significativa, que ésta sea directa o inversa.
- En el caso de que exista algún instante de edad en el que el proceso esté correlacionado de forma significativa con varias componentes, tomar aquella componente principal en la que la correlación en valor absoluto esté más cercana a la unidad o en el caso de coincidir aquella que mayor información aporte.

En definitiva, para asignar pesos a los distintos perfiles en las diferentes edades, lo que proponemos es considerar las puntuaciones obtenidas en las componentes principales,

así como los tramos de edad correlacionados de forma significativa con alguna de ellas. Si algún tramo de edad no aparece correlacionado de forma significativa con alguna de las componentes calculadas, se le asignará como peso la unidad.

En la Tabla 2 presentamos los perfiles estudiados y cada uno de los pesos asignados en los diferentes rangos de edades considerados. En el tramo de edad que va de los 27 a los 30 los perfiles que mejor se comportan son el tercero y el segundo, para los que planteamos una bonificación del 20,07% y 17,41%, respectivamente. En cuanto a los perfiles que se comportan peor, destacamos el cuarto y el séptimo, a los que se les aplicará un recargo del 13,89% y 13,41%, respectivamente. En el tramo de los 31 a los 67 años las dos bonificaciones y penalizaciones mayores que proponemos se corresponden: en el primer caso a los perfiles 12 y 11 con un 14,68% y 13,01% de descuento; mientras que el segundo caso afecta al primer y segundo perfil, a los cuales le asignaremos un incremento del 23,06% y 11,27%, respectivamente. Por último, de los 68 a los 70 años, los perfiles que mejor se comportan en el tramo de edad que estudiamos son el primer y tercer perfil, para los que planteamos una bonificación del 14,05% y 13,95%, respectivamente. En cuanto a los perfiles que se comportan peor, destacamos el segundo y el séptimo perfil, a los que se les aplicará un recargo del 19,30% y 12,25%, respectivamente. Se puede observar que existen perfiles a los que tendremos que penalizar en cualesquiera de los rangos de edades detectados. Éste sería el caso de los perfiles siete y ocho, es decir, los hombres con coche de gama media-alta de la zona sur o de la zona centro-norte. Por el contrario, aparecen otros perfiles a los que siempre se les tendrá que bonificar. Estaríamos hablando, en este caso, de las mujeres con coche de gama baja que residen en la zona centro-norte (perfil cinco).

Perfiles	Ponderaciones	Ponderaciones	Ponderaciones
	[27, 30]	[31, 67]	[68, 70]
1	1,0375	1,2306	0,8595
2	0,8259	1,1127	1,1930
3	0,7993	1,0017	0,8605
4	1,1389	1,0668	0,9869
5	0,9818	0,9979	0,8760
6	0,9658	0,8826	1,0819
7	1,1341	1,0850	1,1225
8	1,0305	1,0031	1,0834
9	0,9272	0,9522	1,019
10	1,0569	0,9441	0,9988
11	1,0565	0,8699	0,9506
12	1,0456	0,8532	0,9677

Tabla 2: Pesos asignados utilizando las tres primeras componentes principales.

Lo que hemos conseguido hasta ahora es determinar una serie de tramos de edad en los que habría que asignar primas distintas a los distintos perfiles y, por tanto, comparar el comportamiento de cada uno de dichos perfiles con el resto en el tramo de edad que estemos considerando. Con ello, hemos dado un primer sistema de bonificación o penalización dentro de cada uno de los intervalos obtenidos.

No obstante, no queremos decir que todas las curvas en cada uno de los tramos detectados tengan la misma forma, de hecho cada perfil tiene un comportamiento diferente dentro del tramo detectado. En cualquier caso, hemos podido dar una medida del comportamiento de unos perfiles con respecto al de los otros en un tramo de edad concreto. Por ello, proponemos seguidamente un segundo sistema de ponderación.

4.1.2. Segunda ponderación

La ponderación que planteamos a continuación considera una partición en los tramos detectados en el AFCP, de tal forma que se tenga en cuenta el patrón que sigue cada una de las curvas y podamos reflejar la tendencia de cada una de ellas, con lo que tendríamos en cuenta la memoria histórica del individuo. Lo haremos únicamente para el intervalo de edad [31, 67], debido a que los otros dos intervalos tienen muy poca amplitud.

En primer lugar, tomamos una partición de dicho intervalo de cinco en cinco años, salvo el último que será de siete años. De esta forma consideraremos los tramos [31, 35], [36, 40], [41, 45], [46, 50], [51, 55], [56, 60] y [61, 67].

En segundo lugar, calculamos el máximo del riesgo de ocurrencia de un siniestro en cada uno de los rangos de edades especificados anteriormente, así como, la media de todos los máximos.

En tercer lugar, tomamos como ponderación para el intervalo $[t_i, t_j]$ el cociente entre el máximo detectado en dicho intervalo y la media de todos los máximos. De esta forma, conseguimos que los porcentajes de bonificación o penalización detectados en el intervalo [31, 67] para cada uno de los perfiles se mantengan y a la vez controlamos para cada uno de ellos la tendencia en cuanto al riesgo de ocurrencia de un siniestro en las distintas edades. Se denotará por $v_i(t)$ al valor de dicha ponderación en el instante t .

A modo de ejemplo, si consideramos dentro del perfil 1, el tramo de edad [31, 35], el máximo del riesgo de ocurrencia de un siniestro se alcanza en la edad 31,945, con valor 0,217986; por otro lado, la media de los máximos toma el valor 0,26989214. En consecuencia, el valor de $v_1(t)$ con $t \in [31, 35]$ será el cociente $\frac{0,217986}{0,26989214}$, cuyo valor es 0,80767821. Luego, en este caso, al perfil uno en el tramo de edad [31, 35] le aplicamos una bonificación del 19,23%. En la Tabla 3 exponemos los pesos obtenidos.

4.1.3. Sistema de ponderación propuesto

El sistema que proponemos para el cálculo de los pesos definitivos que asignaremos a cada perfil en cada instante de edad es el resultado de tener en cuenta las dos propuestas

Edades	Perfil 1	Perfil 2	Perfil 3	Perfil 4	Perfil 5	Perfil 6
[31, 35]	0,8077	0,7624	0,7512	1,0275	0,9174	0,9267
[36, 40]	0,9213	0,9484	1,0499	0,8619	0,7572	0,9764
[41, 45]	1,0719	0,9889	1,1433	0,9819	1,0977	0,9124
[46, 50]	1,0732	1,1087	1,0931	1,0242	1,1849	1,1041
[51, 55]	0,9462	1,1599	0,9543	1,0431	1,0859	1,1716
[56, 60]	1,0955	0,9669	0,9482	1,0576	0,9883	1,0888
[61, 67]	1,0841	1,0647	1,0599	1,0037	0,9686	0,8201

Edades	Perfil 7	Perfil 8	Perfil 9	Perfil 10	Perfil 11	Perfil 12
[31, 35]	0,9599	0,9165	0,9893	1,0555	1,1353	1,1787
[36, 40]	0,9546	1,0027	1,1241	0,9577	1,0037	0,9761
[41, 45]	0,9251	1,0053	1,1547	0,9856	0,9724	1,0163
[46, 50]	1,0263	1,0057	0,9353	1,0542	1,0277	0,9851
[51, 55]	1,0905	1,1162	0,9995	1,0471	1,0142	1,0133
[56, 60]	1,0771	1,0645	0,9367	0,9858	0,9354	1,0058
[61, 67]	0,9665	0,8890	0,8604	0,9141	0,9114	0,8248

Tabla 3: Valores de la función v_i dados por intervalos.

anteriores (Tabla 4). De tal forma que, para el perfil i -ésimo el sistema de ponderación propuesto será $w_i(t)$, donde $w_i(t) = u_i(t) \cdot v_i(t)$ es el valor de la función ponderación para el perfil i -ésimo en el instante de edad t , siendo $u_i(t)$ y $v_i(t)$ las funciones de pesos propuestas anteriormente.

En la Tabla 4 podemos observar que entre los asegurados de 27 a 30 años, los individuos penalizados son las mujeres y los hombres de la zona sur, los hombres de la zona centro-norte y los de la zona mediterránea con coche de gama baja. En este tramo de edad solo existen penalizaciones en las mujeres del sur, mientras que las mujeres del resto de zonas tienen bonificaciones; sin embargo los hombres tienen todas penalizaciones, excepto los de la zona mediterránea con vehículos de gama media-alta, siendo las mayores penalizaciones para los hombres del sur.

En cuanto al tramo de edad que va de los 31 a los 35 años, se penalizará a las mujeres del sur con coche de gama baja. Con respecto a los hombres, en ese mismo rango de edad habrá que penalizar a los que tienen un coche de gama media-alta de la zona sur y a los del mediterráneo con coche de gama baja.

En el tramo de edad que va de los 36 a los 40 años, tenemos que, tanto en las mujeres como en los hombres, se penalizarán a aquellos individuos que tengan un coche de gama media-alta, independientemente de la zona de residencia.

