REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (12). Páginas 65–80.
Diciembre de 2011. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: http://www.upo.es/RevMetCuant/art.php?id=53

Regla de reparto proporcional con referencias múltiples: aplicación al caso de agregación y actualización de probabilidades

Hinojosa Ramos, Miguel Ángel
Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide, Sevilla
Correo electrónico: mahinram@upo.es

López Sánchez, Ana Dolores
Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide, Sevilla
Correo electrónico: adlopsan@upo.es

RESUMEN

En este trabajo se extiende la regla proporcional de los problemas clásicos de reparto al caso de problemas con referencias múltiples y se presenta una caracterización de la regla proporcional ponderada. Como caso particular, se analiza el problema de agregación y actualización de probabilidades.

Palabras clave: problemas de división con referencias múltiples; regla proporcional ponderada; agregación y actualización de probabilidades.
Clasificación JEL: D39.
MSC2010: 91C99.

Artículo recibido el 28 de marzo de 2011 y aceptado el 27 de octubre de 2011.

A Proportional Rule for the Division Problems with Multiple References: An Application to the Problems of Probability Aggregation and Probability Updating

ABSTRACT

In this paper we extend the proportional rule to division problems with multiple references and we present a result of characterization of the weighted proportional rule. As a particular case, we analyze the problems of probability aggregation and probability updating.

Keywords: division problems with multiple references; weighted proportional rule; probability aggregation; probability updating.
JEL classification: D39.
MSC2010: 91C99.

1. INTRODUCCIÓN

Un problema clásico de reparto consiste en cómo dividir un *estado*[1] (cantidad de un bien homogéneo e infinitamente divisible) entre un conjunto de agentes, teniendo en cuenta una "referencia" para cada uno de ellos. Un ejemplo es el problema de bancarrota, donde la referencia de cada agente (los agentes son los acreedores de la empresa) es la reclamación (derecho consolidado) que éste hace sobre el valor de liquidación de la empresa en bancarrota. Otro ejemplo es el problema de reparto de excedentes, que aparece, por ejemplo, cuando hay que dividir los beneficios de un negocio entre los inversores de acuerdo a las cantidades que respectivamente invirtieron (referencias). Los modelos clásicos han sido extensamente estudiados en la literatura, como se puede ver, por ejemplo, en Thomson (2003).

Nuestra investigación no se restringe a problemas de bancarrota o problemas de reparto de excedentes, sino que propone un modelo general en el que caben los dos tipos de problemas, en el sentido de que la suma total de las referencias de los agentes puede estar por encima o por debajo de la cantidad total a distribuir. Además, se extiende este modelo al caso de múltiples referencias, ya que este modelo extendido permite representar y analizar situaciones de la vida cotidiana de una manera más realista. Una situación real que puede representarse mediante este modelo es el problema de bancarrota con múltiples referencias, es decir, el valor de liquidación de una firma que ha quebrado (el estado) tiene que dividirse entre sus acreedores (los agentes) y las reclamaciones de cada acreedor son clasificadas por distintos tipos de activos (las referencias).

Las múltiples referencias pueden también representar las distintas evaluaciones que hacen diferentes expertos de las necesidades o derechos que tienen unos agentes. Por ejemplo, situaciones en las que hay que repartir fondos para investigación entre distintos grupos y las necesidades de éstos son evaluadas por varios expertos.

El modelo también es apropiado para representar problemas en los que hay incertidumbre sobre las referencias. Por ejemplo, si varios acreedores tienen derecho a recibir de una empresa, en una fecha futura, ciertas cantidades de activos financieros y la empresa deudora quiebra antes de cumplir con esta obligación, entonces para dividir el valor de liquidación de la empresa entre los acreedores se podrían tener en cuenta distintos esce-

[1] Aunque la traducción de *estate* es dotación o propiedad, en la literatura sobre problemas de reparto en castellano es común el uso de la palabra "estado".

narios económicos futuros. La incertidumbre sobre las reclamaciones de los acreedores se podría incluir en el modelo considerando los valores de los activos en diferentes escenarios. Estos valores serían las referencias a tener en cuenta en el reparto.

El modelo de reparto con referencias múltiples ha sido estudiado en Ju *et al.* (2007), donde se proporciona una caracterización axiomática de las reglas que son no manipulables por transferencia entre las referencias de los agentes. También, las contribuciones de Pulido *et al.* (2002, 2008) pueden considerarse casos particulares del modelo que aquí se propone, con solo dos vectores de referencias y donde uno de ellos domina al otro. En un sentido diferente al que aquí se propone, en Branzei *et al.* (2004), puede verse un modelo parecido con incertidumbre sobre las referencias (pertenecen a un intervalo).

