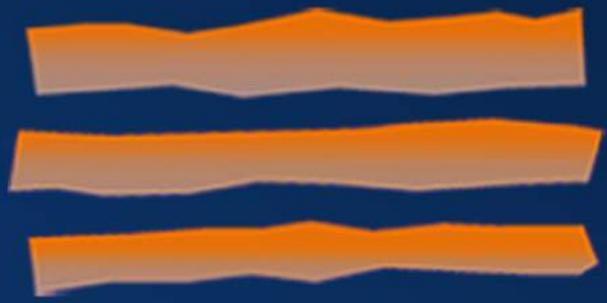


Universidad Pablo de Olavide, Sevilla



UNIVERSIDAD
PABLO DE OLAVIDE
SEVILLA

Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa



Journal of Quantitative Methods for
Economics and Business Administration

ISSN: 1886-516 X
D.L.: SE-2927-06



**REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS
PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA**

**Journal of Quantitative Methods for
Economics and Business Administration**

Número 24. Diciembre de 2017.

ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.

URL: <https://www.upo.es/revistas/index.php/RevMetCuant/index>

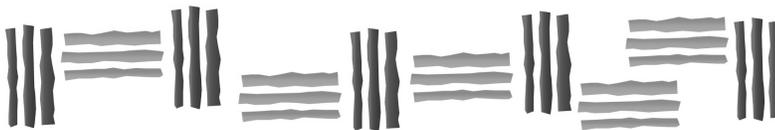
Editores:

Dr. Francisco Javier Blancas Peral
Universidad Pablo de Olavide
Ctra. de Utrera, km 1 - 41013
Sevilla (Spain).
Correo-e: fjblaper@upo.es

Dr. Ángel F. Tenorio Villalón
Universidad Pablo de Olavide
Ctra. de Utrera, km 1 - 41013
Sevilla (Spain).
Correo-e: aftenorio@upo.es

Comité Editorial:

Dr. S. Ejaz Ahmed, University of Windsor, Ontario (Canadá)
Dr. Adam P. Balcerzak, Nicolaus Copernicus University, Toruń (Polonia)
Dr. Carlos A. Coello Coello, CINVESTAV-IPN, México D.F. (México)
Dr. Ignacio Contreras Rubio, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dra. Manuela Coromaldi, University of Social Sciences UNISU, Roma (Italia)
Dr. Miguel Ángel Hinojosa Ramos, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dr. Matías Irigoyen Testa, Universidad Nacional del Sur, Buenos Aires (Argentina)
Dr. M. Kazim Khan, Kent State University, Ohio (EE.UU.)
Dr. Manuel Laguna, University of Colorado at Boulder, Colorado (EE.UU.)
Dra. María Amparo León Sánchez, Universidad de Pinar del Río (Cuba)
Dr. Jesús López-Rodríguez, Universidad de A Coruña, (España)
Dr. Cecilio Mar Molinero, University of Kent, Canterbury (Reino Unido)
Dra. Ana M. Martín Caraballo, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dra. M^a Carmen Melgar Hiraldo, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dr. Gábor Nagy, University of Kent, Canterbury (Reino Unido)
Dr. José Antonio Ordaz Sanz, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dr. Andrés Rodríguez-Pose, London School of Economics, Londres (Reino Unido)
Dr. José Manuel Rueda Cantuche, IPTS-DG J.R. Centre-European Commission
Dra. Mariagrazia Squicciarini, OECD, París (Francia)
Dra. Mariangela Zoli, Università degli Studi di Roma 'Tor Vergata', Roma (Italia)



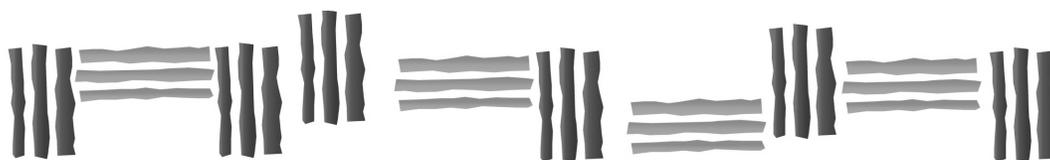
**Revisores de RevMetCuant que han autorizado su aparición en el listado
(actualizado a 1 de diciembre de 2017):**

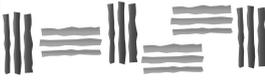
Elena Abascal Fernández	Fco. Javier Castaño Gutiérrez	Christiane Gaul
Javier Aguilera Caracuel	Guillemina Comas	Karl Geisler
S. Ejaz Ahmed	Emilio Congregado Ramírez	Nuria Gómez Sanz
Ángel Alanón Pardo	Ignacio Contreras Rubio	Roberto González Acolt
Adrian Albala	Jose Manuel Cordero Ferrera	Mercedes González Lozano
Noel Albert	Manuela Coromaldi	Nuria González Rabanal
José Tomás Alcalá Nalváiz	Pablo Coto Millán	Paula González Rodríguez
Esteban Alcaraz Vera	M ^a Dolores Cubiles de la Vega	Tomás Gutiérrez Barbarrusa
Joaquín Aldas Manzano	Fernanda Cuitiño	Germán Héctor González
Christine Amsler	Carlos Dabús	Katerina Hellström
Nieves Aquino Linares	Arnaldo Dámera Martínez	Beatriz Hernández Jiménez
Mar Arenas Parra	Antonio Félix de Amores Hernández	Antonio Hernández Moreno
M ^a Teresa Arévalo Quijada	Francisco del Olmo García	Patricia Herranz Peinado
Isabel Argimón Maza	Laura Díaz Anadón	Ainhoa Herrarte Sánchez
Millán Arroyo Menéndez	Norberto Díaz Díaz	Manuel Hidalgo Pérez
María Victoria Avilés Blanco	Harald Dolles	Miguel Ángel Hinojosa Ramos
Mercedes Ayuso Gutiérrez	Juana Domínguez Domínguez	José Manuel Hurtado González
Harold Banguero Lozano	Rosa María Domínguez Gijón	Aysa Ipek Erdogan
Víctor Bañuls Silvera	Mónica Domínguez Serrano	Matías Irigoyen Testa
Eva Barrera Algara	Rosario Espínola Vílchez	Timotej Jagric
Eduard Baumöhl	Ángel Estrada García	Diana Marcela Jiménez Restrepo
Jorge Belaire Franch	Eugenio M. Fedriani Martel	Enrique José Jiménez Rodríguez
Emma Berenger Cárceles	Fernando Fedriani Martel	Christian A. Johnson
Vanessa Berlanga Silvente	José Manuel Fera Domínguez	Sevtap Kestel
Celia Bilbao Terol	Gabriela Fernandez Barberis	Ken Kwong
Margarita Billón Currás	Ana Fernández Carazo	M.T. Lamelas Gracia
Francisco J. Blancas Peral	Melchor Fernández Fernández	Prosper Lamothe Fernández
Glenda Blaser Petarli	Javier Fernández Navas	Bárbara Larrañeta Gómez-Caminero
Carlos Bouza	Yolanda Fernández-Santos	Thanh Le Phuoc
Raúl Brey Sánchez	Luis Ferruz Agudo	M ^a Amparo León Sánchez
Rafael Caballero Fernández	Raquel Flórez López	Francisco Liñán Alcalde
Ricardo Cabana-Vilca	Oswaldo A. Fosado Téllez	María Llop Llop
Laura Cabeza García	Inmaculada Fortes Ruiz	Álvaro López Cabrales
Francisco Javier Callealta Barroso	Roberto Carlos Fortich Mesa	Begoña López Fernández
Enriqueta Camacho Peñalosa	Dolores Gallardo Vázquez	Dunia López Pintado
Jesús J. Cambra Friero	Alejandro García Cintado	Sara López Pintado
Mariano Carbonero Ruz	Alfredo García Hernández-Díaz	Jesús López Rodríguez
Clara Cardone-Riportella	José Horacio García-Marí	Ana Dolores López Sánchez
Manuel J. Caro Encalada	Anna García Masiá	Macarena Lozano Oyola
M ^a Dolores Caro Vela	José García Pérez	Alexis Lubow
Esther Carrizosa Prieto	José Félix García Rodríguez	Amaia Lusa Garcia
María Francisca Casado	Ana Gargallo Castel	Cecilio Mar-Molinero

Juan A. Marín-García
Antonio Miguel Márquez Durán
Ana M. Martín Caraballo
Alfonso José Martínez
Francisco José Martínez Estudillo
José Antonio Martínez García
José Miguel Martínez Paz
María del Carmen Martínez Serna
Camilla Mastromarco
Gregoria Mateos-Aparicio Morales
Thórólfur Matthíasson
Adolfo Maza Fernández
Iguácel Melero Polo
M^a Carmen Melgar Hiraldo
Jose Luis Miralles Quirós
Juan Ignacio Modroño Herrán
Julián Molina Luque
María Molinos Senante
Joaquin Monreal Perez
María de Jesús Moo Canul
Ignacio Moreno Gabaldón
M^a Pilar Moreno Navarro
Rafael Moreno Ruiz
Rafael Moyano Franco
Josefa Mula
Francisco Javier Muñoz Almaraz
Gábor Nagy
Julia M. Núñez Tabales
Juan Núñez Valdés
José Javier Núñez Velázquez
Jair Ojeda Joya
Joanna Olbrys Bialystok
José Antonio Ordaz Sanz
Jorge Orlando Arredondo
M^a Pópulo Pablo-Romero Gil-Delgado
Reinaldo Padrao
María Luisa Palma Martos
Concepción Paralera Morales
Douglas M. Patterson
José M. Pavía
Nelson Perera
Vicente Pérez Chamorro
Fátima Pérez García
Víctor Ernesto Pérez León
Rafael Pino Mejías
Simon Price
Tomás Prieto Rumeau

José Alejandro Quijada
Arlé Quispe Villafuerte
R.Rajasekhar
José Manuel Ramírez Hurtado
Juan Carlos Real Fernández
David Redondo Ballesteros
Hernaldo Reinoso Alarcón
Pablo Revilla Aparicio
David Alejandro Reyes Gómez
Laura Riesgo
Daniel Rivero Cebrián
María Ángeles Rodríguez Bellido
Rosario Rodríguez Guiñolo
Jesús Rodríguez López
Natividad Rodríguez Masero
Inmaculada Rodríguez Puerta
Carlos Vladimir Rodríguez-Caballero
Inmaculada Romano Paguillo
Diego Romero de Ávila Torrijos
Francisco Javier Rondán Cataluña
Dario Alejandro Rossignolo
Carmen Rubio Castaño
José Manuel Rueda Cantuche
David Ruggeri
Rocío Ruiz Benítez
Jose Luis Ruiz Vergara
Francisco Javier Sáez Fernández
Ramón Sala Garrido
Sixto Sánchez Merino
Ana María Sánchez Sánchez
Francisca J. Sánchez Sánchez
Manuel J. Sánchez Sánchez
Luis Vicente Santana Quintero
Alejandro Smolje
Mariagrazia Squicciarini
M^a Manuela Segovia González
María Semitiel García
Pedro Serrano
Yudayly Stable-Rodríguez
Phillip L. Swagel
María T. Tascón Fernández
Macarena Tejada Tejada
Cecilia Téllez Valle
Ángel F. Tenorio Villalón
Fernando Tohmé
Alicia Troncoso Lora
Antonio Trujillo Ponce

Efthymios G. Tsionas
Carlos Usabiaga Ibáñez
Ana Utrillas Acerete
Guadalupe Valera Blanes
Laura Varela Candamio
María José Vázquez Cueto
Esther Velázquez Alonso
Francisco Venegas-Martínez
María Victoria Verdugo Matés
Xavier Vilà Carnicero
Esmeralda Villegas
M^a del Pilar Zarzosa Espina





Predicción de fracaso en empresas latinoamericanas utilizando el método del vecino más cercano para predecir efectos aleatorios en modelos mixtos

CARO, NORMA PATRICIA

Facultad de Ciencias Económicas

Universidad Nacional de Córdoba (Argentina)

Correo electrónico: pacaro@eco.unc.edu.ar

ARIAS, VERÓNICA

Facultad de Ciencias Económicas

Universidad Nacional de Córdoba (Argentina)

Correo electrónico: varias@eco.unc.edu.ar

ORTIZ, PABLO

Facultad de Ciencias Económicas

Universidad Nacional de Córdoba (Argentina)

Correo electrónico: pabort@eco.uncor.edu

RESUMEN

En la presente década, en economías emergentes como las latinoamericanas, se han comenzado a aplicar modelos logísticos mixtos para predecir el fracaso financiero de las empresas. No obstante, existen limitaciones subyacentes a la metodología, vinculadas a la factibilidad de predicción del estado de nuevas empresas que no han formado parte de la muestra de entrenamiento con la que se estimó el modelo.