Dentro del tramo de edad que comprende de los 41 a los 45 años, se penaliza a todas las mujeres, salvo a las de la zona mediterránea con coche de gama baja. En cuanto a los

Edades	Perfil 1	Perfil 2	Perfil 3	Perfil 4	Perfil 5	Perfil 6
27 ⁻	1	1	1	1	1	1
[27, 30]	1,0375	0,8259	0,7993	1,1389	0,9818	0,9658
[31, 35]	0,9939	0,8484	0,7525	1,0961	0,9155	0,8179
[36, 40]	1,1338	1,0553	1,0518	0,9196	0,7557	0,8618
[41, 45]	1,3192	1,1005	1,1453	1,0476	1,0955	0,8053
[46, 50]	1,3207	1,2337	1,0949	1,0927	1,1825	0,9745
[51, 55]	1,1644	1,2907	0,9560	1,1128	1,0837	1,0340
[56, 60]	1,3481	1,0759	0,9499	1,1283	0,9863	0,9609
[61, 67]	1,3340	1,1847	1,0618	1,0708	0,9667	0,7239
[68, 70]	0,8595	1,1930	0,8605	0,9869	0,8760	1,0819
71 ⁺	1	1	1	1	1	1

Edades	Perfil 7	Perfil 8	Perfil 9	Perfil 10	Perfil 11	Perfil 12
27 ⁻	1	1	1	1	1	1
[27, 30]	1,1341	1,0305	0,9272	1,0569	1,0565	1,0456
[31, 35]	1,0416	0,9194	0,9421	0,9965	0,9876	1,0056
[36, 40]	1,0357	1,0057	1,0704	0,9041	0,8731	0,8327
[41, 45]	1,0038	1,0084	1,0995	0,9305	0,8459	0,8671
[46, 50]	1,1136	1,0088	0,8906	0,9953	0,8940	0,8404
[51, 55]	1,1833	1,1197	0,9517	0,9886	0,8823	0,8645
[56, 60]	1,1686	1,0678	0,8919	0,9306	0,8137	0,8581
[61, 67]	1,0487	0,8917	0,8193	0,8629	0,7929	0,7037
[68, 70]	1,1225	1,0834	1,0192	0,9988	0,9506	0,9677
71 ⁺	1	1	1	1	1	1

Tabla 4: Ponderaciones globales por rangos de edades.

hombres se penaliza a los que tienen un coche de gama media-alta.

Pasamos ahora a estudiar el tramo de edad que va de los 46 a los 50 años. En él se penaliza a todas las mujeres, excepto a las de la zona mediterránea con coche de gama baja. Con respecto a los hombres, penalizamos a los que tienen un coche de gama media-alta, excepto a los de la zona mediterránea.

Entre los 51 y los 55 años, son penalizadas todas las mujeres salvo las del mediterráneo con coche de gama media-alta. En cuanto a los hombres penalizamos a los que tienen un coche de gama media-alta de la zona sur y centro-norte.

En el tramo de edad que va de los 56 a los 60 años, se penaliza a las mujeres y hombres con coche de gama media-alta excepto de la zona mediterránea y a las mujeres del sur con coche de gama baja.

Dentro del tramo de edad que va de los 61 a los 67 años, los únicos penalizados son las mujeres con coche de gama media-alta y las del sur con coche de gama baja. En este

tramo de edad se bonificará a todos los hombres salvo a los del sur con coche de gama media-alta.

Consideramos ahora el último tramo de edad que va de los 68 a los 70 años. Se penaliza a las mujeres de la zona centro-norte con coche de gama media-alta, a las de la zona mediterránea con coche de gama baja y a los hombres con coche de gama media-alta.

De manera general, podemos destacar que todos los hombres mayores de 35 años con vehículos de gama baja tendrán bonificaciones. No observamos un comportamiento similar, en el caso de las mujeres, salvo para el tramo de edad entre 31 y 35 años en el que han de aplicarse bonificaciones en todos los casos salvo en las residentes en el sur con vehículo de gama baja. También podemos observar que los conductores, hombres y mujeres, con vehículo de gama media-alta van a tener mayores penalizaciones, siendo esto más acusado en la zona sur.

No obstante, debemos puntualizar que, al asignar estos pesos, no hemos considerado los costes de ellos. A la compañía le interesará conocer no solamente cuándo existe una mayor probabilidad de que ocurra un siniestro; sino, además, la cuantía de dicho siniestro. Una vez que tenemos los pesos para cada uno de los individuos en los distintos tramos de edad, podremos asignar de forma más detallada las primas de riesgo para cada una de las observaciones, según se encuentren en un tramo de edad o en otro.

4.2. Determinación de tarifas en función del riesgo del conductor

Clasificaremos, en la presente sección, cada uno de los conductores situándolos en un grupo determinado, de forma que le podamos asignar la tarifa correspondiente.

4.2.1. Primas de riesgo propuestas por este estudio en los distintos tramos de edades

Las compañías aseguradoras calculan las primas de riesgo, correspondientes a cada uno de los perfiles que consideran, como el producto del riesgo de ocurrencia de un siniestro para un determinado perfil y el coste medio de los siniestros provocados por los individuos que se encuentran en dicho perfil. Una vez conocidas dichas primas, podremos calcular la recaudación total de la compañía y por perfiles sin más que aplicar las correspondientes tarifas a cada uno de los asegurados.

La recaudación total de la prima de riesgo propuesta por la entidad se puede calcular como:

$$n_1P_{r_1} + n_2P_{r_2} + \dots + n_{12}P_{r_{12}},$$

siendo n_i el número de asegurados pertenecientes al perfil i -ésimo y P_{r_i} es la prima de riesgo asignada a dicho perfil.

En esta sección presentaremos un sistema de recargo o bonificación de las tarifas para cada perfil y cada tramo de edad. Para ello, utilizaremos las primas que propone la compañía estudiada en cada uno de los perfiles, ponderadas éstas por los pesos obtenidos

anteriormente. Por tanto, la prima de riesgo propuesta para el perfil i -ésimo en la edad t , que denotaremos por $P_{r_i}(t)$, vendrá dada por:

$$P_{r_i}(t) = P_{r_i} w_i(t),$$

donde P_{r_i} es la prima de riesgo asignada por la compañía para el perfil i -ésimo y $w_i(t) = u_i(t) \cdot v_i(t)$ es el valor de la función ponderación para el perfil i -ésimo en el instante de edad t , siendo $u_i(t)$ y $v_i(t)$ las funciones de pesos propuestas por la primera y segunda ponderación, expuestas ambas anteriormente (Tabla 4).

Queremos dar a las compañías unas indicaciones acerca de la prima de riesgo más adecuada para los clientes que se incorporan a su cartera, de manera que a un posible cliente, dependiendo de la edad que tenga y del perfil en el que se encuentre, se le asigne un valor determinado de prima de riesgo, procurando de esta forma conseguir una mejor selección del riesgo en la compañía. Estamos dando, por tanto, unas pautas para la asignación de las primas base de los nuevos clientes que se van a incorporar a su cartera.

Partiendo del supuesto de que la compañía pretende quedarse en la misma situación en la que está, proponemos las primas de riesgo más adecuadas para estabilizar los ingresos. Por tanto, impondremos que la recaudación total obtenida por la entidad utilizando el sistema original de asignación de primas y el que nosotros proponemos se mantenga con el nuevo método propuesto. Esto podemos conseguirlo de dos formas distintas: simplemente mantener la recaudación final o conseguir que la entidad perciba la misma cantidad en cada uno de los perfiles (con lo que la recaudación global seguiría siendo la misma).

4.2.2. Primas de riesgo asignadas manteniendo la recaudación global

Utilizaremos el método propuesto anteriormente, pero añadiremos una nueva restricción que será que la compañía siga recaudando la misma cantidad.

Al perfil i -ésimo en el instante t de edad le asignamos una tarifa que se calcula como:

$$TRG_i(t) = \frac{P_{r_i}(t)}{\int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^K n_k(t) P_{r_k}(t) dt} \cdot \sum_{k=1}^K n_k P_{r_k},$$

donde $P_{r_k}(t)$ y $n_k(t)$ son, respectivamente, la prima de riesgo propuesta por nosotros y el número de asegurados del perfil k -ésimo en el instante de edad $t \in [t_0, t_1]$ y n_k y P_{r_k} son, respectivamente, el número de asegurados y la prima de riesgo asignada por la entidad para el perfil k -ésimo.

4.2.3. Primas de riesgo asignadas manteniendo la recaudación por perfiles

En este apartado pretendemos al igual que en el anterior mantener el beneficio global de la aseguradora. Pero vamos a imponer una restricción más, consiste en pedir que la recaudación se mantenga también por perfiles. En tal caso, la prima propuesta para el

perfil i -ésimo en el instante de edad t viene dado por:

$$TRP_i(t) = \frac{P_{r_i}(t)}{\int_{t_0}^{t_1} n_i(t)P_{r_i}(t)dt} \cdot n_i P_{r_i},$$

donde $n_i(t)$ y $P_{r_i}(t)$ son, respectivamente, el número de asegurados y la prima de riesgo del perfil i -ésimo propuesta por nosotros en el instante de edad $t \in [t_0, t_1]$ y n_i y P_{r_i} son, respectivamente, el número de asegurados y la prima de riesgo asignada por la entidad para el perfil i -ésimo.

5. Conclusiones

Nuestro estudio nos permite proponer a las compañías aseguradoras una nueva manera de establecer las primas de riesgo para la nueva adquisición de clientes. La tarificación la hemos desglosado mucho más, de tal modo que no a todos los individuos de un mismo perfil se les aplicará la misma prima. Ahora, además del perfil en el que nos encontremos, la prima dependerá también del instante de edad en el que se encuentre el asegurado. Con esto se consigue que a los individuos que proponemos asignarles una prima de riesgo menor, le podremos ofertar un producto más competitivo. Esto se podría plasmar en una futura entrada de clientes de este tipo en la cartera, mientras que podrían salir de ella aquellos clientes a los que les hemos incrementado su prima. Se podría plantear, como una futura línea de investigación, el estudio de la cartera óptima para la compañía, según las características de los clientes.