En este trabajo se analizan los problemas de reparto usando la regla proporcional y se destacan dos casos particulares que surgen cuando se cambian "agentes" por "estados de la naturaleza" y "asignaciones" por "probabilidades". El primer caso es un problema clásico de reparto conocido con el nombre de actualización de probabilidades y el segundo caso es un problema de reparto con múltiples referencias conocido con el nombre de agregación de probabilidades. Actualizar probabilidades (*updating*), (ver, por ejemplo, Gilboa and Schmeidler, 1993), significa que inicialmente hay una distribución de probabilidad sobre un conjunto de estados de la naturaleza, pero la situación cambia cuando aparece información de que ocurre un suceso (un subconjunto propio del conjunto de estados de la naturaleza). Las componentes del vector inicial correspondientes a este suceso tienen que actualizarse para convertirse en un vector de probabilidades. En esta situación lo que propone la regla de Bayes (Majumdar, 2004) es utilizar las probabilidades proporcionales a las referencias que constituyen las componentes del vector inicial correspondientes al suceso que ha ocurrido. En el problema de agregación de probabilidades (Rubinstein and Fishburn, 1986), se trata de obtener un único vector de probabilidades a partir de un conjunto de ellos. Por ejemplo, varios expertos en bolsa tienen sus propias predicciones o probabilidades sobre si un activo financiero subirá, mantendrá o bajará su cotización en un plazo futuro determinado, la regla agrega estas predicciones en una sola. Un bien conocido sistema de agregación consiste en hacer una media ponderada de las distribuciones de probabilidad, lo que se conoce en la literatura como *linear opinion pools* (McConway, 1981).

En este trabajo, además, se estudian ambos problemas conjuntamente, es decir, el problema de agregación de probabilidades y el problema de actualización de probabilidades dentro del modelo de división con múltiples referencias. Asimismo, se proponen reglas de división proporcionales para estos problemas.

El trabajo se estructura como sigue. En la Sección 2 se expone la regla proporcional en problemas clásicos de división, detallando sus propiedades más importantes. Como caso particular, se destaca el problema de actualización de probabilidades. En la Sección 3 se estudia la regla proporcional ponderada en problemas de reparto con múltiples referencias, haciendo referencia a sus propiedades más interesantes y se presenta un resultado de caracterización. Como casos particulares se estudian el problema de agregación de probabilidades y el problema de actualización y agregación de probabilidades conjuntamente. Las conclusiones y las líneas futuras de investigación se exponen en la Sección 4.

2. REGLA PROPORCIONAL

Consideremos una situación en la que una cantidad, $E \in \mathbb{R}_{++}$,[2] de un bien homogéneo e infinitamente divisible (el estado), tiene que dividirse entre n agentes (se denota por $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ al conjunto finito de agentes) teniendo en cuenta una referencia para cada uno de ellos, es decir, un vector $c \in \mathbb{R}_+^n$. Un problema clásico de división es un par $(c, E) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_{++}$.

Un ejemplo de problema clásico de división es el problema de bancarrota, donde el estado, E, representa el valor de liquidación de la empresa en quiebra que ha de repartirse entre los acreedores y c es el vector de reclamaciones (derechos consolidados) que los acreedores tienen sobre el estado. Otro ejemplo es el problema de reparto de excedentes donde el estado, E, representa el beneficio a repartir y c es el valor de las inversiones iniciales que se usan como referencias para el reparto.

La clase de todos los problemas de división asociados con el conjunto de agentes, N, se denota por $\mathcal{C}_N$. Una asignación para el problema $(c, E) \in \mathcal{C}_N$ es un vector $x \in \mathbb{R}_+^n$, que satisface la propiedad de eficiencia[3] $x(N) = \sum_{i \in N} x_i = E$, esto es, se reparte la totalidad del estado y, además, satisface la propiedad de no negatividad: $x_i \geq 0, \forall i \in N$; es decir, que

[2] Se denota por $\mathbb{R}_{++}$ al conjunto de todos los números reales positivos, por $\mathbb{R}_+$ al conjunto de todos los números reales no negativos y por $\mathbb{R}_+^n$ y $\mathbb{R}_+^{n \times m}$, respectivamente, al conjunto de vectores n-dimensionales y matrices de dimensión $n \times m$ compuestos por elementos de $\mathbb{R}_+$.

[3] Aquí y en adelante, para cada vector n-dimensional x se denotará por $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ para cualquier $S \subseteq N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

las asignaciones no son negativas. Se denota por $X(E) \subseteq \mathbb{R}^n_+$ al conjunto de asignaciones. Una regla de división sobre $\mathcal{C}_N$ es una función, f, que asocia a cada $(c, E) \in \mathcal{C}_N$ una única asignación $f(c, E) \in X(E)$. La regla dual, f^*, de la regla de reparto f es para cada $(c, E) \in \mathcal{C}_N$ $f^*(c, E) = c - f(c, c(N) - E)$. Una regla de reparto se dice autodual si $f^* = f$.