En la literatura se han propuesto diversos métodos de predicción para los efectos aleatorios que forman parte de los modelos mixtos, entre ellos, el del vecino más cercano. Este método es aplicado en una segunda etapa, luego de la estimación de un modelo que explica la situación financiera (en crisis o sana) de las empresas mediante la consideración del comportamiento de sus ratios contables.

En el presente trabajo, se consideraron empresas de Argentina, Chile y Perú, estimando los efectos aleatorios que resultaron significativos en la estimación del modelo mixto.

De este modo, se concluye que la aplicación de este método permite identificar empresas con problemas financieros con una tasa de clasificación correcta superior a 80%, lo cual cobra relevancia en la modelación y predicción de este tipo de riesgo.

Palabras claves: fracaso empresarial; ratios contables; modelos mixtos; predicción; vecino más cercano.

Clasificación JEL: M41; C53; C40.

MSC2010: 62H10; 62P05; 91G70.

Artículo recibido el 19 de abril de 2016 y aceptado el 21 de abril de 2017.

Prediction of Failure in Latin-American Companies Using the Nearest-Neighbor Method to Predict Random Effects in Mixed Models

ABSTRACT

In the present decade, in emerging economies such as those in Latin-America, mixed logistic models have been started applying to predict the financial failure of companies. However, there are limitations for the methodology linked to the feasibility of predicting the state of new companies that have not been part of the training sample which was used to estimate the model.

In the literature, several methods have been proposed for predicting random effects in the mixed models such as, for example, the nearest neighbor. This method is applied in a second step, after estimating a model that explains the financial situation (in crisis or healthy) of companies by considering the behavior of its financial ratios.

In this study, companies from Argentina, Chile and Peru were considered, estimating the random effects that were significant in the estimation of the mixed model.

Thus, we conclude that the application of these methods allow for identifying companies with financial problems with a correct classification rate of over 80%, which becomes important in modeling and predicting this risk.

Keywords: business failure; accounting ratios; mixed model; prediction; nearest neighbors.

JEL classification: M41; C53; C40.

MSC2010: 62H10; 62P05; 91G70.



1. Introducción

El fracaso empresarial es un tema de interés en el mundo, particularmente cuando se llega a situaciones desfavorables críticas, como lo es el cierre de una empresa, debido a las importantes consecuencias negativas que puede conllevar tanto desde el punto de vista económico como social.

Esto ha suscitado el interés por anticiparse a tales situaciones a través del diagnóstico de estos eventos, cobrando relevancia la información subyacente de los estados contables.

Precisamente, la información financiera ha sido de fundamental importancia para identificar el estado de crisis de las empresas a partir de las cuales se han desarrollado las diferentes investigaciones. En el presente trabajo, para modelar la situación financiera (en crisis o sana) de las empresas mediante la consideración del comportamiento de sus ratios contables, se aplica un modelo logístico mixto. En estos modelos, los efectos aleatorios son estimados individualmente para cada empresa. Avanzando en este sentido, se plantea como objetivo principal de este trabajo la predicción de los efectos aleatorios, ya que constituyen un problema debido a la dificultad en la clasificación de nuevas empresas (que no forman parte de la muestra de estimación) del estado de crisis financiero de las mismas. A raíz de esto, Tamura y Giampaoli (2013) y Tamura, *et al.* (2013) desarrollaron y aplicaron métodos de estimación que permiten completar el procesamiento y predecir la crisis en nuevas empresas.

En este trabajo se propone avanzar hacia un análisis completo de la vulnerabilidad empresarial de empresas en países latinoamericanos, particularmente sudamericanos, incluyendo la predicción del efecto aleatorio para nuevas unidades. Se aplica el método del vecino más cercano para predecir el efecto aleatorio de nuevas empresas y se compara con los resultados obtenidos cuando se supone que el efecto aleatorio es nulo (método *naive*). El análisis se realiza sobre empresas de Argentina, Chile y Perú. Las economías latinoamericanas han experimentado un sólido crecimiento a lo largo de la década de 2000, impulsado por la sostenida demanda externa (especialmente de economías emergentes como China), en conjunción con un importante crecimiento de los precios de los productos primarios (alcanzando niveles históricos) y con demandas internas muy dinámicas. Estos factores propiciaron un crecimiento de la región a un ritmo anual promedio de casi el 5%

durante el período 2003-2008. Por otro lado, este contexto estuvo acompañado de una adecuada gestión macroeconómica: entre 2000 y 2007, los países de la región pudieron reducir en promedio sus deudas públicas en 15 puntos porcentuales y pasar de un déficit fiscal de 2.4% del PIB a un superávit de 0.4% (OECD, 2010; CEPAL, 2011; OECD/ECLAC, 2011, 2012). La relativa estabilidad macroeconómica alcanzada y la notable mejora de los términos de intercambio en Latinoamérica proveyeron de importantes recursos para que los gobiernos latinoamericanos lleven adelante políticas tendentes a mitigar la pobreza y facilitar el acceso a los servicios públicos. Esta expansión continua fue interrumpida tras la crisis financiera de 2008-2009, aunque la solidez alcanzada en los años anteriores permitió a los gobiernos de la región desplegar una intensa actividad contracíclica, propiciando que el impacto de la crisis fuese menos profundo y la recuperación más acelerada que en los países desarrollados. En el corto plazo, la crisis impactó a los países de Latinoamérica a través de la disminución de los flujos comerciales globales, los cuales pudieron recuperarse apuntaladas por las economías emergentes. No obstante, tras la recuperación económica global a partir de 2010, en los últimos años el ritmo de crecimiento nuevamente mostró debilitamiento, lo que se tradujo en el deterioro de la demanda global con una consecuente caída en los precios de las exportaciones de los países latinoamericanos y una desaceleración de sus economías. Particularmente, a la baja *performance* de las economías desarrolladas se le sumó la ralentización de China e India, que han sido un motor importante para el crecimiento global y de Latinoamérica en particular. Al contexto externo se le suma que la demanda interna no mantuvo su desempeño debido a que, tras las altas tasas de crecimiento de la década, la brecha del producto se ha cerrado en muchos países de la región. A modo de ejemplo, Chile, Colombia y Perú convergen a su producto potencial desde niveles ligeramente superiores; aunque economías como Argentina, Brasil y Venezuela tuvieron una desaceleración que ha llevado sus niveles de actividad incluso por debajo de su potencial.

El análisis se realiza sobre empresas de Argentina, Chile y Perú. La elección de estos países se debe a que son algunos de los más representativos de la región. Los países latinoamericanos no considerados en este estudio se deben a que no poseen Bolsa de Valores (como en el caso Uruguay) o bien no se cuenta con el dato de vulnerabilidad financiera para poder realizar el presente estudio (como es el caso de Brasil).

En la siguiente sección, se realiza una breve presentación de antecedentes. Luego se describen tanto la muestra seleccionada como las variables medidas, para continuar con la aplicación de técnicas de análisis y herramientas estadísticas que nos permitirán evaluar si la información contable es útil para predecir el fracaso empresarial. Finalmente, se exponen los resultados obtenidos, las conclusiones y unas consideraciones generales sobre el trabajo desarrollado.

2. Antecedentes

Los primeros estudios con rigor estadístico se realizaron en el marco del análisis univariado (Beaver, 1968). Altman (1968) incursiona en métodos multivariados capaces de captar la estructura multidimensional de las empresas, centrandó la atención en el análisis discriminante múltiple. En Caro (2014), se presenta una revisión de la literatura presentando modelos de predicción de crisis que se construyeron en economías desarrolladas y en economías emergentes, aplicando diferentes métodos estadísticos.

Es en la década de 1960 cuando surgen los primeros estudios ante la necesidad de contar con modelos que permitan pronosticar las situaciones de crisis financieras (Altman, 1968). En ellos, la metodología aplicada se basaba en un diseño apareado de empresas y se utilizaron métodos de discriminación lineal y cuadrática. En la década de 1980 aparecen los primeros cuestionamientos al diseño apareado, por ser no aleatorio (Ohlson, 1980; Zmijewski, 1984), y se avanza en la modelación con regresión logística o modelo probit.

Debido a la importancia de incorporar la historia de cada empresa, se comenzaron a aplicar modelos para datos longitudinales, como es el modelo logístico mixto, que incorpora en su análisis los balances de cada empresa en un horizonte temporal. En este sentido, Jones y Hensher (2004) demuestran que el modelo logístico mixto supera ampliamente la *performance* del modelo logístico estándar. Jones y Hensher (2007), luego de obtener conclusiones válidas importantes con la aplicación del modelo mixto, completan su primera investigación aplicando el modelo logit anidado multinomial y realizan una comparación con el logit estándar y el logit mixto. Por último, Hensher y Jones (2007) mencionan que los recientes estudios realizados (Jones y Hensher, 2004, 2007) han introducido un sustento teórico y econométrico utilizando modelos de probabilidad avanzados, tales como modelos logit anidados, logit mixtos, multinomial de clase latente y

logit de componente de error, avanzando en el tema aplicando métodos de optimización en la estimación del modelo.

Altman (1968) y Jones y Hensher (2004) son los principales antecedentes en cuanto a esta temática y a la metodología que se aplica. Esta línea de investigación se ha visto enriquecida por los numerosos aportes de diversos autores en torno a nuevos enfoques que han contribuido, por un lado, a mejorar los resultados de los modelos propuestos, reflejada en una importante evolución en el concepto de crisis financiera, las variables empleadas en los modelos y las metodologías (Tascón y Castaño, 2012); y, por otro lado, a investigar el comportamiento de las empresas en economías emergentes (Caro *et al.*, 2013; Caro, 2015).