Aplicando el sistema de bonificación-penalización que se detalló en la sección 4 a los datos reales de una compañía de seguros, podemos decir que de forma global la gama del coche es una de las características que más influyen a la hora de penalizar o bonificar a los asegurados. Independientemente del sexo y la edad, podemos observar que los individuos con vehículos de gama media-alta son penalizados un mayor número de veces que los de gama baja. No obstante, a las mujeres de la zona sur con coche de gama baja se les penaliza con una frecuencia similar a aquellas que poseen coche de gama media-alta, llegando a estar incluso por encima de las mujeres de la zona mediterránea. Es de destacar que los individuos de la zona mediterránea, a pesar de tener asegurado un coche de gama media-alta, suelen tener bonificaciones en sus primas en casi todos los rangos de edad.

Si tenemos en cuenta el sexo, la edad del asegurado y el tipo de coche podemos destacar que los hombres de más de 35 años de edad y conducen un coche de gama baja tendrán bonificación.

Teniendo en cuenta el sexo y la edad del asegurado se tiene que las penalizaciones en las mujeres se centran en el rango de edad intermedio, de los 41 a los 55 años, mientras que en los hombres el rango de edad más penalizado es el que va de los 27 a los 30 años. Por el contrario, las mujeres con mayores bonificaciones son aquellas cuyas edades están

comprendida entre los 27 y 35 años y entre los 68 y 70 años, y en los hombres en el tramo de edad de los 46 a los 67 años.

En el futuro, pretendemos insistir en la obtención del archivo histórico SINCO, que contiene la información de la mayoría de las entidades aseguradoras, a la que le aplicaremos el AFCP, de esta forma nos podríamos acercar mucho mejor a lo que realmente está ocurriendo en el sector del automóvil.

Bibliografía

AGUILERA, A.M.; GUTIÉRREZ, R.; VALDERRAMA, M.J. (1996a): Approximations of estimators in the PCA of a stochastic process using B-splines. *Communational Statistics (simulation)* **25** (3), pp. 671 – 690.

AGUILERA, A.M.; OCAÑA, F.A.; VALDERRAMA, M.J. (1996b): Análisis en componentes principales de un proceso estocástico con funciones muestrales escalonadas. *Qüestió* **20** (1), pp. 7 – 28.

AGUILERA, A.M.; OCAÑA, F.A.; VALDERRAMA, M.J. (1996c): On a weighted principal component model to forecast a continuous time series. *Proceed. Computational Statistics: COMPSTAT'96*. (Prat A.,ed.), Physica-Verlag, pp. 169 – 174.

AGUILERA, A.M.; OCAÑA, F.A.; VALDERRAMA, M.J. (1997a): An approximated principal component prediction model for continuous-time stochastic processes. *Applied Stochastic Models and Data Analysis* **13** (1), pp. 61 – 72.

AGUILERA, A.M.; OCAÑA, F.A.; VALDERRAMA, M.J. (1997b): Regresión sobre componentes principales de un proceso estocástico con funciones muestrales escalonadas. *Estadística Española* **39** (142), pp. 5 – 21.

AGUILERA, A.M.; OCAÑA, F.A.; VALDERRAMA, M.J. (1999a): Forecasting time series by functional PCA. Discusión of several weighted approaches. *Computational Statistics* **1** (3), pp. 443 – 467.

AGUILERA, A.M.; OCAÑA, F.A.; VALDERRAMA, M.J. (1999b): Forecasting with unequally spaced data by a functional principal component approach. *Test* **8** (1), pp. 233 – 254.

AGUILERA, A.M.; OCAÑA, F.A.; VALDERRAMA, M.J. (1999c): Stochastic modelling for evolution of stock-prices by means of functional principal component analysis. *Applied Stochastic Models in Bussines and Industry* **15** (4), pp. 227 – 234.

ARTIS, M.; AYUSO, M.; GUILLÉN, M. (1999): Modeling different types of automobile insurance fraud behaviour in Spanish market. *Mathematics and Economics* **824**, 1 – 2, pp. 67 – 81.

ARTIS, M.; AYUSO, M.; GUILLÉN, M. (2002): Detection of automobile insurance fraud with discrete choice models and misclassified claims. *Journal of Risk and Insurance* **69**, 3, pp. 325 – 340.

AYUSO, M.; GUILLÉN, M. (1999): Modelos de detección de fraude en el seguro del automóvil. *Cuadernos actuariales* **8**, pp. 135 – 149.

- AYUSO, M.; GUILLÉN, M.; ARTIS, M. (1999): Técnicas cuantitativas para la detección del fraude en el seguro del automóvil. *Anales del instituto de actuarios españoles* **5**, pp. 51 – 83.
- BOJ, E.; CLARAMUNT, M.M.; FORTIANA, J. (2004): Análisis multivariante aplicado a la selección de factores de riesgo en la tarificación. *Cuadernos de la Fundación Mapfre estudios*. Instituto de Ciencias del Seguro. Madrid.
- BOJ, E.; CLARAMUNT, M.; FORTIANA, J.; VEGAS, A. (2005): Bases de datos y estadísticas del seguro de automóviles en España: influencia en el cálculo de primas. *Estadística Española* **47**, 160, pp. 539 – 566.
- BOE (1998): Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados, aprobado por el Real Decreto 2486/1998, de 20 de noviembre. Publicado en el BOE 282/1998 de 25 de noviembre de 1998.
- ESCABIAS, M., AGUILERA, A.M.; VALDERRAMA, M.J. (2003): Una solución al problema de multicolinealidad en regresión logística funcional. *XXVII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. Lleida 8 – 11 Abril de 2003*.
- GREEN, P.J.; SILVERMAN B.W. (1994): *Nonparametric regression and generalized linear models. A roughness penalty approach*. Chapman and Hall/CRC.
- GUILLÉN, M.; AYUSO, M.; BERMÚDEZ, L.; MORILLO, I. (2005): El Seguro de automóviles: estado actual y perspectiva de la técnica actuarial. *Fundación Mapfre estudios*. Instituto de Ciencias del Seguro. Madrid.
- HAIR, J.F.; ANDERSON, R.E.; TATHAM, R.L. ; BLACK, W. C. (2000): *Análisis multivariante*. Prentice Hall.
- MELGAR, M.C.; GUERRERO, F.M. (2005): Los siniestros en el seguro del automóvil: un análisis econométrico aplicado. *Estudios de Economía Aplicada (Asepelt)* pp. 355-375.
- RAMSAY, J.O.; SILVERMAN, B.W. (1997): *Functional data analysis*. Springer Series in Statistics.
- RAMSAY, J.O.; SILVERMAN, B.W. (2002): *Applied functional data analysis*. Springer Series in Statistics.
- RICE, J.A.; SILVERMAN, B.W. (1991): Estimating the mean and covariance structure nonparametrically when the data are curves. *Journal of the Royal Statistical Society Series B* **53**, pp. 233 – 243.
- SEGOVIA, M.M. (2005): *Análisis en componentes principales funcionales: Aplicaciones empresariales*. Tesis Doctoral. Universidad Pablo de Olavide.
- SILVERMAN, B.W. (1996): Smoothed functional principal components analysis by choice of norm. *Annals of Statistics* **24** (1), pp. 1 – 24.
- VALDERRAMA, M.J.; AGUILERA, A.M.; OCAÑA, F.A. (2000): *Predicción dinámica mediante análisis de datos funcionales*. La Muralla-Hespérides.



UNIVERSIDAD
PABLO DE OLAVIDE
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA
LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (4). Páginas 75-97.
Diciembre de 2007. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/art15.pdf>

Teoría de la incertidumbre aplicada al valor del cliente en situaciones contractuales con intervalos de confianza

GIL LAFUENTE, ANNA M.

Departamento de Economía y Organización de Empresas
Universidad de Barcelona (España)

Correo electrónico: amgil@ub.edu

ORTIGOSA, MAURICIO

Departamento de Economía y Organización de Empresas
Universidad de Barcelona (España)

Correo electrónico: mortigosa@hotmail.com

MERIGÓ, JOSÉ M.

Departamento de Economía y Organización de Empresas
Universidad de Barcelona (España)

Correo electrónico: jmerigo@ub.edu

RESUMEN

El valor del consumidor ha sido un concepto muy estudiado desde hace tiempo por investigadores en las áreas de marketing. La mayoría de estas investigaciones están basadas en supuestos deterministas o aleatorios, al medir magnitudes o eventos que intervienen en el cálculo del valor del cliente.

En muchas ocasiones, los modelos del valor del consumidor en los que se involucran magnitudes que hacen referencia al futuro, por el entorno regido por su mutabilidad y por la incertidumbre, resultan excesivamente precisos para poder reflejar la realidad. Kaufmann y Gil Aluja (1986), que son dos de los precursores e investigadores más notables en Europa en las técnicas operativas de gestión, sostenían que “lo impreciso, lo borroso, no tiene por qué ser inexacto”. Podemos trabajar con modelos en los que tradicionalmente se utilizan cifras precisas pero no son necesariamente exactos.