Una de las reglas de reparto más estudiadas es la regla proporcional que establece que las asignaciones son proporcionales a las referencias consideradas.

Definición 2.1 (regla proporcional) *La regla proporcional es, para cada* $(c, E) \in \mathcal{C}_N$*,*

$$p(c, E) = \frac{E}{c(N)} c.$$

A continuación se detallan las caracterizaciones más importantes que cumple la regla proporcional:

Teorema 2.2 (Young, 1988) *La regla proporcional es la única regla autodual que cumple composición hacia arriba*[4]*.*

Teorema 2.3 (Young, 1988) *La regla proporcional es la única regla autodual que cumple composición hacia abajo*[5]*.*

Teorema 2.4 (Moulin, 1985; Chun, 1988; Ju y Miyagawa, 2002) *La regla proporcional es la única regla que es no manipulable*[6] *y cumple la propiedad de asignación nula a referencias nulas*[7]*.*

---

[4]Una regla de reparto, f, cumple la propiedad de composición hacia arriba si para cada $(c, E) \in \mathcal{C}_N$ y cada $E' > E$ se cumple $f(c, E') = f(c, E) + f(c - f(c, E), E' - E)$. Esta propiedad significa que se obtiene el mismo resultado al repartir E' que al repartir primero E y asignar el incremento del estado, $E' - E$, tomando como nuevas referencias las referencias iniciales menos lo que previamente ya se ha asignado.

[5]Una regla de reparto, f, cumple la propiedad de composición hacia abajo si para cada $(c, E) \in \mathcal{C}_N$ y cada $E' < E$ entonces $f(c, E') = f(f(c, E), E')$. Esta propiedad significa que se obtiene el mismo resultado al repartir E' que al repartir primero E y en función de las asignaciones obtenidas repartir E'.

[6]Una regla de reparto, f, se dice que es no manipulable si ningún grupo puede mejorar su resultado global mediante transferencias de las referencias entre los agentes del grupo. Formalmente, para cada $(c, E) \in \mathcal{C}_N$, cada $N' \subseteq N$ y cada $(c'_i)_{i \in N'}$ si $\sum_{i \in N'} c'_i = \sum_{i \in N'} c_i$, se cumple $\sum_{i \in N'} f_i(c, E) = \sum_{i \in N'} f_i(c'_{N'}, c_{N \setminus N'}, E)$.

[7]Para cada $(c, E) \in \mathcal{C}_N$, cada $i \in N$ si $c_i = 0$ se cumple $f_i(c, E) = 0$.

2.1. Actualización de probabilidades

Un caso particular en el que se aplica la regla proporcional es el problema de actualización de probabilidades que aparece cuando, habiendo inicialmente una distribución de probabilidad sobre un conjunto de estados de la naturaleza, la situación cambia porque aparece la información de que un suceso (un subconjunto propio del conjunto de estados de la naturaleza) ocurre. Las componentes del vector inicial correspondientes a este subconjunto de estados de la naturaleza tienen que actualizarse para convertirse en un vector de probabilidades, es decir, para que sumen la unidad. En esta situación, si se interpretan los estados de la naturaleza como agentes, aparece un problema de división de la unidad entre los agentes correspondientes al suceso que ha ocurrido en el que se toman como referencias las componentes del vector inicial de probabilidades asociadas a dichos agentes. La aplicación de la regla proporcional a este problema da como resultado la denominada regla de Bayes (Majumdar, 2004). Por tanto, si N es el conjunto de estados de la naturaleza, $S \subset N$ es el suceso que ha ocurrido, c es el vector de probabilidades inicial y c_S es la proyección de c sobre S, la regla de Bayes establece como resultado de la actualización de probabilidades el vector $p(c_S, 1)$. Obsérvese que mediante esta regla se reparte la cantidad $1 - c(S) = 1 - \sum_{i \in S} c_i$ entre los agentes de S, proporcionalmente al vector c_S.

Pueden definirse otras reglas de actualización de probabilidades. A continuación se pone un ejemplo de familias de reglas para este problema:

Sea $\mathcal{P} \subseteq 2^N$ el conjunto de las posibles subconjuntos no vacíos de estados de la naturaleza que finalmente pueden ocurrir. Supondremos que $\mathcal{P}$ es no vacío. Un problema de actualización de probabilidades en este marco es una terna $(c, 1, \mathcal{P})$, donde c es una distribución de probabilidad sobre N. La clase de todos los problemas de actualización de probabilidades que se asocian con el conjunto de estados de la naturaleza N y la estructura de subconjuntos, $\mathcal{P}$, se denota por $\mathcal{C}(N, \mathcal{P})$.