Altman fue uno de los primeros en adaptar sus modelos a fin de poder aplicarlos en otros países tanto desarrollados como en economías emergentes (Altman *et al.*, 1977). En Latinoamérica surgieron así nuevos trabajos de investigación (Altman *et al.*, 1977; Altman *et al.*, 1979; Pascale, 1988; Swanson y Tybout, 1988; Chocce *et al.*, 2002; Sandin y Porporato, 2008; Zurita, 2008; Montalván *et al.*, 2011; Caro *et al.*, 2013; Caro, 2015) con el objetivo de estudiar el comportamiento de los indicadores contables para predecir el riesgo de insolvencia.

Por un lado, existe una vasta literatura que aplica, en diferentes investigaciones, metodología de corte transversal, lo que no se considera adecuado si se incorporan observaciones de varios períodos de tiempo (estados contables) de cada una de las empresas, donde el supuesto de independencia no se cumple. El interés por abordar esta temática se extiende a países no desarrollados. En un primer lugar, se aplican los modelos de Altman (1968) a economías emergentes sin adaptación alguna, siendo que se trata de ambientes económicos y legales con comportamientos empresariales diferentes. Por tal motivo, Altman (2005) desarrolla el modelo *Emerging Market Scoring (EMS)* como una herramienta que permite determinar una calificación para empresas en economías emergentes a partir de una serie de ajustes a los modelos aplicados en Estados Unidos. De esta forma, un inversor puede evaluar el valor relativo de los créditos en estas economías. En una primera instancia, el modelo Z Score (Altman *et al.*, 1998) se aplicó a empresas mexicanas y luego se practicaron ajustes a efectos de considerar la vulnerabilidad de la empresa a devaluaciones corrientes, al sector al que pertenece y a su posición competitiva en la industria.

En cuanto a los países considerados en el presente trabajo, las principales investigaciones realizadas con aplicación de modelos mixtos han indicado que las ratios financieras de rentabilidad, el flujo de fondos, el endeudamiento, el volumen de ventas y el capital de trabajo han sido significativos para estimar el estado de las empresas (Caro *et al.*, 2013; Caro y Díaz, 2015; Giampaoli *et al.*, 2016; Caro, 2016). No obstante, cabe destacar que ninguno de los modelos construidos, aplicando la metodología que se considera adecuada para este fin, ha podido completar la predicción del estado de fracaso con la finalidad de validar los resultados en nuevas empresas. Esto se debió a que no se había desarrollado un método para ello, siendo Tamura *et al.* (2013) y Tamura y Giampaoli (2013)¹ quienes comienzan con el desarrollo de estos métodos.

3. Muestra y variables

Las unidades de análisis son empresas que cotizan en las Bolsas de Valores respectivas de cada uno de los países que constituyen la presente investigación: Argentina, Chile y Perú, durante el período comprendido entre 2000 y 2011². Del total de empresas cotizantes se seleccionó una muestra representativa de la población para constituir una muestra de entrenamiento, utilizada para ajustar el modelo logístico mixto, y una muestra de validación para la predicción sobre nuevas unidades.

Otro criterio tomado en cuenta en la selección de la muestra, es la inclusión de empresas en crisis y empresas sanas. Por ello, la muestra cuenta con empresas que informan el estado de crisis financiera, ya sea por suspender la cotización de sus acciones o bien por cotizar en ruedas reducidas (sanción que la Bolsa le impone cuando poseen signos de vulnerabilidad financiera, como altas pérdidas o cesación de pagos, entre otras) o encontrarse en procesos judiciales de concurso preventivo o de quiebra. Dado que la cantidad de empresas en crisis no es muy numerosa, se ha incorporado a la mayoría de ellas en la muestra, mientras que las empresas sanas constituyeron una muestra aleatoria del total de empresas sanas de la población.

¹Presentado en el *28th International Workshop on Statistical Modeling*.

² En el caso de Argentina, el horizonte temporal fue desde 2003 a 2011, a fin de no incluir la crisis del 2001 y unificar el análisis en un período de estabilidad económica.

Para cada una de las empresas en crisis se tomaron como mínimo dos años previos a la manifestación del estado de crisis, contemplando hasta seis períodos, según la disponibilidad de la información.

A los fines de la estimación del estado de las empresas, las mismas se consideraron según presentasen crisis financiera o no. Este estado (en crisis o sanas) constituye la variable dependiente (véase Tabla 1).

Tabla 1. Cantidad de empresas en cada muestra por país y estado

Países	Entrenamiento		Validación	
	Sanas	En crisis	Sanas	En crisis
Argentina	31	13	8	4
Chile	89	22	37	11
Perú	37	13	39	1

Si bien la cantidad de empresas cotizantes en países latinoamericanos no es numerosa, el hecho de trabajar con datos anuales de cada empresa, incrementa la cantidad de observaciones para estimar los modelos.

Las variables independientes utilizadas, siguiendo a Caro *et al.* (2013), son los ratios financieras que se calculan con los estados contables de publicación al cierre de ejercicio (véase Tabla 2).

Tabla 2. Descripción de las variables utilizadas en el modelo

Variable	Forma de cálculo	Elementos del Ratio	Interpretación
Ratio de flujo de fondos (FF_AT)	$FF_AT = (FFO/AT)*100$	FFO: flujo de fondos generado por las operaciones AT: activo total	Mide la posición de efectivo originado por las operaciones respecto al total del activo.
Ratio de liquidez (E_AT)	$E_AT = (E/AT)*100$	E: disponibilidades (efectivo e inversiones que se convierten en efectivo dentro de las 24 hs.) AT: activo total	Representa la relación entre los recursos más líquidos de la empresa con respecto al total del activo.
Ratio de rotación sobre activo total (V_AT)	$V_AT = (V/AT)*100$	V: total de ventas AT: activo total	Expresa la eficiencia con que la empresa puede usar sus activos para generar ventas.
Ratio de endeudamiento (D_PN)	$D_PN = (D/PN)*100$	D: total de deudas PN: patrimonio neto	Mide la relación de las deudas (capital de terceros) por cada peso de capital aportado por los dueños de la empresa.
Ratio de capital de trabajo (CT_AT)	$CT_AT = (CT/AT)*100$	CT: capital de trabajo (activo corriente menos pasivo corriente) AT: activo total	Expresa el grado de fluidez del activo total e indica en qué medida la inmovilización del activo total resulta neutralizada por el capital de trabajo.
Ratio de rentabilidad económica (GE_AT)	$GE_AT = (Uai/AT)*100$	Uai: utilidad antes de intereses e impuestos AT: activo total	Mide la rentabilidad en función de las ganancias de la explotación.

4. Método

Con el objetivo de modelar la situación financiera (en crisis o sana) de las empresas mediante la consideración del comportamiento de sus ratios contables, se utilizó un modelo logístico mixto.

Los problemas con respuesta dicotómica son modelados usualmente a través de regresión logística, donde la probabilidad de que la variable respuesta asuma el valor 1 (empresa en crisis) es:

$$E(y_i / x_i) = \Pr(y_i = 1 / x_i) \quad i = (1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

$$\Pr(y_i = 1 / x_i) = h(\beta_1 + \beta_2 x_i) = h(z_i) \quad i = (1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

donde β_i son los coeficientes de la regresión.

La transformación logit es:

$$\text{logit} \{ \Pr(y_i = 1 / \mathbf{x}_i) \} = \ln \left\{ \frac{\Pr(y_i = 1 / \mathbf{x}_i)}{1 - \Pr(y_i = 1 / \mathbf{x}_i)} \right\} = z_i. \quad (3)$$

donde:

y_i : variable que representa el estado (1: en crisis; 0: sana);

\mathbf{x}_i : covariables.

En el presente trabajo, los datos utilizados son las observaciones y mediciones presentadas por cada empresa a través del tiempo, constituyendo un panel de datos (datos longitudinales). Estos cuentan con una estructura jerárquica (empresas medidas repetidamente en el tiempo), sin cumplirse el supuesto de independencia necesario en la regresión logística tradicional. Esta situación se resuelve con la utilización del modelo logístico mixto, en el que se distinguen efectos fijos y aleatorios. Los fijos tienen como finalidad comparar los resultados de la variable dependiente para los distintos valores de las variables independientes; mientras que los efectos aleatorios analizan la variabilidad no explicada por la respuesta.

La estructura del modelo es:

$$Y_{ij} = \mathbf{X}'_{ij} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}'_{ij} \mathbf{b}_i + e_{ij} \quad (4)$$

donde el primer término hace referencia a los efectos fijos, cuyo vector $\boldsymbol{\beta}$ está formado por los parámetros de las variables independientes (\mathbf{X}_i) que se estiman; el segundo término

corresponde a los efectos aleatorios (\mathbf{b}), con su matriz de diseño (\mathbf{Z}_i), que siguen una distribución normal donde se explicita una estructura de varianza (G):

$$\mathbf{b}_j \sim N(\mathbf{0}, G) \quad (5)$$

y, por último, el término de error asociado a todo modelo.

En cada uno de los mercados analizados, se aplica un modelo logístico mixto con dos efectos aleatorios. En estos modelos, los efectos aleatorios son estimados individualmente para cada empresa, por lo que no es posible hacer predicción directamente para el caso de nuevas unidades, pues no se conocen esos valores.

El modelo aplicado en este trabajo es:

$$Y_{ij} = \beta_0 + (\beta_1 + b_{1j})GE_{ATij} + (\beta_2 + b_{2j})FF_{ATij} + \beta_3E_{ATij} + \beta_4V_{ATij} + \beta_5D_{PNij} + \beta_6CT_{ATij} \quad (6)$$

donde:

β_k es el coeficiente que representa los k efectos fijos del modelo, siendo k el número de variables independientes X_k ;

b_{kj} es el k -ésimo efecto aleatorio de la empresa j ;

X_{kij} es la k -ésima variable independiente correspondiente al período i de la empresa j . Por ejemplo, $X_{1ij} = GE_{ATij}$ es el índice de rentabilidad en el período i de la empresa j , y así con cada uno de los indicadores mencionados en la Tabla 2;

ε_{ij} es el término de error.

Los efectos aleatorios siguen una distribución normal:

$$\mathbf{b}_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \end{bmatrix} / \mathbf{x}_{ij} \sim N_2(0, \Psi) ; \Psi = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Nuevos métodos fueron propuestos por Tamura *et al.* (2013) y Tamura y Giampaoli (2013) para predecir los efectos aleatorios de nuevas observaciones. Uno de ellos es el método de predicción por regresión lineal (LRPM) desarrollado por Tamura *et al.* (2013) para un modelo logístico mixto con k efectos aleatorios. Esta metodología considera el ajuste de un modelo de regresión para predecir los efectos aleatorios con base al conjunto de datos de la muestra de entrenamiento.

Este modelo considera que la variable respuesta son los efectos aleatorios que se pretenden predecir ($\hat{\alpha}_i$), de cada i -ésima empresa de la muestra de entrenamiento. En lo sucesivo, los parámetros estimados de esos modelos de regresión son usados para predecir el efecto aleatorio para una nueva empresa (l), que no pertenece al conjunto de entrenamiento.