En la investigación que nos ocupa, proponemos las aportaciones necesarias para utilizar cifras inciertas, borrosas, pero más adecuadas a la realidad. Vamos a presentar, para ello, dos modelos del valor del cliente (CLV) con la herramienta menos estructurada de la teoría de la incertidumbre: los intervalos de confianza, con la finalidad de ayudar a trabajar magnitudes inciertas involucradas en el cálculo del CLV.

Palabras clave: valor del cliente; valor del consumidor; modelos del valor del cliente; intervalos de confianza; incertidumbre.

Clasificación JEL: C53; M31.

2000MSC: 90B60.

The Uncertainty Theory assignment in the Customer Lifetime Valuation (CLV) for contractual settings with security intervals

ABSTRACT

The Customer Lifetime Value (CLV) concept has been highly purposed in many researches in the marketing area since long time ago. Almost all of them tend to be based on determinist or stochastic assumptions when measuring magnitudes or events which have to do with CLV estimates.

Often, the Customer Lifetime Valuation (CLV) involves magnitudes that link to the future by the running environment, its mutability and uncertainty, and this turn out the results to be too accurate. Kaufman and Gil Aluja (1986), who are the two most well known European investigators, have carried out researches into several operative management techniques, stood by the following statement “Most of our traditional tools for formal modelling, reasoning, and computing are crisp, deterministic and precise in character”. Then traditional modelling with precise data can not necessarily mean to be accurate.

In this study the authors will deal with some useful directions for uncertainty data, fuzzy data to stand out more accurate according to the reality. Two different Customer Lifetime Value (CLV) models with a least structured uncertainty theory tool will be introduced as well as security intervals that are connected to uncertain magnitudes in the CLV estimation.

Keywords: customer lifetime value (CLV); customer lifetime valuation (CLV); customer lifetime value models (CLVM); security intervals; uncertainty.

JEL classification: C53; M31.

2000MSC: 90B60.



1. INTRODUCCIÓN

El campo del marketing ha tenido considerables cambios desde el inicio de los años ochenta; autores tales como Grönroos (1994, 2004), Gummesson (1994) y varios más, se refieren a dichos cambios como el nuevo paradigma del marketing y al igual que el propio concepto de marketing, ha sido estudiado desde diferentes ángulos.

Uno de los pioneros en utilizar el término de marketing relacional fue Leonard Berry en 1983 con estudios en marketing de servicios en Estados Unidos. Kandampully y Duddy (1999) describen la definición inicial de L. Berry acerca del marketing relacional de forma muy simple:

“atraer, desarrollar y retener las relaciones con los consumidores”

Esto supone ir más allá del marketing convencional, ya que no solo se limita en atraer clientes y efectuar intercambios, ésta definición plantea un enfoque dirigido a consolidar relaciones a largo plazo.

Otros autores como Morgan y Hunt (1994), Grönroos (1994), Gummesson (1996), Alet (2004) y varios más, contemplan en sus definiciones de marketing relacional tres elementos comunes a todos ellos:

1. El concepto de *relación*, que está presente en todos.
2. La *interactividad*, que se genera a partir del entramado de las relaciones entre las distintas figuras que intervienen en los procesos.
3. El carácter *temporal o a largo plazo* que se atribuye a toda relación.

Con estos elementos, aspectos tan comunes como participación de mercado, volumen de ventas, medidas financieras normalmente a corto plazo, entre otros más, dejan paso a nuevos indicadores como por ejemplo: la tasa de retención de clientes, el coste de adquisición de nuevos clientes, la vida media de un cliente, el valor del cliente para la empresa (customer lifetime value = CLV) y muchos más.

De todos estos indicadores, y atendiendo al arte de atraer y retener consumidores rentables con una perspectiva de relación a largo plazo con cada cliente, el valor del cliente (CLV) ha sido un concepto que ha llamado la atención para ser estudiado desde hace tiempo por diversos investigadores en el área de marketing.

El valor económico del cliente es, en última instancia, la mejor fuente de financiación de cualquier empresa. Entre los primeros investigadores que realizaron

estudios sobre el impacto económico que genera la fidelidad del cliente se encuentran Reichheld y Sasser (1990); ellos mencionan que una reducción del 5% en las bajas de clientes, el valor presente neto de los flujos de efectivo en la relación de un cliente promedio, puede ser incrementada del 25% al 85% según la actividad. Reichheld (2002) en su nueva edición del clásico libro escrito en 1996 “The Loyalty Effect”, menciona que para tratar a los clientes como activos económicos, es necesario cuantificar y predecir la duración o permanencia del cliente con la empresa y el ciclo de flujo de fondos del cliente.

Payne y Holt (2001), mencionan que la línea de investigación del CLV es importante por tres razones:

(1) Los diferentes segmentos de consumidores tienen diferente beneficio potencial para la empresa y el patrón de beneficio puede variar dependiendo del periodo en que se encuentre el ciclo de vida del cliente y otras consideraciones.

(2) Cuidar al grupo de consumidores que representan los más valiosos clientes durante largos periodos, puede incrementar significativamente el beneficio para la empresa.

(3) Finalmente, algunos estudios enfatizan la vinculación entre el clima de servicio interno y el impacto sobre la satisfacción del empleado y la retención del consumidor.

En la presente investigación, se presenta una propuesta teorica-metodológica para calcular el CLV, aplicables a ciertos contextos. La contribución principal se centra en abordar el tratamiento de la incertidumbre en la obtención del valor del consumidor. Muchos modelos propuestos se enfrentan a la incertidumbre con herramientas dentro de la teoría de la probabilidad, entendiendo la incertidumbre de manera diferente a como la definimos en el presente trabajo.

En el prólogo de uno de los libros de Kaufmann y Gil Aluja (1987), Raymond Barre, en ese momento profesor de Economía Política de París, menciona que los citados autores han mostrado que los hechos imprecisos y los números inciertos no pueden ser tratados según los mismos principios que los hechos precisos y los números ciertos o que las variables aleatorias. Los autores Kaufmann y Gil Aluja han sabido transformar instrumentos ya empleados en el ámbito de la certeza o de lo probable para

aplicarlos a la incertidumbre. En esta dirección, vamos a mostrar cuales son dichas adaptaciones al estudio del CLV bajo la incertidumbre.

2. CONSIDERACIONES PREVIAS A LA APLICACIÓN DE LOS MODELOS PROPUESTOS

Podemos decir que el estudio del valor del cliente (CLV) a través de sus diversas líneas de investigación, tiene en la actualidad una gran importancia tanto para la empresa como para la universidad. Los modelos del CLV se han ido presentando a través de varios autores reconocidos en esta línea de investigación. Como es natural pensar, dichos modelos, tienen sus propias limitaciones ya que funcionan bajo ciertos supuestos. Por tanto, consideramos oportuno mostrar algunos de esos modelos para que sean adaptados a nuevos entornos.

Pasemos a presentar los modelos del valor del cliente más representativos dentro de ésta línea de investigación, de esta forma podemos proponer como aportación, el tratamiento de la incertidumbre como elemento adicional en este camino.

Seleccionamos 4 modelos que consideramos a modo de muestra, suficiente para poder tener un conocimiento previo a nuestra aportación.

2.1. MODELO ESTRUCTURAL BÁSICO DEL CLV

En la literatura se hace referencia al modelo estructural básico del CLV como el valor presente neto de los flujos futuros de los consumidores.

El modelo estructural básico tiene la forma:

<p>Modelo estructural básico del CLV</p> <p>Fuente: Jain y Singh (2002)</p> $CLV = \frac{(R_1 - C_1)}{1 + d} + \frac{(R_2 - C_2)}{(1 + d)^2} + \dots + \frac{(R_n - C_n)}{(1 + d)^n} = \sum_{i=1}^n \frac{(R_i - C_i)}{(1 + d)^i}$
--

donde d es la tasa de descuento, C los costes de mantenimiento de los clientes y R el rendimiento de los clientes.

Es el modelo más simple pero que muestra la estructura central del valor del cliente aplicando las herramientas utilizadas en matemáticas financieras o más en general de la teoría financiera: nos referimos al Valor Actual Neto (VAN).

Podemos afirmar que dos de los autores que han realizado un excelente conjunto de escenarios bajo la óptica del modelo estructural básico son Berger y Nasr (1998). En ese artículo, muestran una serie de modelos para determinar el valor del cliente en base a una taxonomía sistemática teórica y un conjunto de suposiciones sobre el comportamiento del cliente o consumidor.

2.2. MODELO DE MIGRACIÓN

El modelo de migración ha sido propuesto por Dwyer (1997). El autor hace mención a una clasificación donde divide a los compradores industriales en dos grandes categorías:

(1) Los clientes que comparten vendedores o proveedores y pueden ajustar su cartera de gasto entre ellos. Los autores anteriores hacen referencia a ellos con el nombre “always-a-share”.

(2) Los clientes que se han comprometido con el vendedor o empresa por un largo periodo, donde el cambio a otra empresa le implica un alto coste, pero si el cliente decide dejar al proveedor, la cuenta es cancelada para siempre. En cierta forma es una relación de cautiverio. Los autores se refieren a estos clientes como “lost-for-good”. En este caso, menciona Dwyer (1997), el problema para resolver el valor del cliente puede ser tratado como un problema de retención y propone una ligera variación al modelo estructural básico del CLV.