Una regla de reparto sobre $\mathcal{C}(N, \mathcal{P})$ es una función, f, que asocia con cada problema, $(c, 1, \mathcal{P}) \in \mathcal{C}(N, \mathcal{P})$, una asignación $x^S \in X(E)$ para cada $S \in \mathcal{P}$ de forma que $x_r^S = 0$ si $r \notin S$.

Un ejemplo de familia de reglas para este problema de actualización de probabilidades consiste en añadir a c_S, para cada $S \in \mathcal{P}$, el reparto entre los agentes de S de la cantidad $1 - c(S)$ según una proporción β, es decir, fijado el β, la regla es:

$$f^{\beta}(c,1,\mathcal{P}) = c_S + p(1-c(S),\beta), \quad \forall\, S \in \mathcal{P},$$

donde $\beta \in \mathbb{R}_+^S$.

Obsérvese que, para el problema particular en el que para un conjunto $S \in \mathcal{P}$ se tome como parámetro β el vector c_S, la regla f^{β} asocia a dicho grupo S una cantidad proporcional a c_S (esto es consecuencia de que la regla proporcional es autodual).

Nótese también que en el dominio de problemas de actualización de probabilidades estas reglas son también no manipulables.

3. REGLA PROPORCIONAL PONDERADA

En el modelo que se presenta en este trabajo, para el reparto se tienen en cuenta m vectores de referencias distintos (se denota por $M = \{1,2,\ldots,m\}$ al conjunto de referencias para el reparto). Sea $C \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$ la matriz de referencias. Por c_i^j se denota al elemento de la matriz C correspondiente al i-ésimo agente y a la j-ésima referencia. Para cada $i \in N$, $c_i \in \mathbb{R}_+^m$ representa las distintas referencias del agente i-ésimo. Para cada $j \in M$, $c^j \in \mathbb{R}_+^n$ representa la referencia j-ésima para cada uno de los agentes. Un problema de división con múltiples referencias es un par $(C,E) \in \mathbb{R}_+^{n\times m} \times \mathbb{R}_{++}$.

Un ejemplo de problema de división con múltiples referencias es un problema de bancarrota como el que se presentó anteriormente, pero en el que las reclamaciones de cada acreedor son sobre distintos tipos de activos. Otro ejemplo es el problema de reparto de excedentes similar al problema clásico de división, pero en el que aparecen distintos tipos de inversiones iniciales.

La clase de todos los problemas de división asociados con el conjunto de agentes, N, donde el conjunto de referencias es M, se denota por $\mathcal{C}_N^M$. Una asignación para el problema $(C,E) \in \mathcal{C}_N^M$ es un vector $x \in \mathbb{R}_+^n$, que satisface la propiedad de eficiencia $x(N) = \sum_{i\in N} x_i = E$ y además, satisface la propiedad de no negatividad $x_i \geq 0$, $\forall i \in N$. Se denota por $X(E) \subseteq \mathbb{R}_+^n$ al conjunto de asignaciones. Una regla de división sobre $\mathcal{C}_N^M$ es una función, f, que asocia a cada $(C,E) \in \mathcal{C}_N^M$ una única asignación $f(C,E) \in X(E)$.

Una extensión de la regla proporcional clásica en el modelo de división con múltiples referencias es la regla proporcional ponderada.

Definición 3.1 (regla proporcional ponderada) *Para cada* $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$ *y cada* $\alpha \in \Delta_+^M = \{\alpha \in \mathbb{R}_+^m : \sum_{j \in M} \alpha^j = 1\}$ *la regla proporcional ponderada por el vector de pesos* α *es:*

$$P^\alpha(C, E) = \sum_{j \in M} \alpha^j p(c^j, E).$$

A continuación se describen algunas propiedades de las reglas de reparto para los problemas de división con múltiples referencias que cumple la regla proporcional ponderada y se demuestra un teorema de caracterización de dicha regla.

- *No manipulabilidad.* Una regla de reparto, f, se dice que es no manipulable si ningún grupo puede mejorar su resultado global mediante transferencias de los vectores de referencias entre los agentes del grupo. Formalmente, para cada $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$, cada $N' \subseteq N$ y cada $(c'_i)_{i \in N'}$ si $\sum_{i \in N'} c'_i = \sum_{i \in N'} c_i$, entonces $\sum_{i \in N'} f_i(C, E) = \sum_{i \in N'} f_i(c'_{N'}, c_{N \setminus N'}, E)$.