Luego de obtener las estimaciones, a través del modelo mixto, es necesario que las covariables disponibles a nivel de observación (período anual) sean agregadas a nivel de grupo (empresa). Para ello, se puede calcular el promedio, la mediana o bien tomar el valor mínimo o el máximo.

Se considera, para cada m -ésimo efecto aleatorio estimado, un modelo capaz de explicar la relación entre las covariables y los efectos aleatorios de la forma:

$$\hat{\alpha}_{mi} = w_{mi}^t \lambda_m + \varepsilon_{mi} \quad \text{con } \varepsilon_{mi} \sim N(0, \sigma_m^2) \text{ independientes}; \quad (8)$$

donde:

λ_m es el vector de coeficientes de regresión desconocidos;

w_{mi} es el vector de covariables de cada empresa y cada efecto aleatorio, agregado a nivel de empresa.

Así, es posible predecir la probabilidad de respuesta de un j -ésima observación dentro de una m -ésima nueva empresa, usando la función logística del modelo mixto.

Este método no se presenta en la aplicación empírica debido a la falta de cumplimiento de los supuestos de la regresión lineal múltiple (independencia de residuos, normalidad y homoscedasticidad).

Otro método propuesto por Tamura *et al.* (2013), que es el que se aplica en este trabajo, es el método de predicción del vecino más cercano considerando el modelo logístico mixto con k efectos aleatorios. La ventaja de esta técnica es que no requiere distribución alguna para los efectos aleatorios.

Este método es una técnica no paramétrica, comúnmente utilizada en clasificación supervisada. Para la predicción de los efectos aleatorios de las nuevas empresas, se consideran los valores conocidos de estos efectos de sus vecinos más cercanos.

Al tratarse de una variable continua, es necesario considerar alguna medida de centralidad (media, mediana u otra) para realizar la imputación del valor correspondiente.

Se selecciona la cantidad de vecinos a considerar de manera que se maximice la *performance* de predicción del modelo mixto.

Siguiendo a Tamura *et al.* (2013) se calculan las distancias (euclídea, de Mahalanobis, *City Block* u otra) entre las nuevas empresas (base de validación) y aquellas con efectos aleatorios conocidos (base de entrenamiento), considerando su vector de características \mathbf{g} .

Para $i'=1, \dots, q'$, donde $i' \in Q'$ (siendo Q' el conjunto de empresas de la base de validación) e $i=1, \dots, q$, donde $i \in Q$ (siendo Q el conjunto de empresas de la base de entrenamiento), se computan las distancias $d(i', i)$ entre $g_{i'}$ y g_i , y luego se ordenan las distancias de manera creciente:

$$d(i', .) = (d(i', 1.), d(i', 2.), \dots, d(i', q)) \quad (9)$$

Posteriormente se computan medidas de centralidad para los efectos aleatorios conocidos correspondientes a los l primeros elementos de las distancias ordenadas:

$$\hat{\alpha}_{mi'}^* = (\hat{\alpha}_{m1}, \hat{\alpha}_{m2}, \dots, \hat{\alpha}_{ml}) \quad (10)$$

Finalmente, se introducen los efectos aleatorios en el predictor lineal de la regresión logística mixta, haciendo posible la predicción de la probabilidad de crisis para la nueva empresa.

5. Resultados

En una primera etapa, se realiza un análisis descriptivo de las empresas que constituyen la muestra, lo que se refleja en la Tabla 3. Las empresas en crisis presentan menores niveles de rentabilidad, flujo de fondos, efectivo, volumen de negocio, capital de trabajo, en promedio, que las empresas sanas. Por otro lado, el nivel de endeudamiento promedio es mayor en las empresas en crisis. Estos indicadores poseen valores extremos, lo que hace que su variabilidad sea elevada; por ello, como medida representativa se analizaron las medianas obteniendo iguales conclusiones entre empresas con problemas y sin ellos.

Tabla 3. Análisis descriptivo de las variables utilizadas en el modelo logístico mixto según país y estado de las empresas (muestra de entrenamiento)

Variable		Argentina		Chile		Perú	
		Sanas	En crisis	Sanas	En crisis	Sanas	En crisis
GE_AT	Media	1,24	-10,71	6,41	-10,11	17,66	0,74
	Desv. típica	6,59	23,57	10,74	31,31	17,18	6,41
	Mediana	0,80	-8,30	5,94	-1,36	13,05	0,78
	Min.	-17,53	-128,54	-147,35	-271,55	-27,76	-21,95
	Max.	38,25	36,71	85,99	21,80	90,57	20,41
FF_AT	Media	7,25	-1,22	9,36	-9,28	14,39	2,75
	Desv. típica	9,60	23,05	9,82	36,92	13,23	4,87
	Mediana	7,54	3,55	8,27	-0,72	11,95	1,87
	Min.	-64,51	-126,99	-29,89	-266,70	-21,41	-10,05
	Max.	34,58	25,12	126,01	83,33	64,74	17,65
E_AT	Media	2,46	1,95	1,07	1,01	9,30	1,19
	Desv. típica	3,94	4,49	2,72	2,61	12,51	2,23
	Mediana	1,39	0,55	0,43	0,36	3,98	0,48
	Min.	0,01	0,00	0,00	0,00	0,11	0,00
	Max.	51,86	31,38	34,07	25,73	64,12	13,72
V_AT	Media	86,24	35,83	57,64	33,04	78,43	44,91
	Desv. típica	68,54	39,66	53,89	38,12	47,79	56,96
	Mediana	73,68	23,57	50,71	23,39	68,56	23,98
	Min.	0,06	-12,46	0,00	0,00	2,81	1,80
	Max.	374,85	117,35	85,99	21,80	285,67	286,41
D_PN	Media	82,11	241,31	70,36	371,66	67,88	311,31
	Desv. típica	68,49	373,87	58,43	2018,65	45,68	908,67
	Mediana	64,62	133,52	56,97	64,87	60,22	87,01
	Min.	0,02	0,25	0,06	0,04	5,17	26,46
	Max.	451,88	2020,31	419,94	21167,50	219,23	6491,88
CT_AT	Media	10,72	-24,25	11,98	11,69	18,05	-3,93
	Desv. típica	20,66	71,09	14,39	36,63	18,39	19,28
	Mediana	7,12	-0,31	7,84	4,46	14,00	-0,25
	Min.	-65,27	-263,85	-18,77	-90,85	-32,98	-66,37
	Max.	66,35	44,49	93,09	99,95	68,51	36,25

La Tabla 4 muestra los resultados obtenidos con el modelo logístico mixto para cada uno de los países (Argentina, Chile y Perú). La rentabilidad económica (GE_AT), con signo negativo, fue el único ratio que resultó estadísticamente significativo en los tres países. El flujo de fondos (FF_AT) resultó significativo en Argentina y Chile, mientras que la liquidez (E_AT) lo fue en Perú. Tanto la rotación del activo total (V_AT) como el endeudamiento (D_PN) fueron significativos para el caso Argentina y Chile, siendo este último ratio significativo también para Perú. Finalmente, el capital de trabajo (CT_AT) resulta un ratio estadísticamente significativo en Chile y Perú, pero no así en Argentina.

Sólo los índices de rentabilidad GE_AT y de flujo de fondos operativo FF_AT resultaron tener una amplia variabilidad y ser significativos para representar la

heterogeneidad no observada (véase Tabla 5). Los datos fueron procesados con el procedimiento nlmixed del *software* SAS³.

Tabla 4. Resultados del modelo mixto para cada país (realizado a partir de la información de las empresas que conforman las bases de entrenamiento)

Variable	Argentina		Chile		Perú	
	Estimador (error estándar)	p-valor	Estimador (error estándar)	p-valor	Estimador (error estándar)	p-valor
Constante	1,227 (0,901)	0,181	-1,405 (0,449)	0,002***	1,519 (1,178)	0,203
GE_AT	-0,162 (0,092)	0,086*	-1,225 (0,314)	0,000***	-0,591 (0,235)	0,016**
FF_AT	-0,269 (0,121)	0,032**	-0,425 (0,123)	0,001***	-0,132 (0,141)	0,356
E_AT	0,364 (0,233)	0,126	-0,092 (0,075)	0,224	-0,536 (0,255)	0,041**
V_AT	-0,076 (0,022)	0,001***	-0,010 (0,005)	0,079*	-0,012 (0,016)	0,478
D_PN	0,015 (0,007)	0,031**	0,011 (0,004)	0,005***	0,022 (0,012)	0,080*
CT_AT	0,008 (0,011)	0,481	0,043 (0,016)	0,009***	-0,169 (0,072)	0,022**

Efectos aleatorios para Argentina, Perú y Chile (GE_AT, FF_AT).

Nota: error estándar entre paréntesis.

*** Significativo al 0,01; ** Significativo al 0,05; * Significativo al 0,10.

Tabla 5. Pruebas de razón de verosimilitud para determinar significatividad de los efectos aleatorios para cada país (realizado a partir de la información de las empresas que conforman las bases de entrenamiento)

Modelo propuesto	Argentina			Chile			Perú		
	-2log(verosimilitud)	Dif*	p-valor	-2log(verosimilitud)	Dif*	p-valor	-2log(verosimilitud)	Dif*	p-valor
(A) Un efecto aleatorio	112,7			276,6			85,2		
(B) Dos efectos aleatorios	105,3	7,4	0,0033	230,9	45,52		76,5	8,7	0,0032

*Dif: diferencia entre $-2\log(\text{verosimilitud})$ del modelo propuesto (B) con dos efectos aleatorios, GE_AT y FF_AT, y del modelo de referencia (A) con un efecto aleatorio, GE_AT.

Para la predicción del efecto aleatorio para nuevas empresas se probó el método de regresión lineal, pero no resultó apropiado para el problema considerado en el presente trabajo, ya que las covariables disponibles no resultaron significativas y no se cumplían los supuestos del modelo de regresión lineal (normalidad de los errores, independencia y homoscedasticidad).

³ Statistical Analysis System (sistema integrado realizado por SAS Institute Inc.)

Se empleó el método de predicción del vecino más cercano basado en la distancia euclídea de las nuevas empresas a los vectores de covariables (ratios) de las que contribuyeron a la construcción del modelo mixto, agregando los datos de distintos períodos a nivel de empresas a través de la mediana.

Se definió como medida de centralidad (predicción) de los efectos aleatorios de las nuevas empresas correspondientes a la base de validación, la media de los efectos aleatorios conocidos de las empresas de la base de entrenamiento elegidas como vecinos más cercanos de las empresas nuevas.

Para medir la *performance* del modelo, en la clasificación de nuevas empresas *en sanas* o *en crisis*, se comparó la clasificación binaria observada versus la clasificación estimada por el modelo en el punto de corte. El punto de corte fue definido como aquel donde la sensibilidad iguala a la especificidad en la base de entrenamiento de cada país. En base a esto se calcularon medidas de sensibilidad (verdaderos positivos entre la suma de falsos negativos y verdaderos positivos), especificidad (verdaderos negativos entre la suma de verdaderos negativos y falsos positivos) y tasa de clasificación correcta (la división de la suma de verdaderos positivos y verdaderos negativos entre el total de observaciones).