Por tanto, si consideramos la contribución bruta (CB) al final de cada periodo y los costes de promoción o retención (M) a la mitad de cada periodo, el autor propone la siguiente expresión, que no es más que el valor presente de los beneficios de cada periodo y los costes de retención también en valor presente. En esencia es aplicar nuevamente el significado del modelo estructural básico con ciertas variantes de importancia. La expresión queda:

Modelo del migración del CLV
Fuente : Dwyer (1997)

$$CLV = \underbrace{\left\{ CB \times \left\{ C_0 + \left[\sum_{i=1}^n [C_i] \right] / (1+d)^i \right\} \right\}}_{\text{Valor presente de los beneficios}} - \underbrace{\left\{ M \times \left[\frac{C_0}{(1+d)^{0,5}} \right] + \left[\sum_{i=1}^n [C_i] \right] / (1+d)^{i+0,5} \right\}}_{\text{Valor presente...}} / C_0$$

...de los costes de retención,

donde C_0 es la base de clientes
iniciales en el momento de calcular
el CLV.

donde d es el tipo de descuento y C la base de clientes.

Dwyer (1997) al igual que los modelos de Berger y Nasr (1998) no contemplan los costes de adquisición, solo consideran en su jerarquía de costes: los costes de retención o promoción, y los que entran en la contribución bruta (CB) utilizada.

2.3. MODELO DE ASIGNACIÓN DE LOS MEJORES RECURSOS

Hay un tercer modelo útil cuando la optimización de los recursos monetarios tiene especial importancia en la relación con el cliente. Blattberg y Deighton (1996) incorporan en su modelo los costes de adquisición: proponen una forma para encontrar un balance entre los costes de adquisición y de retención con la finalidad de maximizar el CLV.

En un artículo de Berger y Nasr (2001), muestran en un cuadro el desarrollo utilizado por Blattberg y Deighton (1996) para obtener la expresión final del valor del cliente quedando de la siguiente forma:

Cálculo del valor del consumidor

Fuente: Blattberg y Deighton (1996)

$$\text{CLV} = \underbrace{a\$m - \$A}_{\text{VPN de los gastos de adquisición (año de inicio)}} + \underbrace{a (\$m - \$R/r) \left[\frac{r'}{1-r'} \right]}_{\text{VPN de los gastos de retención}}$$

VPN de los
gastos de adquisición
(año de inicio)

VPN de los
gastos de retención

donde a es el número de clientes, m los ingresos, R los gastos, A los gastos iniciales, r el rendimiento en cada momento de tiempo y r' el rendimiento actualizado.

Maximizando el CLV en la igualdad anterior, es el mejor balance en dichos gastos. Para ello, recomiendan los autores, se busca un valor $\$R$ tal que al sustituir en la expresión permita obtener el CLV más grande, determinando así el gasto de adquisición $\$A$. Este resultado, es el valor del cliente esperado de un consumidor promedio adquirido con gastos $\$A$ y retenido con gastos de $\$R$ para cada año. Obsérvese que VPN hace referencia al valor previsto neto y *retenido con gastos* $\$R$, significa que un cliente permanece como tal en una empresa si ésta realiza desembolsos para mantener una determinada fidelidad.

Con esto podemos ver que el modelo usa el CLV como base para tomar decisiones sobre la asignación de recursos, a diferencia de los otros modelos presentados en los epígrafes anteriores, donde el objetivo había sido solamente calcular el CLV. Además, este modelo sí toma en cuenta los gastos de adquisición para calcular el CLV. A pesar de sus respetables atributos, el modelo continúa conservando algunas de las debilidades que otros modelos ya tienen: periodicidad y frecuencia constante en relación a los flujos de caja, no considera de forma conjunta o simultánea la adquisición y retención para maximizar el CLV, y en este caso por simplicidad, también se asume que todos los flujos de caja ocurren al inicio de cada año.

Los autores muestran con este modelo, la intención de asignar de la mejor manera los recursos buscando la maximización del valor del cliente. En esta misma dirección, Berger y Nasr (2001) han continuado estudiando en especial, la asignación de los recursos de promoción a través de dos conceptos: cálculo de decisión y valor del

consumidor. Además comentan las posibles sinergias entre diferentes vehículos promocionales.

2.4. MODELOS DE RELACIONES DE CLIENTES (CADENAS DE MARKOV)

Este enfoque en la obtención del valor del cliente, en cierto modo, tiende a generalizar las propuestas de los autores anteriores. Estos modelos se desarrollan a través de las llamadas Cadenas de Markov.

Pfeifer y Carraway (2000) por su parte proponen una clase de modelos matemáticos llamados “Modelos de cadenas de Markov” (MCM), que son apropiados para modelar las relaciones con los clientes y calcular el CLV.

La principal ventaja de estos modelos es su flexibilidad, y pueden ajustarse a la gran mayoría de las situaciones representadas en los modelos propuestos por Berger y Nasr (1998), Dywer (1997) y Blattberg y Deighton (1996), lo que significa que pueden ser utilizados para clientes en esquemas de migración como en situaciones de retención, así como, en situaciones con clientes actuales o bien futuros. Pfeifer y Carraway (2000) mencionan que su flexibilidad permite adaptar los MCM para algunos escenarios no cubiertos en los modelos previamente mostrados.

Otra ventaja de los MCM, es que se fundamentan en una sólida teoría estocástica o probabilística, además de la teoría de los procesos de decisiones de Markov. Con estas herramientas, según los autores, hacen frente a la incertidumbre que rodea la relación con el cliente, haciendo la aclaración por nuestra parte que dicho término, no tiene el mismo significado que el utilizado en el presente artículo. En este caso, la probabilidad y el valor esperado permiten hablar sobre la relación futura con un cliente individual.

Los Modelos de cadenas de Markov (MCM), en su versión amplia, trabajan de forma sutil con una métrica denominada “Recency, Frequency, Monetary value” (RFM). Autores tales como Reinartz y Kumar (2000), mencionan que en la actualidad muchas empresas utilizan dicha métrica para determinar la asignación del gasto a los consumidores en sus bases de datos. Otros autores mencionan que la métrica RFM es de las más fiables para el pronóstico de las ventas. No obstante, los MCM reciben una particular crítica: Jain y Singh (2002) mencionan que los periodos de tiempo de compra para todos los clientes nuevamente se asumen como iguales y fijos. Además, el cálculo de las probabilidades de transición de un periodo a otro es un elemento crítico para el

éxito de tales modelos y dichas probabilidades no son fáciles de calcular, agregando por nuestra parte que esas medidas están limitadas a informaciones objetivas.

En el modelo más simple, en lugar de tomar los tres componentes de la métrica RFM (Recency, Frequency, Monetary value), se considera solamente el primer elemento R: el número de periodos desde que el cliente realizó la última compra. Al obtener las probabilidades de transición de un estado a otro, cuyo resumen se muestra en la matriz P llamada matriz de transición de un paso (“one-step”), y al calcular la matriz P^t que resume la probabilidad de compra pronosticada y la matriz R que resume los flujos de efectivo, ambas elaboradas dependiendo del número de periodos desde la última compra (R). Pfeifer y Carraway (2000) llegan a una propuesta del valor presente esperado:

$$V^T = \sum_{t=0}^T [(1+d)^{-1}P]^t R$$

El vector V^T es el equivalente al CLV y representa el valor presente esperado de un cliente en particular con una relación de duración T y una tasa de descuento d.

Los autores muestran que si se considera un horizonte infinito, la expresión resulta ser la siguiente:

Modelo de Cadena de Markov
Situación de migración con probabilidades de compra en función del número de periodos desde la última compra (Recency)
Fuente: Pfeifer y Carraway (2000)

$V = \lim_{T \rightarrow \infty} V^T = \{ I - (1+d)^{-1} P \}^{-1} R = CLV$

donde I es la matriz identidad.

Recordemos que el anterior modelo puede ser caracterizado como una situación de migración con el cliente, cuando la probabilidad de compra depende del número de periodos transcurridos desde la última compra (R).

Si asumimos que además de las probabilidades de compra, también los gastos de marketing (M) y la contribución neta (CN) depende del número de periodos transcurridos desde la última compra (R), el modelo se va sofisticando cada vez más. De

esta forma, podemos construir MCM donde la probabilidad de compra, los gastos de marketing y la contribución neta (CN) dependen también de la frecuencia y del valor monetario, en definitiva, se hace uso de la métrica “Recency, Frequency, Monetary value” (RFM) para llegar a una categorización de clientes, mostrando esa flexibilidad que se comentó al inicio de este epígrafe.

Hemos visto hasta este momento cuatro modelos del valor del cliente. Sin dejar de admirar el especial mérito que representa cada uno de ellos, aparecen situaciones en donde los datos históricos no existen por tratarse de clientes nuevos o bien, el hecho de asignar unas probabilidades a esos clientes en base a la historia de otros, es como suponer que todos los anteriores clientes se comportan de la misma manera, según las leyes de las probabilidades. Incluso, Pfeifer y Carraway (2000) mencionan que con la aplicación de las probabilidades se hace frente a la incertidumbre que envuelve la relación futura entre cliente y empresa.

Es precisamente el concepto de incertidumbre el que va a protagonizar los modelos del CLV propuestos en la presente investigación bajo la óptica del modelo estructural básico. Considerando el término *incertidumbre* de forma distinta a los anteriores autores, pasamos a presentar dos modelos del valor del cliente con magnitudes inciertas (intervalos de confianza).