- *Asignación nula a referencias nulas.* Para cada $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$, cada $i \in N$ si $c_i = 0$ se cumple $f_i(C, E) = 0$.

- *Homogeneidad en el estado.* Una regla de reparto, f, cumple la propiedad de homogeneidad en el estado si para cada $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$ y cada $\mu > 0$ se verifica $f(C, \mu E) = \mu f(C, E)$. Esta propiedad significa que el resultado es independiente de la unidad en la cual el estado ha sido medido.

- *Invarianza en las referencias.* Para cada $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$ y cada $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^m$, si $\lambda * C = (\lambda^j \cdot c^j)_{j \in M}$, se cumple que $f(\lambda * C, E) = f(C, E)$. Esta propiedad significa que el resultado es invariante de las unidades en las que se midan cada una de las referencias.

Teorema 3.2 *La regla proporcional ponderada es la única regla de reparto para el problema de múltiples referencias que es no manipulable, de asignación nula a referencias nulas, homogénea en el estado e invariante en las referencias.*

Para demostrar el Teorema 3.2 se utiliza el resultado de Ju *et al.* (2007), que se detalla a continuación.

Lema 3.3 (Corolario 1 en Ju *et al.*, 2007) *La única regla no manipulable y de asignación nula a referencias nulas es para cada* $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$,

$$f(C, E) = \sum_{j \in M} W^j(C(N), E) p(c^j, E) \tag{3.1}$$

donde $W^j(C(N), E)_{j \in M}$ *es un conjunto de pesos que dependen del estado a repartir y de las referencias del problema a través del vector* $C(N) = (c^j(N))_{j \in M}$.

Demostración del Teorema 3.2 Es fácil ver que la regla proporcional ponderada cumple no manipulabilidad, asignación nula a referencias nulas, homogeneidad en el estado e invarianza en las referencias. Por tanto, nos centraremos en la implicación inversa.

Sea f una regla de reparto que satisface no manipulabilidad, asignación nula a referencias nulas, homogeneidad en el estado e invarianza en las referencias y sea $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$ un problema de división con múltiples referencias.

Por el Lema 3.3, la regla f viene dada por la expresión (3.1). Vamos a demostrar que, para cada $j \in M$, $W^j(C(N), E) = \alpha^j$ para todo $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$.

En primer lugar, vamos a ver que, por homogeneidad en el estado, se tiene que, para cada $j \in M$, $W^j(C(N), E) = W^j(C(N), E')$, cualquiera que sean E y E' reales y positivos. Supongamos, por reducción al absurdo, que existen dos estados, E y E', y una matriz de referencias, C, tales que $(W^j(C(N), E))_{j \in M} \neq (W^j(C(N), E'))_{j \in M}$.

Sea $\mu = \frac{E'}{E}$ y consideremos los poliedros R y R', generados respectivamente por $\{p(c^j, E)\}_{j \in M}$ y $\{p(c^j, E)\}_{j \in M}$. Como para cada $j \in M$, $p(c^j, E') = \mu p(c^j, E)$, se tiene que R' es la proyección cónica de R ($R' = \mu R$). Entonces, como los vectores de pesos $(W^j(C(N), E))_{j \in M}$ y $(W^j(C(N), E'))_{j \in M}$ son distintos, las combinaciones convexas que generan en R y R' respectivamente (que son $f(C, E)$ y $f(C, E')$, respectivamente) no son proporcionales. Esto supone una contradicción con que la regla f es homogénea en el estado.

En segundo lugar, vamos a ver que, por invarianza en las referencias, se tiene que, para cada $j \in M$, $W^j(C(N), E) = W^j((\lambda * C)(N), E)$, cualquiera que sea el vector $\lambda \in \mathbb{R}^m_{++}$. Como para cada $j \in M$, $p(\lambda^j c^j, E) = p(c^j, E)$, tiene que cumplirse $(W^j(C(N), E))_{j \in M} = (W^j(C(N), E'))_{j \in M}$, pues en otro caso los vectores generarían combinaciones convexas distintas ($f(C, E) \neq f(\lambda * C, E)$) y eso supondría una contradicción con que f verifica invarianza en las referencias. $\square$

3.1. Agregación y actualización de probabilidades

Un caso particular en el que se aplica la regla proporcional ponderada es el problema de agregación de probabilidades que surge cuando hay varias distribuciones de probabilidad que proporcionan distintos expertos sobre un conjunto de estados de la naturaleza y se quiere obtener como resultado una única distribución de probabilidad. Por tanto, si N es el conjunto de estados de la naturaleza, M es el conjunto de expertos y C es una matriz cuyas columnas representan las distintas distribuciones de probabilidad proporcionadas por los diferentes expertos, la aplicación de la regla proporcional ponderada a este problema da como resultado una media ponderada de las distribuciones de probabilidad, lo que se conoce en la literatura como *linear opinion pool* (McConway, 1981).