Estas medidas fueron calculadas según la clasificación de empresas de la base de validación que surgió del modelo con los efectos aleatorios estimados por el método del vecino más cercano y para el modelo que considera solo efectos fijos (sin estimación de los efectos aleatorios) o método *naive* (véase Tabla 6).

En todos los casos, la tasa de clasificación correcta fue muy buena, superando el 80% en el caso de Argentina y Perú, y el 90% en Chile. En el caso de Perú, el hecho de que la muestra de validación solo posea una única empresa en crisis hace que sea difícil detectarla. Para el caso de Argentina, la clasificación de las empresas nuevas utilizando el modelo con el efecto aleatorio estimado mediante el método del vecino más cercano, mejoró la especificidad y la tasa de clasificación correcta. En el caso de Chile, las medidas se mantienen entre uno y otro método. No es conveniente interpretar estas tasas en Perú, debido a que se trata de una única empresa en crisis en la muestra de validación.

De este modo, el método del vecino más cercano resulta útil para clasificar una nueva observación (empresa). Adicionalmente, cabe remarcar la pertinencia de trabajar de manera separada con cada país, dada las diferencias obtenidas en las estimaciones que

resultaron significativos en cada uno de ellos, aunque sus efectos aleatorios fueron los mismos en todos los países.

Tabla 6. *Medidas de performance del modelo por país (bases de validación)*

Método	País	Argentina	Chile	Perú
Vecino más cercano	Especificidad	0,75	0,89	0,85
	Sensibilidad	1	0,91	0
	Tasa de clasificación correcta	0,83	0,90	0,85 ⁴
Naive	Especificidad	0,75	0,89	0,92
	Sensibilidad	0,75	0,91	0
	Tasa de clasificación correcta	0,75	0,90	0,90

6. Conclusiones

La necesidad de comparabilidad de los ratios financieros de diferentes empresas conduce a utilizar información de aquellas que cotizan en bolsa. Estas empresas tienen especiales exigencias en cuanto a la presentación y disponibilidad de información, lo que no es así en otro tipo de empresas.

Con respecto a los ratios utilizados y los resultados obtenidos, todos fueron significativos en al menos alguno de los países que constituyeron este estudio.

El ratio de rentabilidad económica (GE_AT) es uno de los indicadores que, a través de la literatura, ha resultado significativo para predecir el estado de crisis financiera de las empresas, lo que se confirma en esta investigación también para todos los países. Esto significa que la utilidades obtenidas respecto al total del activo manifiestan que a menores utilidades (o pérdidas), más posibilidad tiene la empresa de estar en crisis.

Respecto al índice de flujo de fondos (FF_AT), que constituye un indicador relativamente nuevo en esta área, indica que a menor nivel de flujo de fondos generados por

⁴ Valor aceptable, aunque no comparable con lo obtenido en otros métodos debido a que se trata de una única empresa en crisis en la muestra de validación.

las operaciones respecto del activo total existen más posibilidades de que las empresas estén en crisis. No obstante, este indicador solo en Argentina y Chile resultó significativo.

El índice de liquidez, si bien no siempre refleja signos de vulnerabilidad, sí lo hizo en Perú, donde a menor liquidez, mayor posibilidad de crisis financiera.

Otros de los indicadores que han reflejado un comportamiento determinado en las empresas son la rotación del activo (nivel de ventas en relación al total de activos) y el endeudamiento (deudas respecto al patrimonio neto), los cuales fueron significativos en la mayoría de los países.

Se confirma que los ratios seleccionados, en consistencia con la literatura mencionada, reflejan en mayor o menor medida el comportamiento de las empresas y permiten un diagnóstico eficaz de la situación de crisis financiera.

Es de destacar que los índices de rentabilidad y de flujo de fondos operativos resultaron ser efectos aleatorios significativos, que explican la heterogeneidad no observada. Si bien no hay una teoría de ratios que indique cuáles son los que se deberían utilizar para este objetivo de predecir el estado de vulnerabilidad financiera, los ratios utilizados, propuestos por la literatura, son los adecuados.

A efectos de predecir el estado de una nueva empresa, que no ha formado parte de la base de entrenamiento con la que se estimó el modelo mixto, se empleó para la estimación de los efectos aleatorios el método del vecino más cercano. La literatura avanza hacia métodos no paramétricos como éste, ya que los métodos paramétricos, como el de regresión múltiple, no siempre es adecuado por la falta de cumplimiento de los supuestos estadísticos del modelo, permitiendo así la clasificación de una nueva empresa. De esta manera se levanta una limitación que tenían los modelos mixtos en cuanto a la estimación y predicción de una nueva observación.

Estos métodos contribuyen a la estimación del estado de vulnerabilidad en la que puede encontrarse una nueva empresa, en el mercado a través de la estimación de los efectos fijos y la predicción de los efectos aleatorios. La metodología utilizada hasta el momento en esta área de interés, como lo es la predicción de crisis financiera en empresas, limitaba este segundo objetivo, que a partir de las investigaciones realizadas ha podido ser superado. Ampliando el horizonte de análisis y disponiendo de una mayor cantidad de empresas vulnerables se podrán obtener mejores tasas de clasificación correcta.

Referencias

- Altman, E. I. (1968). Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy. *The Journal of Finance*, 23(4), 589-609.
- Altman, E. I. (2005). An emerging market credit scoring system for corporate bonds. *Emerging Markets Review*, 6(4), 311-323.
- Altman, E. I.; Baidya, T. K. y Dias, L. M. R. (1979). Assessing potential financial problems for firms in Brazil. *Journal of International Business Studies*, 10(2), 9-24.
- Altman, E. I.; Haldeman, R. G. y Narayanan, P. (1977). ZETATM analysis A new model to identify bankruptcy risk of corporations. *Journal of Banking & Finance*, 1(1), 29-54.
- Altman, E. I.; Hartzell, J. y Peck, M. (1998). Emerging Markets Corporate Bonds: A Scoring System. En Levich R.M. (ed.): *Emerging Market Capital Flows*. The New York University Salomon Center Series on Financial Markets and Institutions, Vol. 2, Boston: Springer, pp. 391-400.
- Beaver, W. H. (1968). Alternative accounting measures as predictors of failure. *The Accounting Review*, 43(1), 113-122.
- Caro, N. P. (2014). Modelos de predicción de crisis financiera en empresas: una revisión de la literatura. *Revista Internacional Legis de Contabilidad y Auditoría*, 58, 135-183.
- Caro, N. P. (2015). Descripción de empresas en crisis financiera: el caso de Argentina en las décadas del 1990 y 2000. *Revista de Dirección y Administración de Empresas*, 22, 106-130.
- Caro, N. P. (2016) El modelo logístico mixto para predecir crisis financiera en empresas argentinas y chilenas. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 23(1), 255-276.
- Caro, N. P.; Díaz, M. y Porporato, M. (2013). Predicción de quiebras empresariales en economías emergentes: uso de un modelo logístico mixto. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, 16, 200-215.
- Caro, N. P. y Diaz, M. (2015). Factores determinantes para predecir la crisis financiera en empresas argentinas. *Cuadernos de Estudios Empresariales*, 25, 29-47.

- CEPAL. (2011). *Balance preliminar de las economías de América Latina y el Caribe 2010*. Santiago de Chile: Naciones Unidas CEPAL.
- Chocce, G. A. R.; González, P. A.; Aguirre, N. A.; Vega, P. L. y Carrazana, J. M. (2002). Modelos de clasificación y predicción de quiebra de empresas: Una aplicación a empresas chilenas. *Revista Fórum Empresarial*, 7(1), 33-52.
- Giampaoli, V.; Tamura, K. A.; Caro, N. P. y de Araujo, L.J.S. (2016). Financial crisis prediction on Latin American companies using mixed logistic regression model. *Chilean Journal of Statistics*, 7(1), 31-41
- Hensher, D. A. y Jones, S. (2007). Forecasting corporate bankruptcy: Optimizing the performance of the mixed logit model. *Abacus*, 43(3), 241-264.
- Jones, S. y Hensher, D. A. (2004). Predicting firm financial distress: A mixed logit model. *The Accounting Review*, 79(4), 1011-1038.
- Jones, S. y Hensher, D. A. (2007). Modelling corporate failure: A multinomial nested logit analysis for unordered outcomes. *The British Accounting Review*, 39(1), 89-107.
- Montalván, S. M.; O'Shee, D. F.; Delgado, F. A. y Yamashiro, M. A. (2011). Determinantes de la insolvencia empresarial en el Perú. *Academia, Revista Latinoamericana de Administración*, 47, 126-139.
- OECD (2010). *Perspectivas Económicas de América Latina 2011: En qué medida es clase media América Latina*. París: OECD Publishing, doi: <http://dx.doi.org/10.1787/leo-2011-es>.
- OECD/ECLAC (2011). *Perspectivas Económicas de América Latina 2012: Transformación del Estado para el Desarrollo*. París: OECD Publishing, doi: <http://dx.doi.org/10.1787/leo-2012-es>.
- OECD/ECLAC (2012). *Perspectivas económicas de América Latina 2013: Políticas de pymes para el cambio estructural*. París: OECD Publishing, doi: <http://dx.doi.org/10.1787/leo-2013-es>.
- Ohlson, J. A. (1980). Financial ratios and the probabilistic prediction of bankruptcy. *Journal of Accounting Research*, 18(1), 109-131.
- Pascale, R. (1988). A multivariate model to predict firm financial problems: the case of Uruguay. *Studies in Banking and Finance*, 7, 171-182.

- Sandin, A. R. y Porporato, M. (2008). Corporate bankruptcy prediction models applied to emerging economies: Evidence from Argentina in the years 1991-1998. *International Journal of Commerce and Management*, 17(4), 295-311.
- Swanson, E. y Tybout, J. (1988). Industrial bankruptcy determinants in Argentina. *Studies in Banking and Finance*, 7, 1-25.
- Tamura, K. A. y Giampaoli, V. (2013). New prediction method for the mixed logistic model applied in a marketing problem. *Computational Statistics & Data Analysis*, 66, 202-216.
- Tamura, K. A.; Giampaoli, V. y Noma, A. (2013). Nearest Neighbors Prediction Method for mixed logistic regression. En Muggeo, M. R.; Capursi, V.; Boscaino, G. y Lovison, G. (eds.): *Proceedings of the 28th International Workshop on Statistical Modeling*, Palermo: Università di Palermo, pp. 799-802.
- Tascón, M. y Castaño, F. (2012). Variables y modelos para identificación y predicción del fracaso empresarial: Revisión de la investigación reciente. *Revista de Contabilidad*, 15(1), 7-58.
- Zmijewski, M. E. (1984). Methodological issues related to the estimation of financial distress prediction models. *Journal of Accounting Research*, 22, 59-82.
- Zurita, F. (2008). La predicción de la insolvencia de empresas chilenas. *Economía Chilena*, 11(1), 93-116.



UNIVERSIDAD
**PABLO DE
OLAVIDE**
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA
ECONOMÍA Y LA EMPRESA (24). Páginas 25–53.
Diciembre de 2017. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
www.upo.es/revistas/index.php/RevMetCuant/article/view/2879

Un modelo hedónico de precios en línea de automóviles usados en Argentina

RAMÍREZ MUÑOZ DE TORO, GONZALO R.