3. MODELOS DEL VALOR DEL CLIENTE CON INTERVALOS DE CONFIANZA

A pesar de la gran variedad de modelos existentes relacionados con el valor del cliente (CLV) y con ánimos de aportar valor añadido a cada uno de ellos, se observa que ninguno de los modelos presentados, hacen referencia en la incertidumbre inherente a la estimación de magnitudes futuras propias de dichos esquemas. En muchos casos las estimaciones se basan en datos históricos, lo que implica de alguna forma, un grado de estabilidad en el sistema económico de las empresas, inexistente en el contexto actual. En otros casos, se establece un marco de probabilidades o de procesos estocásticos como herramienta para apoyar el pronóstico de eventos futuros que resultan muy necesarios al medir el valor del cliente. En este caso se suele confundir aleatoriedad o azar con incertidumbre.

Kaufmann y Gil Aluja (1990) indican claramente que el azar posee leyes conocidas o no y su medida está asociada con la probabilidad, y la incertidumbre no posee leyes y está deficientemente estructurada y se explica de manera subjetiva. Los mismos autores describen un hecho incierto cuando hace referencia al futuro, donde no puede situarse en el tiempo (¿cuándo?) ni en el espacio (¿dónde?), y el pasado no aporta nada o muy poca información para la previsión del acontecimiento. Este es el significado que vamos a adoptar en la presente investigación al término *incertidumbre*. No se pretende reemplazar la teoría de la probabilidad en la medición de la aleatoriedad, sino proporcionar una manera natural de trabajar con problemas en los que la fuente de la imprecisión radica en la ausencia de criterios estrictos más que en presencia de variables aleatorias o de datos ciertos.

Uncles, Dowling y Hammond (2003) han demostrado que los consumidores no son 100% fieles o leales a las empresas. El movimiento de clientes es cada vez más volátil o se comparte entre más empresas. Las organizaciones conviven en un entorno de mayor incertidumbre comparado con épocas pasadas. La dificultad de predecir o estimar magnitudes involucradas con el valor del cliente se incrementa en un clima de incertidumbre: tasas de descuento, niveles de ventas, compras, tiempo de duración del cliente, entre otras magnitudes.

Al contemplar al cliente como un activo fundamental para la vida financiera de la empresa en un clima de incertidumbre, nos obliga a buscar una vía alterna o adaptar los desarrollos ya existentes, con instrumentos y técnicas que permitan la convivencia en ese nuevo entorno. Kaufmann y Gil Aluja (1986) mencionan que la teoría de los subconjuntos borrosos es una parte de las matemáticas que se halla perfectamente adaptada al tratamiento tanto de lo subjetivo como de lo incierto.

El presente trabajo tiene como finalidad mostrar dos modelos del valor del cliente (CLV) con magnitudes inciertas bajo la óptica del modelo estructural básico, haciendo uso de la aritmética de la incertidumbre. Se partirá del esquema más sencillo y propio del ámbito de la certeza, para llegar a dos modelos en donde la incertidumbre juega un papel protagónico en las magnitudes involucradas.

3.1. EL VALOR DEL CLIENTE (CLV) EN LA CERTEZA

A pesar de la gran variedad de trabajos referentes al valor del cliente que se han publicado en las revistas científicas y en libros sobre la materia, existe un vacío referente al tratamiento de la incertidumbre a la hora de contemplar las magnitudes que intervienen en la estimación del beneficio.

La posibilidad de introducir estimaciones inciertas mediante intervalos de confianza, tripletas de confianza o números borrosos, va a resultar de utilidad para los responsables de Marketing o Ventas.

En el modelo del CLV en la certeza, asumimos que:

- 1) Existe una relación contractual con la empresa por n periodos (meses, años, etcétera)
- 2) Se conocen todos los datos con certeza: ventas, costes, tasa de descuento.
- 3) Los flujos de costes e ingresos por ventas, se asumen en el mismo punto en el tiempo para simplificar los cálculos.
- 4) No hay colapsos significativos entre los costes de ventas, costes de retención y costes de captación. Esto puede ser el caso de estar suscrito en alguna revista con publicaciones periódicas, o algo similar.

Si consideramos que:

V_t = Ventas en cada periodo

$CV_t = CP_t + CS_t$ = Coste de venta en cada periodo, incluye: costes del producto y costes de servicios adicionales.

CB_t = Contribución bruta por consumidor en cada periodo: $V_t - CV_t$

CC = Coste de captación (publicidad, comunicación, etc.)

n = número de periodos (años, meses, etc.)

i = tasa de actualización (o de descuento) anual (apropiada para las inversiones de marketing).

Bajo condiciones de certeza, si se quiere obtener el valor del cliente, es suficiente con calcular el valor presente de los flujos futuros de ingresos por ventas y coste de venta a una tasa determinada de actualización menos los costes de captación realizados al inicio. Otra forma equivalente es calcular la contribución bruta marginal por consumidor en cada periodo y después, actualizar dichas magnitudes al año cero menos los costes de captación.

Por tanto, el valor del cliente se puede expresar como:

$$CLV = \sum_{t=1}^n CB_t [1/(1+i)^t] - CC$$

Una vez que hemos considerado el esquema más clásico, sin profundizar en estos momentos en todas las posibles combinaciones que se pueden realizar como lo muestra Berger y Nasr (1998), vamos a hacer uso de un elemento de la teoría de la incertidumbre: los intervalos de confianza como representación del número incierto menos estructurado de la borrosidad.

3.2. PRIMER MODELO DEL VALOR DEL CLIENTE (CLV) CON TASAS INCIERTAS

Gil Aluja (2002) señala que, en el ámbito de la economía y gestión de empresas, en el intento de realizar un adecuado tratamiento de los problemas que atañen a la sociedad, resulta difícil establecer medidas de manera cierta o mediante la probabilidad. En Europa, pioneros como Arnold Kaufmann y Gil Aluja, han tratado los fenómenos económicos y de gestión en la empresa que se producen conservando su incertidumbre, así como manteniendo la máxima información posible hasta lo más avanzado de los procesos, para hacer caer la entropía en caso necesario, lo más tarde posible, dado que siempre es posible reducir la incertidumbre aunque sea a costa de perder información.

Pasemos a mostrar un modelo donde desconocemos con precisión la tasa de interés para actualizar los flujos futuros monetarios.

Ejemplo. En el ámbito de la certeza, la tasa de interés para la actualización de los flujos monetarios, por hipótesis, se supone conocida. Bien sabemos que en la realidad esa magnitud pronosticada difícilmente es cierta, sobre todo cuando el horizonte económico es muy largo. Conservemos todos los supuestos contemplados en la certeza y consideremos solo la tasa de interés (o actualización) como la magnitud incierta en este problema.

El ejemplo numérico a mostrar, consiste en obtener el valor económico de un consumidor, donde hemos tenido unos costes de captación por cliente de 70 u.m. El cliente firma un contrato por cuatro años para una revista especializada que se publica

anualmente con precio de venta de 100 u.m. Suponemos también que el coste de venta es fijo por periodo de 25 u.m., incluye coste del producto y servicios adicionales. Por lo que la contribución bruta por cada venta es de 75 u.m. ¿Cuál es el valor económico de ese cliente con estos supuestos?

Como la tasa de interés es el único dato con incertidumbre, esto implica que el responsable del área en la empresa debe expresar una previsión de dicha tasa en forma de datos inciertos.

Supongamos que sus estimaciones o valuaciones subjetivas son:

$$\text{Para el año 1: } [2\%; 4\%] = \underset{\sim}{i}_1 \quad \text{Para el año 3: } [3\%; 7\%] = \underset{\sim}{i}_3$$

$$\text{Para el año 2: } [3\%; 6\%] = \underset{\sim}{i}_2 \quad \text{Para el año 4: } [4\%; 9\%] = \underset{\sim}{i}_4$$

Observamos que, a mayor horizonte temporal en su estimación, la amplitud del número incierto tiende a ser más grande, lo que refleja mayor incertidumbre. Procedemos así a realizar actualizaciones a partir de intervalos de confianza (números inciertos).

Siguiendo el camino adoptado en el ámbito de la certeza, tenemos que los factores de actualización inciertos presentan la siguiente forma:

$$\text{Año 1: } 1/(1(+)\underset{\sim}{i}_1) = [0,96 ; 0,98] = \underset{\sim}{\alpha}_1$$

$$\text{Año 2: } 1/(1(+)\underset{\sim}{i}_1)(1(+)\underset{\sim}{i}_2) = [0,91 ; 0,95] = \underset{\sim}{\alpha}_2$$

$$\text{Año 3: } 1/(1(+)\underset{\sim}{i}_1)(1(+)\underset{\sim}{i}_2)(1(+)\underset{\sim}{i}_3) = [0,85 ; 0,93] = \underset{\sim}{\alpha}_3$$

$$\text{Año 4: } 1/(1(+)\underset{\sim}{i}_1)(1(+)\underset{\sim}{i}_2)(1(+)\underset{\sim}{i}_3)(1(+)\underset{\sim}{i}_4) = [0,77 ; 0,89] = \underset{\sim}{\alpha}_4$$

Como la contribución bruta es constante por hipótesis de trabajo, basta con sumar los coeficientes de actualización inciertos; se multiplica éste resultado por la contribución y a su vez se restan los costes de captación. Todo número cierto, es de hecho un caso particular de un número incierto donde ambos extremos coinciden.