En algunas ocasiones se presenta el problema de actualización de probabilidades en combinación con el problema de agregación de probabilidades. Este problema aparece cuando hay varias distribuciones de probabilidad que proporcionan distintos expertos sobre un conjunto de estados de la naturaleza, pero a su vez la situación cambia cuando aparece información de que un suceso (un subconjunto propio del conjunto de estados de la naturaleza) ocurre. Por tanto, si N es el conjunto de estados de la naturaleza, $S \subset N$ es el suceso que ha ocurrido, M es el conjunto de expertos, C es una matriz cuyas columnas representan las distintas distribuciones de probabilidad proporcionadas por los diferentes expertos y C_S es la proyección de C sobre S (matriz que resulta al eliminar de C las filas correspondientes a los agentes de $N \backslash S$), la aplicación de la regla proporcional ponderada a este problema se puede realizar de dos formas:

Una posibilidad es actualizar cada predicción y luego agregar los resultados obtenidos, $\sum_{j \in M} \alpha^j p(c_S^j, E)$. El resultado así obtenido coincide con la aplicación de la regla proporcional ponderada a la proyección, C_S, de C sobre S, es decir,

$$P^\alpha(C_S, 1) = \sum_{j \in M} \alpha^j p(c_S^j, E).$$

Otra posibilidad es agregar las predicciones mediante la regla proporcional ponderada y actualizar el resultado, obteniéndose $p((P^\alpha(C,1))_S, 1)$.

$P^\alpha(C_S, 1) \neq p((P^\alpha(C,1))_S, 1)$, como puede comprobarse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.4 *Un experto en bolsa predice una subida en el mercado con probabilidad* 0,2*; un mantenimiento de la cotización con probabilidad* 0,4 *y una bajada con probabilidad* 0,4*,* *mientras que otro experto, al que se le da la misma fiabilidad que al primero, predice otra distribución de probabilidad,* (0,5, 0,2 *y* 0,3)*. Además, una inesperada noticia en el ámbito político hace que la posibilidad de que el mercado baje quede anulada. Por consiguiente, en este ejemplo,* $N = \{1, 2, 3\}$*,* $S = \{1, 2\}$*,* $E = 1$*,* $\alpha = (0{,}5; 0{,}5)$ *y la matriz de referencias es:*

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Actualizar las dos predicciones y agregar las actualizaciones a continuación da como resultado:

$$P_1^\alpha(C_S, 1) = 0{,}5 \cdot \frac{0{,}2}{0{,}6} + 0{,}5 \cdot \frac{0{,}5}{0{,}7} \simeq 0{,}524;$$

$$P_2^\alpha(C_S, 1) = 0{,}5 \cdot \frac{0{,}4}{0{,}6} + 0{,}5 \cdot \frac{0{,}2}{0{,}7} \simeq 0{,}476.$$

Sin embargo, si se agregan primero las predicciones y luego se actualiza la agregación, se obtiene:

$$p_1((P^\alpha(C, 1))_S, 1) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}5}{0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}2} \simeq 0{,}538;$$

$$p_2((P^\alpha(C, 1))_S, 1) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}2}{0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}2} \simeq 0{,}462.$$

En las siguientes figuras se representan gráficamente los dos resultados:

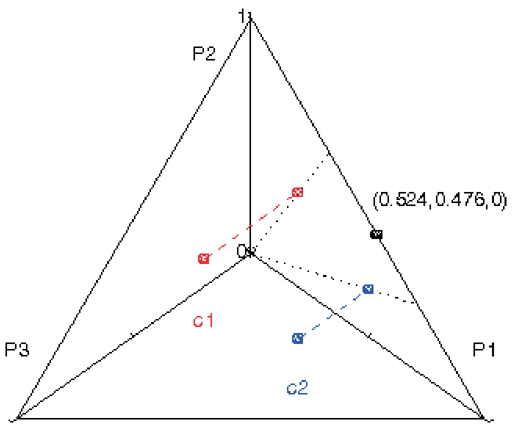

Figura 1. Actualización + agregación.

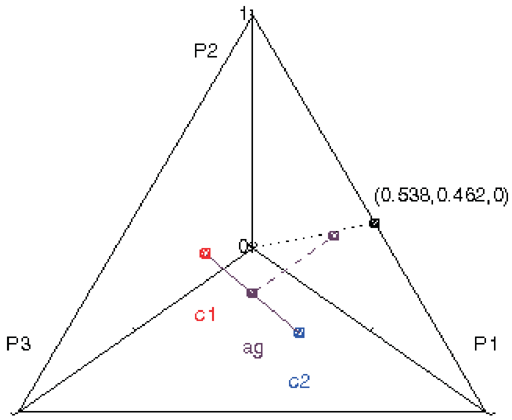

Figura 2. Agregación + actualización.