Hyperia Big Data (Argentina)

Correo electrónico: grrmdt@gmail.com

URIARTE, JUAN I.

Hyperia Big Data (Argentina)

Correo electrónico: juanibbca@gmail.com

DELBIANCO, FERNANDO

Departamento de Economía, Universidad Nacional del Sur (Argentina)

Instituto de Matemática de Bahía Blanca (Argentina)

Correo electrónico: fernando.delbianco@uns.edu.ar

LARROSA, JUAN M.C.

Departamento de Economía, Universidad Nacional del Sur (Argentina)

Instituto de Investigaciones Económicas y Sociales del Sur (Argentina)

Correo-e: jarrosa@uns.edu.ar

RESUMEN

Los modelos de precios hedónicos permiten detectar relaciones latentes entre el precio de un bien y diversas características del mismo. Utilizamos datos de sitios en línea de Argentina sobre autos usados para ajustar un modelo amplio. Encontramos como significativas diversas características de prestaciones y propias del tipo de vehículo y su equipamiento. Se observan diferencias regionales de precios así como una persistente asociación de los vehículos de producción nacional con precios bajos.

Palabras claves: métodos hedónicos; automóviles usados; datos en línea.

Clasificación JEL: L62; C43; C25.

MSC2010: 62-07; 62J05; 62P20; 91G70; 91B82.

A Hedonic Model of Online Prices of Used Cars in Argentina

ABSTRACT

Hedonic pricing models detect latent relationships between the price of a good and its different features. We have used data from online sites from Argentina on used cars to fit a broad model. Various features are significant such as performance, characteristics and equipment according to each vehicle type. Both regional differences in prices and a persistent association of domestically produced vehicles with low prices are observed.

Keywords: hedonic methods; used cars; online data.

JEL classification: L62; C43; C25.

MSC2010: 62-07; 62J05; 62P20; 91G70; 91B82.



1. Introducción

Con frecuencia se percibe que el mercado de automóviles usados otorga a los vendedores una ventaja injusta sobre los compradores en términos de conocer el verdadero valor de un automóvil usado. Este campo de juego desigual necesita ser analizado para determinar qué información le ayudará al comprador a entender mejor lo que vale el vehículo. En este sentido, los automóviles pueden ser comparados a un conjunto de bienes complementarios que se venden en un mercado, donde cada una de las características del automóvil combinadas se convierte en un sistema que iguala al valor de la transacción conjunta esperada. Mediante la recopilación de datos sobre características o atributos de automóviles, diferentes técnicas de análisis de regresión pueden usarse para determinar la correlación del precio con, por ejemplo, características físicas y otros elementos de influencia externa que pueden sumar o restar al valor de precio de transacción del automóvil. Los modelos de precios hedónicos pueden ser útiles para determinar el valor intrínseco de cada atributo¹, así como para predecir los precios de transacción. Los trabajos que utilizan técnicas de precios hedónicos han utilizado diversas medidas de las características del automóvil con el fin de obtener una medida de la calidad y su impacto en el precio.

Dentro del marco de la teoría del comportamiento del consumidor, Lancaster (1966) supone que los consumidores obtienen utilidad de los atributos de bienes. Suponiendo que un automóvil es el único bien involucrado en el consumo de actividad de conducción, éste produce un vector fijo de atributos y su nivel de actividad es un escalar asociado con el vector (relación que podría ser lineal). El demandante elige una combinación que maximiza su función de utilidad de acuerdo a las características de los bienes bajo una restricción presupuestaria. La hipótesis hedónica supone que un bien puede ser visto como un conjunto de características o atributos reflejados en los precios implícitos que pueden ser derivados conteniendo diferentes combinaciones de características específicas. Es así que el modelo hedónico asume que los bienes son valorados por sus atributos o utilidades que devengan. Al mismo tiempo, los consumidores no tienen información sobre la calidad de muchos productos antes de la compra. Ellos no pueden observar la fiabilidad de un electrodoméstico, el sabor de frutas enlatadas, o la habilidad de un técnico en reparación. Mientras que los vendedores

¹ Precios *perdidos* o latentes en términos de Ohta y Grilliches (1976: 326).

pueden conocer la calidad de sus productos, la información puede nunca llegar a los consumidores (Uri, 1988). Los vendedores de productos de baja calidad pueden querer ocultar la información y los vendedores de productos de alta calidad pueden no transmitir la información de manera creíble (Lacko, 1986). Por ello, resulta interesante ver qué características se asocian al valor de un automóvil.

En nuestro caso específico, analizaremos el caso de autos usados. Los bienes usados como una alternativa pueden ser relevantes para que el consumidor tome la decisión de compra dado que: (a) son más baratos de adquirir; (b) si bien pueden ser menos eficientes, confiables y precisos, esta brecha ha ido disminuyendo con el tiempo debido a las mejoras y estandarizaciones tecnológicas; (c) reducen los costos de adquisición y, en algunos casos, los operativos; (d) pueden ser más baratos de mantener una vez operativos, aunque pueden requerir de reparaciones para que sean efectivamente operativos; (e) aunque puede ser difícil encontrar piezas de repuesto, su tiempo de entrega es más corto; y (f) no se deben pagar usualmente costos superiores de transporte y de transacción (Smith, 1974: 262). Asimismo, como en nuestro caso de estudio, en los países en vías de desarrollo las tasas de depreciación y desguace de unidades dadas de bajas son mayores que en los países desarrollados de acuerdo a Grubel (1980).

El objetivo de este trabajo es determinar qué características particulares de los vehículos usados se asocian con el precio del mismo utilizando métodos de precios hedónicos sobre valores publicados en línea en Argentina. El trabajo hace hincapié en características muy particulares que afectan al precio de reventa. En ese sentido, se pone de manifiesto la utilidad de los precios hedónicos como una medida de determinación de índices de calidad del vehículo, específicamente para el mercado argentino con datos obtenidos de un sitio en línea muy popular. Claramente se observa que variables típicas, como el kilometraje y la antigüedad de la unidad, influyen negativamente en el precio de los vehículos; pero también otras características emergen como significativas. El origen nacional o regional del vehículo y la pertenencia a marcas populares también afectan negativamente al precio. Por otro lado, el prestigio de marcas de alta gama, ciertos colores específicos y la presencia de algunos ítems de confort posiciona al vehículo con precio de reventa más alto.

El trabajo continúa con: la sección 2, donde se revisa la literatura de modelos de precios hedónicos aplicados al mercado de autos usados; la sección 3, donde se expone los datos y metodología aplicados; la sección 4, que analiza los resultados; y la sección 5, que finaliza con las conclusiones.

2. Modelos hedónicos y autos usados

La premisa básica de los modelos de precios hedónicos es que el precio de un bien está relacionado con sus características o con los servicios que proporciona. Por ejemplo, el precio de un coche refleja las características de ese coche en términos de ahorro de combustible, capacidad de transporte, comodidad, estilo, lujo, etc. Por lo tanto, podemos valorar las características individuales de un automóvil u otro bien mirando cómo varía el precio que los agentes están dispuestos a pagar a medida que cambian las características. El trabajo seminal de Court (1939)² es el que dio inicio a la literatura de los modelos hedónicos, partiendo de la base de obtener información marginal sobre cómo las características de un bien afectaban a su valoración —su “utilidad y deseabilidad” en términos del mismo Court (1939: 107)—. El aporte influyó inicialmente poco en la literatura académica siendo las de Houthakker (1952) y Griliches (1961) contribuciones importantes sobre índices de precios de automóviles, quienes, al igual que Court, utilizaron como unidades análisis a los automóviles. Cowling y Cubbin (1972), unos años más tarde, plantean modelos hedónicos para crear índices de precios de automóviles en el Reino Unido a fin de realizar ajustes cualitativos tanto por la variedad como por su evolución en el tiempo.

Otro trabajo influyente dentro de la modelización teórica de las estimaciones hedónicas es debido a Rosen (1974). Se describe a los automóviles por las n características medibles (por ejemplo, consumo de combustible, tamaño del vehículo, motor y tecnología, entre muchas otras) y un vector $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ con z_i midiendo la cantidad de las i -ésimas características. La existencia de diferenciación del producto implica entonces que una amplia variedad de paquetes alternativos, completamente descritos por el valor numérico de cada z_i , están disponibles. Otros aportes han ido agregando variaciones en la modelización. Así, Arguea y Hsiao (1993) modelizan con datos dinámicos de *cross-section* con posibilidades de arbitraje entre características de

² Goodman (1998) provee una excelente reseña de este primer aporte.

los bienes en un estudio de caso del mercado de automóviles estadounidense. Epple (1987) evalúa el problema de endogeneidad de los modelos hedónicos discutiendo los problemas econométricos inducidos por el proceso de clasificación de equilibrio que subyace a la formación de la función de precio hedónica. El punto crucial estaba puesto en que los determinantes no observados de los gustos afectan tanto a la cantidad de una característica del bien que un individuo consume como (si la función de precio hedónica no es lineal) al precio hedónico del atributo en sí mismo. En una regresión como la descrita en la segunda etapa del procedimiento de dos pasos de Rosen, la cantidad de amenidad que un individuo consume será, por tanto, endógena. Murray y Sarantis (1999) propone un amplio modelo de datos de panel para el Reino Unido del que derivan un índice de precios hedónicos para automóviles en diferentes aspectos particulares de los mismos (seguridad, rendimiento y maniobrabilidad, entre otras). Gual (1989) es otro autor que emplea datos de panel con efectos fijos. Matas y Raymond (2009), por su parte, emplean promedios móviles para España en un modelo dinámico en seis categorías de atributos: rendimiento, facilidad de conducción, tamaño, confort, eficiencia de combustible y seguridad.