La expresión del valor del cliente se transforma en:

$$\underset{\sim}{CLV} = [CBM ; CBM] \sum_{n=1}^m \left[[1;1] / \prod_{j=1}^n (1(+)\underset{\sim}{i}_j) \right] (-) [CC; CC]$$

$$\underset{\sim}{CLV} = [CBM ; CBM] \sum_{n=1}^m \left[\underset{\sim}{\alpha}_1 + \underset{\sim}{\alpha}_2 + \underset{\sim}{\alpha}_3 + \underset{\sim}{\alpha}_4 \right] (-) [CC; CC]$$

Ecuación nº 1: valor del cliente con tasas inciertas, expresadas en intervalos de confianza.

Realizando los cálculos tenemos que:

$$\underset{\sim}{CLV} = [191,75; 211,25]$$

La interpretación es muy sencilla. El cliente en cuestión durante los cuatro años de su contrato, tiene un valor económico no inferior, en el peor de los casos, de 191,75 u.m., pero no superior en el mejor de los casos y con buenas perspectivas a 211,25 u.m. en virtud de la incertidumbre incorporada en la tasa del dinero.

3.3. SEGUNDO MODELO DEL VALOR DEL CLIENTE (CLV) CON TASAS, COSTES Y VENTAS INCIERTAS

Vamos a relajar todavía más los supuestos en el ámbito de la certeza para dar lugar a esquemas más generales capaces de incorporar más incertidumbre en las magnitudes que se contemplan. Pensemos en un problema similar al anterior pero con la variante de que en este caso, además de las tasas inciertas, desconocemos el importe de las ventas anuales del cliente y también los costes futuros necesarios para servir al cliente. Esto puede corresponder por ejemplo, cuando la revista especializada que se publica anualmente, tiene suplementos que pueden modificar tanto el importe de las ventas como el importe de los costes requeridos. Conservemos como hipótesis el hecho que el cliente permanece como tal cuatro años y que al final de cada año realiza una compra cuyo importe ahora se desconoce. Los costes se realizan en el mismo momento de la compra, a efectos de simplificación.

Conforme avanzamos, vemos que nos alejamos del primer problema de plena certeza pero poco realista y nos acercamos cada vez a esquemas más cercanos a la realidad en la que viven las empresas. En este caso, los datos inciertos que introducimos, deben ser muy estudiados y reflexionados por los responsables de marketing o ventas. Veamos esto a través del siguiente ejemplo.

Ejemplo. Supongamos que después de una reflexión exhaustiva, el responsable menciona que su estimación del importe de ventas expresado mediante cifras inciertas de ese cliente durante los cuatro periodos son:

$$\tilde{V}_1 = [75; 80], \quad \tilde{V}_2 = [78; 85], \quad \tilde{V}_3 = [80; 90], \quad \tilde{V}_4 = [75; 85]$$

Para esos niveles de ventas se pueden realizar unas estimaciones inciertas de costes de venta. Por simplicidad y sin afectar al ejercicio, consideremos en esas estimaciones, tanto los costes variables de producción como los costes adicionales de servicio, y son:

$$\tilde{C}_1 = [20; 25], \quad \tilde{C}_2 = [24; 28], \quad \tilde{C}_3 = [28; 35], \quad \tilde{C}_4 = [22; 30]$$

Con estos datos, podemos fácilmente obtener la contribución bruta para cada año calculando: Ventas inciertas – Costes inciertos

$$\tilde{CB}_1 = [50; 60] \quad \tilde{CB}_3 = [45; 62]$$

$$\tilde{CB}_2 = [50; 61] \quad \tilde{CB}_4 = [45; 63]$$

Recordemos que también las tasas relacionadas con el valor del dinero en el tiempo son inciertas y solo por razones prácticas, vamos a suponer que se estiman las mismas magnitudes que el ejercicio anterior y son:

$$\text{Año 1: } [0,96 ; 0,98] = \tilde{\alpha}_1 \quad \text{Año 3: } [0,85 ; 0,93] = \tilde{\alpha}_3$$

$$\text{Año 2: } [0,91 ; 0,95] = \tilde{\alpha}_2 \quad \text{Año 4: } [0,77 ; 0,89] = \tilde{\alpha}_4$$

En este caso como la contribución bruta marginal es incierta en los 4 períodos de compra, entonces la actualización de la contribución debe realizarse para cada año.

Finalmente, siguiendo un razonamiento financiero básico, se suman las contribuciones actualizadas inciertas y se restan los costes de captación (70 u.m.) en el

año cero, que aún cuando es el único dato cierto, se puede expresar como intervalo de confianza.

Por tanto:

$$\underset{\sim}{CLV} = [96,4; 160,48]$$

De forma similar, la interpretación es que durante los cuatro años de permanencia del cliente, se espera que aporte a la empresa un valor económico superior a 96,4 u.m., pero inferior a 160,48 u.m. en virtud de la incertidumbre incorporada en la tasa del dinero, costes y ventas.

La ecuación del valor del cliente queda expresada como:

$$\underset{\sim}{CLV} = \sum_{n=1}^m \underset{\sim}{CB}_n(\cdot) \left[[1;1] / \prod_{j=1}^n (1(+)\underset{\sim}{i}_j) \right] (-) [CC; CC]$$

$$\underset{\sim}{CLV} = \sum_{n=1}^m [\underset{\sim}{CB}_n(\cdot) \underset{\sim}{\alpha}_n] (-) [CC; CC]$$

donde $\underset{\sim}{CB}_n$, $\underset{\sim}{i}_j$ y $\underset{\sim}{\alpha}_n$ son cantidades inciertas y CC es un dato cierto.

Ecuación nº 2: valor del cliente con tasas, costes y ventas inciertas, expresadas en intervalos de confianza.

Realizando los ajustes necesarios, es posible que las estimaciones de las magnitudes inciertas, se expresen a través de tripletas de confianza, considerando que la cifra central es la que se espera como la más posible (máximo de presunción) dentro del abanico de informaciones entre los valores mínimo y máximo. Cabe hacer la aclaración que son tripletas de confianza y no números borrosos triangulares (NBT) ya que desconocemos el comportamiento entre la cifra central de máxima presunción y las magnitudes extremas. Veamos un ejemplo al respecto.

Ejemplo. Consideremos los mismos supuestos del ejemplo anterior, pero con la modificación de que el responsable en emitir las estimaciones sobre ventas, costes e intereses relativos al valor del dinero en el tiempo sobre el cliente, lo realiza en forma de tripletas de confianza.

Supongamos que se estima un nivel de ventas inciertas de un cliente durante los cuatro periodos de:

$$\underset{\sim}{V}_1 = [75; 78; 80], \underset{\sim}{V}_2 = [78; 80; 85], \underset{\sim}{V}_3 = [80; 85; 90], \underset{\sim}{V}_4 = [75; 81; 85]$$

De la misma forma, para esos niveles de ventas se pueden realizar unas estimaciones inciertas de costes de venta expresadas en tripletas de confianza (por simplicidad y sin afectar al ejercicio, consideremos en esas estimaciones, tanto los costes variables de producción como los costes adicionales de servicio):

$$\underset{\sim}{C}_1 = [20; 22; 25], \underset{\sim}{C}_2 = [24; 26; 28], \underset{\sim}{C}_3 = [28; 32; 35], \underset{\sim}{C}_4 = [22; 27; 30]$$

Al tratarse de tripletas de confianza, solo es necesario recurrir a la aritmética de datos inciertos. De esta forma fácilmente podemos obtener la contribución bruta para cada año calculado: Ventas inciertas – Costes inciertos

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{CB}_1 &= [50; 56; 60] & \underset{\sim}{CB}_3 &= [45; 53; 62] \\ \underset{\sim}{CB}_2 &= [50; 54; 61] & \underset{\sim}{CB}_4 &= [45; 54; 63] \end{aligned}$$

Supongamos que las estimaciones o evaluaciones de las tasas de descuento que emite el responsable son:

$$\text{Para el año 1: } [2\%; 3\%; 4\%] = \underset{\sim}{i}_1 \quad \text{Para el año 3: } [3\%; 5\%; 7\%] = \underset{\sim}{i}_3$$

$$\text{Para el año 2: } [3\%; 5\%; 6\%] = \underset{\sim}{i}_2 \quad \text{Para el año 4: } [4\%; 7\%; 9\%] = \underset{\sim}{i}_4$$

Siguiendo el camino adoptado en el ámbito de la certeza, observamos que los factores de actualización inciertos presentan la siguiente forma:

$$\text{Año 1: } 1 / (1(+)\underset{\sim}{i}_1) = [0,96; 0,97; 0,98] = \underset{\sim}{\alpha}_1$$

$$\text{Año 2: } 1 / (1(+)\underset{\sim}{i}_1)(1(+)\underset{\sim}{i}_2) = [0,91; 0,93; 0,95] = \underset{\sim}{\alpha}_2$$

$$\text{Año 3: } 1 / (1(+)\underset{\sim}{i}_1)(1(+)\underset{\sim}{i}_2)(1(+)\underset{\sim}{i}_3) = [0,85; 0,88; 0,93] = \underset{\sim}{\alpha}_3$$

$$\text{Año 4: } 1 / (1(+)\tilde{i}_1)(1(+)\tilde{i}_2)(1(+)\tilde{i}_3)(1(+)\tilde{i}_4) = [0,77; 0,83; 0,89] = \tilde{\alpha}_4$$

En este caso, como la contribución bruta marginal es incierta en los cuatro periodos de compra, entonces la actualización de la CB debe realizarse para cada año.

$$\text{Para el año 1: } \tilde{CB}_{1(\bullet)} \tilde{\alpha}_1 = [48; 54,32; 58,8]$$

$$\text{Para el año 2: } \tilde{CB}_{2(\bullet)} \tilde{\alpha}_2 = [45,5; 50,22; 57,95]$$

$$\text{Para el año 3: } \tilde{CB}_{3(\bullet)} \tilde{\alpha}_3 = [38,25; 46,64; 57,66]$$

$$\text{Para el año 4: } \tilde{CB}_{4(\bullet)} \tilde{\alpha}_4 = [34,65; 44,82; 56,07]$$

Finalmente, siguiendo el mismo razonamiento financiero básico, se suman las contribuciones actualizadas inciertas y se restan los costes de captación (70 u.m.), que aún cuando es el único dato cierto, se puede expresar como tripleta de confianza.