En la línea del segundo de los procedimientos expuestos arriba (agregación+actualización) y de forma similar a como se han definido las reglas de actualización de probabilidades en la Sección 2.1, pueden definirse otras reglas para este problema. A continuación se pone un ejemplo de familia de reglas.

Igual que en el caso de actualización de probabilidades, se denota por $\mathcal{P} \subseteq 2^N$ al conjunto de las posibles subconjuntos no vacíos de estados de la naturaleza que finalmente pueden ocurrir. Supondremos que $\mathcal{P}$ es no vacío. Un problema de agregación y actualización de probabilidades en este marco es una terna $(C, 1, \mathcal{P})$, donde $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tiene por columnas las distintas distribuciones de probabilidad proporcionadas por los diferentes expertos. La clase de todos los problemas de actualización de probabilidades que se asocian con el conjunto de estados de la naturaleza, N, el conjunto de referencias, M, y la estructura de subconjuntos, $\mathcal{P}$, se denota por $\mathcal{C}(N, M, \mathcal{P})$.

Una regla de reparto sobre $\mathcal{C}(N, M, \mathcal{P})$ es una función, f, que asocia con cada problema, $(C, 1, \mathcal{P}) \in \mathcal{C}(N, M, \mathcal{P})$, una asignación $x^S \in X(E)$ para cada $S \in \mathcal{P}$ de forma que $x^S_r = 0$ si $r \notin S$.

Un ejemplo de familia de reglas para este problema de agregación y actualización de probabilidades consiste en añadir a la asignación según la regla proporcional ponderada por el vector de pesos α, $P^\alpha(C, 1)$, para cada $S \in \mathcal{P}$, el reparto entre los agentes de S de la cantidad $1 - P^\alpha(C, 1)(S) = P^\alpha(C, 1)(-S)$ según una proporción β, es decir, fijado el β, la regla es

$$f^{\alpha,\beta}(C, 1, \mathcal{P}) = P^\alpha_S(C, 1) + p(1 - P^\alpha(C, 1)(S), \beta) \quad \forall\, S \in \mathcal{P},$$

donde $\beta \in \mathbb{R}^S_+$.

4. CONCLUSIONES

Los problemas de división con múltiples referencias se están estudiando cada vez más porque se ajustan de una forma adecuada a problemas reales. Estos problemas pueden ser básicamente de dos tipos. En el primer tipo de problemas, el reparto de la cantidad (generalmente insuficiente para satisfacer todas las reclamaciones) se realiza con arreglo a diferentes conceptos y, dentro de estos conceptos, cada agente recibe su asignación (por ejemplo, la Unión Europea divide su presupuesto en distintas partidas, tales como agricultura, medio ambiente, etc. y los distintos países tienen unas reclamaciones en estos diferentes conceptos). En estos problemas se procede en dos pasos: en el primero se agregan las reclamaciones de los agentes en cada concepto y se reparte la cantidad total entre los distintos conceptos con arreglo a dichas referencias agregadas y, en un segundo paso, cada una de estas asignaciones se reparten entre los agentes. Este análisis es el que se sigue en Lorenzo-Freire *et al.* (2009), Moreno-Ternero (2009) y Bergantiños *et al.* (2008, 2010).

El otro tipo de problemas es el que se aborda en este trabajo. Hay distintas referencias a tener en cuenta para obtener una asignación a los agentes (una de las posibles situaciones que se representan mediante este modelo es, por ejemplo, aquélla en la que se pide la colaboración de expertos o árbitros para valorar las necesidades de los agentes y cada experto da unas referencias distintas que se quieren tener en cuenta en el reparto). Así se aborda el problema también en los trabajos de Calleja *et al.* (2007), González-Alcon *et al.* (2007) y Ju *et al.* (2007).

La principal virtud de este segundo modelo es que acomoda diversas situaciones reales como la bancarrota, cuando la deuda se refiere a distintos activos o bienes, el reparto de incentivos o el reparto de excedentes (cuando se toman varias referencias para obtener la asignación) o también situaciones de reparto bajo incertidumbre en las que el reparto ha de realizarse sin concretarse el escenario futuro que finalmente ocurrirá.

La extensión de la idea de proporcionalidad a este nuevo modelo de reparto con referencias múltiples puede abordarse de distintas formas. En este trabajo se estudia la regla proporcional ponderada y se prueba un resultado que caracteriza esta regla como la única regla no manipulable que cumple algunas propiedades deseables.