Una corriente tradicional de estudios se aboca a los ajustes de calidad en el mercado de automóviles utilizando métodos hedónicos. Inspirado en Lancaster (1966), Pickering *et al.* (1973) añaden una perspectiva empírica del enfoque mediante la realización de una encuesta en el Reino Unido. A raíz de sus resultados, se definieron cinco grupos de productos (servicios públicos, lujos, bienes de ocio, calefacción central y automoción) y se identificaron once características que actúan como discriminadores significativos entre los grupos. Los principales atributos deseados por los compradores de automóviles eran comodidad, durabilidad, economicidad, maniobrabilidad, seguridad y rendimiento. Del trabajo inicial se reconoce que los productos y los atributos pueden cambiar los grupos a través del tiempo a causa del ciclo de vida del producto, los diferentes gustos entre los consumidores, el crecimiento de la penetración en el mercado o la complementariedad o sustitución de los bienes, entre otros. Varios estudios han aplicado el modelado de precios hedónicos para mostrar que la variación de precios entre los automóviles nuevos pueden explicarse por las diferencias en las características claves del producto, tales como potencia, cilindrada del motor, velocidad y características de seguridad —véase, por ejemplo, Couton *et al.* (1996), Andersson (2005) o Reis y Santos Silva (2006)—. Ginter *et al.* (1987) también analizan la

asociación entre el precio de autos usados y los niveles de seguridad en una muestra en EE.UU. y no encuentran relación significativa entre la pérdida de valor y la *performance* de seguridad de los automóviles. Sin embargo, tales atributos medibles pueden no ser los únicos factores explicativos. Incluso una mirada superficial al mercado del automóvil revela que los precios difieren entre los segmentos y marcas de una manera sistemática. No existe una interpretación obvia de este patrón. Una actitud posible es decir que sólo refleja las diferencias de segmento y de marca en atributos claves del producto: por ejemplo, los coches *off-road* son de gran autonomía y los *Saab* son seguros. Sin embargo, este patrón también puede sugerir primas de precios implícitos que son, en gran medida, independientes de las características técnicas estándar y que se derivan de una heterogeneidad no medida. Por lo tanto, surge una pregunta de manera natural: ¿cómo los segmentos y marcas determinan diferentes precios de los coches que de otro modo serían equivalentes? (Baltas y Saridakis, 2009). Se entiende fácilmente que esta es una cuestión importante no sólo para la industria del automóvil, sino también para los consumidores. De hecho, esta clase de modelización comprueba bien la hipótesis de la teoría de la prospectiva en términos de autos usados (Prieto *et al.*, 2015). Por ejemplo, en un trabajo experimental, compradores sensibilizados mediante publicidad con la idea de la justicia (*fairness*) recibida como un estímulo reportaron una disposición a pagar una cantidad mayor por un coche usado comparado con usuarios no sensibilizados (Maxwell *et al.*, 1999). En ese sentido, Kihm y Vance (2016) encuentran para Alemania que el principal determinante que relaciona el precio de un modelo nuevo y uno usado es el consumo de combustible: automóviles nuevos más eficientes en el uso de combustible mantienen una prima de precio superior en el mercado de usados. Por otro lado, Erdem y Şentürk (2009) estudian el mercado turco de autos usados donde variables como tipo de combustible, color negro y gris, caja de cambios automática y origen nacional de Japón, Alemania, Corea y EE.UU. tienen efectos positivos en el precio, aunque encuentran que variables geográficas y un menor número de servicios oficiales de postventa tienen efecto negativo en el precio de los vehículos. Prado (2009) hace lo propio con el mercado europeo de autos usados con modelos de precios hedónicos, aunque con el objetivo de evaluar el grado de predicción del valor residual que utilizan los alquiladores de autos bajo el sistema de *leasing*. Por otra parte, la investigación de Atkinson y Halvorsen (1984: 422) detecta un efecto positivo y significativo en el precio de los vehículos de alta gama en conjunción con

características tales como su aceleración, el confort y manufactura extranjera. Irandoust (1998) evalúa el mercado sueco de autos importados, encontrando un efecto condicionante en la fijación de precios de los procesos de evolución del tipo de cambio.

Una utilidad de estimar el valor añadido de cada característica al vehículo usado es la de imputar precios para ajustes de calidad de los mismos en índices de costo de vida específicos. Krsinich (2011) presenta estimaciones para Nueva Zelanda de modelos de precios hedónicos en autos usados basados en 67 variables y con el objetivo de corregir el índice de precios al consumidor (IPC) nacional. Nair (2004) también estudia el caso neozelandés con resultados igual de prometedores. Enfoques similares para realizar ajustes cualitativos al IPC lo adoptan Silver (1999) y Heravi y Silver (2007), aunque en este último caso, el método hedónico es una de tres técnicas analizadas. La Oficina Federal de Estadísticas de Alemania (Dexheimer, 2003) condujo asimismo un estudio en el cual un índice de precios hedónicos fue calculado para automóviles usados. Los resultados muestran que los precios de autos nuevos, los kilómetros viajados por mes, la antigüedad del vehículo y todas las 15 variables *dummy* para marcas de productos de automóviles tienen efecto significativo en los precios. Posteriormente, Shiratsuka (1995) examina precios de automóviles para ajustes de calidad también, aunque para el mercado japonés.

Los estudios ambientales son otra vertiente de la literatura que también emplea repetidamente el método hedónico. Busse *et al.* (2013) estudia la implementación de impuestos al combustible como instrumento de control de las emisiones de carbón³. Específicamente buscan responder cuán sensibles son los consumidores en su disposición a pagar frente a aumentos esperados en el costo del combustible cuando se enfrentan a la decisión de comprar un vehículo con diferentes características de consumo de combustible. El trabajo, entre otros hallazgos, encuentra que los autos usados son muy sensibles al aumento del precio de combustible comparado con los autos nuevos. Otra aplicación de modelos hedónicos al mercado de nuevos automotores es presentada por Andersson (2005), quien encuentra que los consumidores suecos están dispuestos a pagar más por autos más seguros pero tienen menor disposición a pagar por elementos de seguridad adicional a los básicos. Espey y Nair (2005) estiman una

³ Otro trabajo que explora el tema ambiental utilizando modelos hedónicos es Alberini *et al.* (2014), aunque para el mercado de autos nuevos en Suiza.

regresión hedónica de precios de catálogo en una variedad de atributos de una muestra transversal de coches modelo año 2001. Llegan a la conclusión de que los consumidores utilizan tasas de descuento bastante bajas en la valoración de futuros ahorros de costos de combustible. Finalmente, la contribución de Mohammadian y Miller (2002) presenta un modelo de autos usados para un trabajo de microsimulación de transporte urbano. Aquí los modelos hedónicos se utilizan para actualizar datos de propiedad de vehículos; es decir, cómo distintas características del vehículo afectan a la decisión de mantenerlo o venderlo.

Otras extensas revisiones de literatura pueden encontrarse en Ohta y Griliches (1976), Gordon (1990), Pashigian (2001) y Brachinger y Beer (2009), los cuales resultan completos trabajos introductorios sobre distintos aspectos metodológicos de estos modelos⁴. Un resumen de los tópicos y las contribuciones citadas se puede apreciar en la Tabla 1.

Tabla 1. Contribuciones según tópicos

Tópico analizado	Contribuciones	Resumen general
Valoración de características: teoría y aplicaciones	Court (1939), Houthakker (1952), Lancaster (1966), Rosen (1974), Ohta y Griliches (1976), Atkinson y Halvorsen (1984), Lacko (1986), Ginter <i>et al.</i> (1987), Epple (1987), Uri (1988), Gual (1989), Gordon (1990), Arguea y Hsiao (1993), Couton <i>et al.</i> (1996), Irandoust (1998), Erdem y Sertürk (2009), Prado (2009), Kihm y Vance (2016).	Trabajos que fundaron el modelo econométrico hedónico con diversas aplicaciones principales en el campo del mercado automotriz y otros aportes en el mercado de vivienda y turismo.
Índices de calidad	Griliches (1961), Uri (1988), Silver (1999), Murray y Sarantis (1999), Dexheimer (2003), Nair (2004), Heravi y Silver (2007), Matas y Raymond (2009), Krsinich (2011).	Utilización del modelo hedónico para extraer información cualitativa de los bienes.
Impacto ambiental	Andersson (2005), Espey y Nair (2005), Busse <i>et al.</i> (2013).	Utilización del modelo hedónico enfocado en el valor de uso de combustible fósiles.
Revisión de literatura	Goodman (1998), Pashigian (2001), Espey y Nair (2005), Andersson (2005), Brachinger y Beer (2009).	Revisión de la literatura de modelos hedónicos en términos teóricos y empíricos en diversos campos.

⁴ Monson (2009), León (2010) y Nuñez Tabales *et al.* (2013) aplican métodos hedónicos para la valuación de unidades del mercado inmobiliario.

3. Datos y análisis

Los enfoques de investigación que tratan los productos como paquetes de características incluyen modelos de atributos de elecciones múltiples y modelos de precios hedónicos, como los tratados en este trabajo. En los estudios empíricos, estos precios implícitos característicos son coeficientes que relacionan los precios y atributos en un marco de regresión (Baltas y Saridakis, 2010).

Si bien no hay una teoría específica que ayude a determinar la forma funcional apropiada de un modelo de precios hedónicos (Cropper *et al.*, 1988), existe un estándar en base a las formas funcionales empleadas por contribuciones previas. En ese sentido, se estimó el logaritmo del precio en función de diversas características del automóvil mediante mínimos cuadrados ordinarios (MCO). De esta manera, el modelo estimado presenta las características de un modelo *log-lin*, por lo que las variaciones lineales de las características independientes pueden ser leídas como variaciones porcentuales de precio. Las características pueden ser vistas en la Tabla 2, mientras que las especificaciones son mostradas junto con los resultados en la Tabla 5.

En particular, las especificaciones son variaciones de las más utilizadas en la literatura, donde se mantienen las variables explicativas más tradicionales como edad del automóvil, variables indicadoras de marca o kilómetros. Estas variaciones consisten en ir agregando un conjunto de variables con las especificaciones más particulares del automóvil. Las mismas, mediante el algoritmo de búsqueda, logran recopilar información general e información más particular del confort que ofrece el vehículo (es decir, no solo cantidad de puertas, combustible o cilindrada, sino también si presenta USB o apoyacabezas trasero, por ejemplo).

El hecho de no incluir todas las variables juntas en una sola especificación se debe a que, si bien se tienen grados de libertad suficientes, el inflador de varianza (VIF) se dispara a valores mayores de 10 cuando se incluyen varios bloques de variables juntos. De esta manera, manteniendo las variables más generales y sumando características gradualmente, se ve paliado el posible efecto de multicolinealidad y la consiguiente pérdida de significatividad.

Los datos fueron obtenidos del sitio Mercado Libre (<http://www.mercadolibre.com.ar>) en el período comprendido desde marzo hasta julio de 2015. La base utilizada contiene 920 observaciones de publicaciones de ventas en

línea de autos usados. Las mismas recopilan precios publicados y características detalladas de un sitio de ofertas en línea. Utilizamos generalmente la especificación semilogarítmica (o *log-lin*):

$$\ln P_i = a_0 + \sum_j \beta_j x_{ij} + u_i \quad (1)$$

dónde P_i es el precio del producto i , a_0 es un intercepto de la regresión estándar, β_j son los coeficientes de regresión, x_{ij} es la característica j del producto i , y u_i es el término de error. Los modelos de precios hedónicos se estiman utilizando conjuntos de datos que incluyen los precios y los atributos de diferentes alternativas de productos. En el trabajo con datos longitudinales, los investigadores añaden variables *proxy* específicas de tiempo y región, entre otras; y utilizan sus parámetros para estimar los índices de precios ajustados por calidad. Suponemos que existen atributos relacionados con características físicas, de *performance* o de seguridad, entre otras, de un automóvil (x_1, x_2, \dots, x_n) . Las características físicas (especificaciones) son ítems tales como caballos de potencia, color del vehículo, capacidades de tracción, tipo de vehículo, tipo de frenos, tipo de combustible o año de construcción; las características de *performance* se refieren a velocidad, rendimiento del combustible, etc.; las características de seguridad pueden abarcar capacidad de seguridad de los ocupantes (airbags), tercera luz de freno o freno ABS, entre otras. Muchas características, de todos modos, se pueden suponer mutuamente correlacionadas. Una capacidad mayor de maletero está usualmente asociada a una mayor potencia del motor y mayor peso del vehículo. Del mismo modo, muchas características de confort se asocian temporalmente a un período específico en el cual surgieron (MP3, DVD o GPS). Suponemos, en el esquema general, que las características físicas de un automóvil componen la función de costo de producirlo pero no necesariamente la función de utilidad del consumidor directamente. Se asume que las características del vehículo producen su rendimiento y ello es lo que afecta a la disposición a pagar de los consumidores. Combinamos el efecto de las variables de rendimiento con las de características físicas dado que los ajustes de calidad debieran estar basados en las características de rendimiento; las que, como presunción, entran en la función de utilidad directamente más que las características físicas por sí mismas.