Por tanto:

$$\tilde{CLV} = \sum_{n=1}^4 [\tilde{CB}_{n(\bullet)} \tilde{\alpha}_n] - [70; 70; 70]$$

$$\tilde{CLV} = [96,4; 126; 160,48]$$

Como es natural, la interpretación es que durante el periodo que el cliente conserve la relación con la empresa, el valor del cliente bajo incertidumbre no es menor a 96,4 u.m. ni superior a 160,48 u.m. No obstante, si el responsable ha tenido en sus estimaciones ciertas sospechas para los máximos de presunción, entonces 126 u.m. es el valor del cliente con mayor posibilidad. En todo caso, el valor es positivo en todo el intervalo, lo que indica que el cliente es considerado como un activopreciado para la empresa ya que le permite obtener recursos financieros por la venta del producto o servicio durante la permanencia del cliente con la empresa.

Los dos modelos que hemos mostrado están bajo el supuesto de una relación contractual fija con la empresa, es decir, una relación que dura “n” periodos. Pasemos a comentar algunas conclusiones y sugerencias de interés.

4. CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS DE INTERÉS

Con estos modelos hemos mostrado que, las estimaciones con magnitudes inciertas (intervalos de confianza y tripletas de confianza) nos permiten obtener el valor del cliente (CVL) no como un dato dentro del ámbito de la certeza, pero nos permite establecer límites al valor económico del cliente basado en apreciaciones subjetivas pero muy valiosas por parte de los responsables.

La utilización de números inciertos permite, por su propia naturaleza, proporcionar al modelo estructural básico ciertas cotas que ayudan al tratamiento de la incertidumbre. Al ser la matemática de la incertidumbre una generalización de las matemáticas mecanicistas y aleatorias, se cumple la conocida proposición según la cual lo general es cierto para lo particular, pero lo particular no siempre es cierto en un supuesto general.

La intención de los dos modelos presentados basados en el modelo estructural básico del valor del consumidor (CLV), pretenden incorporar de forma gradual la incertidumbre que se pueda presentar en las diferentes magnitudes. Iniciamos nuestro trabajo con el modelo clásico en la certeza, donde todas las magnitudes y condiciones del problema se dan por conocidas. Posteriormente, hemos introducido la incertidumbre en la variable tasa de interés o descuento. En el segundo modelo, incorporamos incertidumbre en las magnitudes de la tasa de interés, ventas y costes, con la herramienta menos estructurada de la matemática de la incertidumbre: los intervalos de confianza y las tripletas de confianza. Como acertadamente lo mencionaron nuestros maestros, son modelos con cifras imprecisas, borrosas, pero no tienen porque ser inexactos.

En conclusión, con el tratamiento de las herramientas de la teoría de la incertidumbre, procedemos a la elaboración de un grupo de modelos capaces de calcular el valor del cliente en situaciones donde no hay información suficiente para expresar las magnitudes de manera precisa. En este caso, abordamos las relaciones contractuales con compras periódicas.

Existen otros modelos que fueron estudiados al inicio en la revisión bibliográfica sobre el tema del CLV. Dichos modelos son algo más sofisticados como el de migración, asignación de los mejores recursos o aquellos basados en cadenas de Markov, que quizás también puedan en un futuro ser estudiados a través de la óptica de

la incertidumbre caminando con todo cuidado al cruzar la barrera de lo aleatorio a lo incierto.

Cabe mencionar por último, que cuando existe poca información o la información es incompleta, es suficiente para impedir la correcta utilización de los esquemas ya conocidos en el ámbito de la certeza o del azar.

AGRADECIMIENTOS

Deseamos expresar nuestro agradecimiento a los revisores anónimos por sus valiosas sugerencias, que han mejorado la calidad de este trabajo.

REFERENCIAS

- Alet-i-Vilaginés, J. (2004), *Marketing Relacional: Cómo obtener clientes leales y rentables*. Barcelona: Ediciones Gestión 2000.
- Berger, P.D.; Nasr, N.I. (1998), Customer Lifetime Value: Marketing Models and Applications. *Journal of Interactive Marketing* 12, 17-30.
- Berger, P.D.; Nasr, N.I. (2001), The allocation of promotion budget to maximize customer equity. *OMEGA: The international Journal of Management Science* 29, 49-61.
- Blattberg, R.C.; Deighton, J. (1996), Manage Marketing by the Customer Equity Test. *Harvard Business Review* 74, 136-144.
- Dwyer, R.F. (1997), Customer Lifetime Valuation to Support Marketing Decision Making. *Journal of Direct Marketing* 11, 6-15.
- Gil-Aluja, J. (2002), La pretopología en la gestión de la incertidumbre, *Discurso de Investidura como Doctor "Honoris Causa" por la Universidad de León*. León: Secretariado de Publicaciones y Medios Audiovisuales.
- Grönroos, C. (1994), From Marketing Mix to Relationship Marketing: Towards a Paradigm Shift in Marketing. *Management Decision* 32, 4-20.
- Grönroos, C. (2004), The relationship marketing process: communication, interaction, dialogue, value. *Journal of Business and Industrial Marketing* 19, 99-113.
- Gummesson, E. (1994), Making Relationship Marketing Operational. *International Journal of Service Industry Management* 5, 5-20.

- Gummesson, E. (1996), Relationship marketing and imaginary organizations: a synthesis. *European Journal of Marketing* 30, 31-44.
- Jain, D.; Singh, S.S. (2002), Customer Lifetime Value Research in Marketing: A review and future directions. *Journal of Interactive Marketing* 16, 34-46.
- Kandampully, J.; Duddy, R. (1999), Relationship marketing: a concept beyond the primary relationship. *Marketing Intelligence and Planning* 17, 315-323.
- Kaufmann, A.; Gil-Aluja, J. (1986), *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*. Santiago de Compostela: Editorial Milladoiro.
- Kaufmann, A.; Gil-Aluja, J. (1987), *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*. Barcelona: Editorial Hispano Europea.
- Kaufmann, A.; Gil-Aluja, J. (1990), *Las matemáticas del azar y de la incertidumbre: Elementos básicos para su aplicación en economía*. Madrid: Editorial Centro de Estudios Ramon Areces.
- Morgan, R.M.; Hunt, S.D. (1994), The Commitment-Trust Theory of Relationship Marketing. *Journal of Marketing* 58, 20-38.
- Payne, A.; Holt, S. (2001), Diagnosing Customer Value: Integrating the Value Process and Relationship Marketing. *British Journal of Marketing* 12, 159-182.
- Pfeifer, P.E.; Carraway, R.L. (2000), Modeling Customer Relationships as Markov Chains. *Journal of Interactive Marketing* 14, 43-55.
- Reichheld, F.F.; Sasser, W.E. (1990), Zero Defections: Quality Comes to Services. *Harvard Business Review* 68, 105-111.
- Reichheld, F.F. (2002), *El efecto lealtad: Crecimiento, Beneficios y Valor último*. Barcelona: Editorial Ariel.
- Reinartz, W.J.; Kumar, V. (2000), On the Profitability of Long-Life Customers in a Noncontractual Setting: An Empirical Investigation and Implications for Marketing. *Journal of Marketing* 64, 17-35.
- Uncles, M.D.; Dowling, G.R.; Hammond, K. (2003), Customer loyalty and customer loyalty programs. *Journal of Consumer Marketing* 20, 294-316.

Volumen 4 (diciembre de 2007)

Editorial

Páginas 3–6

Un análisis transversal y longitudinal en el estado de pobreza en Alemania

A cross-sectional and longitudinal analysis of poverty in Germany

González Rodríguez, María Rosario; Martín Martín, Domingo; González Abril, Luis;
Velasco Morente, Francisco

Páginas 7–34

Matemática Financiera con MATLAB ©

Mathematical Finance with MATLAB ©

Merino, María; Vadillo, Fernando

Páginas 35–55

Asignación de primas en el seguro del automóvil utilizando el Análisis en Componentes Principales Funcionales

Premium allocation in the car insurance by using Functional Principal Component Analysis

Segovia González, María Manuela; Guerrero Casas, Flor M.; Herranz Peinado, Patricia

Páginas 56–74

Teoría de la incertidumbre aplicada al valor del cliente en situaciones contractuales con intervalos de confianza

The Uncertainty Theory assignment in the Customer Lifetime Valuation (CLV) for contractual settings with security intervals.

Gil-Lafuente, Ana María; Ortigosa, Mauricio; Merigó, José M.

Páginas 75–97