Un caso particular de regla proporcional agregada (en el que las referencias son realmente distintas asignaciones) es la agregación de probabilidades. Si este problema de agregación se analiza en conjunción con el problema de actualización de probabilidades (alguno o algunos de los estados de la naturaleza se revela que no son posibles) resulta que no se obtiene el mismo resultado si se agregan las probabilidades iniciales y se actualiza el resultado que si se actualizan las probabilidades iniciales y se agregan dichas actualizaciones. En el primero de los casos, como la agregación de probabilidades es el resultado de aplicar la regla proporcional ponderada, lo que se obtiene es una asignación proporcional a la proyección de la probabilidad agregada; el segundo caso consiste en aplicar la regla proporcional ponderada a la proyección de las referencias o probabilidades iniciales.

El trabajo desarrollado deja abiertas otras posibles líneas futuras de investigación. En nuestro punto de mira está estudiar otras extensiones de la regla proporcional a este nuevo marco en el que hay referencias múltiples. La asignación proporcional al maximal de los vectores de referencias (podríamos decir que se adopta un punto de vista optimista en este caso) y la asignación proporcional al minimal (bajo un punto de vista pesimista) son dos posibilidades.

En el caso particular de la agregación y actualización de probabilidades, se persigue también proponer otras reglas que permitan agregar y/o actualizar probabilidades y analizar sus propiedades estadísticas en relación a la regla proporcional agregada. En particular, son interesantes las reglas que aquí se apuntan con un vector de proporcionalidad fijo.

REFERENCIAS

Bergantiños, G.; Lorenzo, L.; Lorenzo-Freire, S. (2010) "A characterization of the proportional rule in multi-issue allocation situations". *Operations Research Letters* **38**, 17–19.

Bergantiños, G.; Lorenzo, L.; Lorenzo-Freire, S. (2008) "New characterizations of the constrained equal awards rule in multi-issue allocation situations". *Mimeo, University of Vigo.*

Branzei, R.; Dimitrov, D.; Pickl, S; Tijs, S. (2004) "How to cope with division problems under interval uncertainty claims?". *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* **12**, 191–200.

Calleja, P.; Borm, P.; Hendrickx, R. (2005) "Multi-issue allocation situations". *European Journal of Operational Research* **164**, 730–747.

Chun, Y. (1988a) "The proportional solution for rights problem". *Mathematical Social Sciences* **15**, 231–246.

Gilboa, I.; Schmeidler, D. (1993) “Updating ambiguous beliefs”. *J. Econ. Theory* **59**, 33–49.

González-Alcón, C.; Borm, P.; Hendrickx, R. (2007) “A composite run to the bank rule for multi-issue allocation situations”. *Mathematical Methods of Operations Research* **65**, 339–352.

Ju, B.G.; Miyagawa, E. (2002) “Proportionality and non-manipulability in claims problems”. *mimeo.*

Ju, B.G., Miyagawa, E.; Sakai, T. (2007) “Non-manipulable division rules in claim problems and generalizations”. *Journal of Economic Theory* **132**, 1–26.

Lorenzo-Freire, S.; Casas-Méndez, B.; Hendrickx, R. (2009) “The two-stage constrained equal awards and losses rules for multi-issue allocation situations”. *Top.*

Majumdar, D. (2004) “An axiomatic charaterization of Bayes’ rule”. *Math. Soc. Sci.* **47**, 261–273.

McConway, K.J. (1981) “Marginalization and Liear Opinion Pools”. *J. Amer. Statis. Assoc.* **76**, 410–414.

Moreno-Ternero, J. (2009) “The proportional rule for multi-issue banckrupty problems”. *Economics Bulletin* **29**, 483–490.

Moulin, H. (1985b) “The separability axiom and equal-sharing methods”. *Journal of Economics Theory* **36**, 120–148.

Pulido, M.; Sánchez-Soriano, J.; Llorca, N. (2002) “Game theory techniques for university management: an extended bankruptcy model”. *Annals of Operations Research* **109**, 129–142.

Pulido, M.; Borm, P.; Hendrickx, R.; Llorca, N.; Sánchez-Soriano, J. (2008) “Compromise solutions for bankruptcy situations with references”. *Annals of Operations Research* **158**, 133–141.

Rubinstein, A.; Fishburn, P.C. (1986) “Algebraic aggregation theory”. *J. Econ. Theory* **38**, 63–77.

Thomson, W. (2003) “How to divide when there isn’t enough: from the Talmud to modern game theory”. *University of Rochester.*

Young, P. (1988) “Distributive justice in taxation”. *Journal of Economic Theory* **44**, 321–335.