Con la información recolectada, estimamos un modelo hedónico del logaritmo del precio del automóvil respecto a muchos potenciales determinantes. La lista de características o variables suma 116 variables. Estas se pueden agrupar en tres grandes grupos de características referidas a características generales (año, kilometraje, tracción, transmisión, potencia, origen geográfico del vehículo), características técnicas (puertas, potencia, tipo de combustible, tipo de vehículo, marca) y de equipamiento (elevalunas eléctricos, MP3, DVD, sensores varios, faros varios, techo corredizo, color, llantas de aleación, airbag para conductor/acompañante, freno ABS, cierre centralizado de puertas, alarma e inmovilizador del motor, entre otros). La Tabla 2 contabiliza las categorías individuales de cada grupo.

Tabla 2. Características analizadas de los vehículos

Generales / código	Bluetooth (binaria) / v24
Año (año de construcción) / A	Caja de CD (binaria) / v25
Único dueño (binaria) / UD	Cristales eléctricos (binaria) / v15
Ubicación del vendedor (distancia respecto a Buenos Aires) / U	Tercera luz de freno (binaria) / v16
Década (categórica para 3 décadas) / decada	Frenos ABS (binaria) / v17
MERCOSUR (binaria) / Mercosur	Airbag conductor (binaria) / v18
Argentina (binaria) / Argentina	Airbag pasajero (binaria) / v19
Importado (binaria) / Importado	Alarma (binaria) / v20
Técnicas	Apoyacabeza asientos traseros (binaria) / v21
Puertas (cantidad de puertas) / PTA	Inmovilizador de motor (binaria) / v22
Potencia (HP) / Potencia	Cargador de CD (binaria) / v26
Combustible Diésel / COMBDIE	Tarjeta SD (binaria) / v27
Combustible Nafta / COMBNAF	Entrada USB (binaria) / v28
Combustible GNC / COMBGNC	Apertura remota de maletero (binaria) / v29
Kms (cantidad de kilómetros del vehículo) / KM	Climatizador automático (binaria) / v30
Transmisión (automática o manual) / Trans	Faros regulables desde el interior (binaria) / v31
Dirección (automática, secuencial) / D	Techo corredizo (binaria) / v32
Marca (categórica para 33 marcas) / M	Airbags laterales (binaria) / v33
Alta gama (binaria) / Alta gama	Control de tracción (binaria) / v34
Utilitario (binaria) / Utilitario	Control de estabilidad (binaria) / v35
Pick-up (binaria) / PickUp	Faros antiniebla delanteros (binaria) / v36
Equipamiento	Faros de xenón (binaria) / v37
Color (categoría numérica arbitraria) / C	Silla de bebé (binaria) / v38
Limpia-lavaluneta (binaria) / v1	Faros antiniebla traseros (binaria) / v39
Llantas de aleación (binaria) / v2	Repartidor electrónico de fuerza de frenado (binaria) / v40
Paragolpes pintados (binaria) / v3	Comando satelital para estéreo (binaria) / v41
Vidrios polarizados (binaria) / v4	DVD (binaria) / v42
Am/Fm (binaria) / v5	Control de velocidad de cruce (binaria) / v43
Entrada auxiliar (binaria) / v6	Sensor de estacionamiento (binaria) / v44
MP3 (binaria) / v7	Sensor de lluvia (binaria) / v45
Aire acondicionado (binaria) / v8	Sensor de luz (binaria) / v46
Alarma de luces encendidas (binaria) / v9	Tapizado de cuero (binaria) / v47
Asiento trasero rebatible (binaria) / v10	Airbag de cortina (binaria) / v48
Asiento conductor regulable en altura (binaria) / v11	Asientos eléctricos (binaria) / v49
Cierre centralizado de puertas (binaria) / v12	Blindado (binaria) / v50
Computadora de abordo (binaria) / v13	Doble tracción (binaria) / v51
Espejos eléctricos (binaria) / v14	GPS (binaria) / v52
	Pasacasete (binaria) / v53

La Tabla 3 presenta la estadística descriptiva de las variables presentadas.

Tabla 3. Estadística descriptiva de las variables

Variable	ln(P)	A	U	D	UD	COMBDIE	COMBNAF	COMBNGNC	PTA	KM	M	TRANS
Promedio	12,16	2007,37	73,83	1,43	0,43	0,23	0,68	0,09	4,13	87052,04	18,41	0,97
Desviación estándar	11,94	7,23	209,40	1,23	0,49	0,42	0,47	0,29	0,97	67144,35	10,85	0,67
Curtosis	2,36	3,86	30,97	-1,63	-1,91	-0,32	-1,41	5,96	-0,24	1,79	-1,50	0,63
Mínimo	7,67	1980,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,00	0,00	1,00	0,00
Máximo	14,09	2015,00	2376,95	3,00	1,00	1,00	1,00	1,00	5,00	500000,00	34,00	3,00

Variable	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9	v10	v11	v12
Promedio	0,41	0,52	0,55	0,55	0,64	0,45	0,54	0,68	0,60	0,53	0,50	0,61
Desviación estándar	0,49	0,50	0,50	0,50	0,48	0,50	0,50	0,47	0,49	0,50	0,50	0,49
Curtosis	-1,88	-2,00	-1,97	-1,96	-1,65	-1,97	-1,98	-1,42	-1,84	-1,99	-2,00	-1,79
Mínimo	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Máximo	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Variable	v13	v14	v15	v16	v17	v18	v19	v20	v21	v22	v23	Potencia
Promedio	0,44	0,48	0,56	0,63	0,48	0,52	0,51	0,56	0,56	0,41	1,53	32,84
Desviación estándar	0,50	0,50	0,50	0,48	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,49	0,94	70,16
Curtosis	-1,95	-2,00	-1,95	-1,73	-2,00	-2,00	-2,00	-1,95	-1,95	-1,88	0,70	7,24
Mínimo	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Máximo	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	5,70	557,00

Variable	v24	v25	v26	v27	v28	v29	v30	v31	v32	v33	v34	v35
Promedio	0,37	0,23	0,24	0,18	0,39	0,34	0,33	0,32	0,24	0,23	0,24	0,26
Desviación estándar	0,48	0,42	0,43	0,39	0,49	0,47	0,47	0,47	0,43	0,42	0,43	0,44
Curtosis	-1,69	-0,43	-0,58	0,71	-1,78	-1,54	-1,44	-1,38	-0,53	-0,28	-0,50	-0,83
Mínimo	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Máximo	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Variable	v36	v37	v38	v39	v40	v41	v42	v43	v44	v45	v46	v47
Promedio	0,47	0,21	0,19	0,37	0,26	0,33	0,09	0,27	0,22	0,19	0,22	0,24
Desviación estándar	0,50	0,41	0,39	0,48	0,44	0,47	0,29	0,45	0,41	0,39	0,41	0,43
Curtosis	-1,99	0,11	0,50	-1,73	-0,83	-1,50	5,84	-0,95	-0,07	0,47	-0,09	-0,53
Mínimo	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Máximo	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Variable	v48	v49	v50	v51	v52	v53	Importado	Alta gama	Argentina	Utilitario	PickUp	decada	mercosur
Promedio	0,17	0,16	0,02	0,11	0,08	0,04	0,32	0,26	0,27	0,07	0,09	2003,58	0,21
Desviación estándar	0,38	0,36	0,15	0,31	0,27	0,21	0,47	0,44	0,44	0,26	0,28	8,06	0,41
Curtosis	1,01	1,63	41,25	4,63	7,91	17,59	-1,39	-0,74	-0,87	9,07	6,78	0,69	-0,01
Mínimo	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1980,00	0,00
Máximo	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	2010,00	1,00

4. Análisis de resultados

Las estimaciones de los coeficientes obtenidos por la combinación de los datos se presentan en la Tabla 5 incluida en el Anexo. Con el fin de evaluar la solidez de los resultados, se evaluaron 11 especificaciones diferentes en el modelo mostrado en (1) para exponer los efectos de la inclusión o exclusión de las variables. Presente en todas las especificaciones se mantuvieron la antigüedad, el kilometraje, el color y una constante de regresión.

Los resultados muestran una caracterización interesante del mercado de automotores usados en Argentina. Como en gran parte de la literatura, la antigüedad de construcción (modelo) y el uso (kilometraje) se muestran negativamente relacionados con el precio; o lo que es lo mismo, las décadas más recientes se asocian positivamente con el valor de los vehículos. Por el lado del tipo de combustible, los automotores que funcionan con combustible diesel están positivamente relacionados con el precio y la relación inversa se observa respecto a los vehículos que operan con gas natural comprimido (GNC). En el primer caso seguramente es debido a que, como en muchas otras economías, el combustible diesel recibe subsidios (aunque cada vez menores); mientras que, si bien el GNC también lo recibe (en montos considerables), su uso intensivo provoca un desgaste acelerado de diversas partes del motor.

Los colores amarillo, azul, blanco, gris, marrón y negro están asociados positivamente con el precio de los vehículos. En el mismo sentido, elementos de distinción y confort (como paragolpes pintados en el mismo color que la carrocería, tercera luz de freno, reproductor de DVD y asientos eléctricos) afectan positivamente el valor de reventa.

También asociado positivamente con el valor de los vehículos se encuentra el grupo de vehículos que pertenecen a la categoría de alta gama o *pick-up*. Asimismo, la categoría utilitario está asociada a precios bajos de reventa probablemente debido a que el uso más intensivo supone un desgaste más pronunciado en el vehículo con la consiguiente pérdida de valor.

Las marcas asociadas positivamente con la oferta de automóviles usados son BMW, Land Rover, Volvo y Mercedes Benz. Un gran número de marcas más tradicionales de automóviles de gama media se asocian a precios más bajos tales como

Chery, Chevrolet, Citroen, Daewoo, Fiat, Ford, Honda, Lada, Peugeot, Renault, Saab, Seat, Susuki y Volkswagen.

El hecho de que el auto sea importado está también asociado positivamente al valor de reventa del coche usado, precisamente marcando que el haber sido producido localmente o dentro del Mercosur está asociado negativamente al valor del vehículo. De manera notable, solo *Potencia* es la característica específica de rendimiento que ha resultado significativa.

Asimismo, la variable de ubicación del vendedor resulta relevante en determinar una tendencia positiva en los precios a medida que nos alejamos del principal mercado interno argentino, que es la ciudad de Buenos Aires. Eso no es coincidente con la contribución de Haan y De Boer (2010), quienes encuentran que la aparición de Internet anuló la dispersión regional de precios de los autos usados en Holanda; aunque el resultado se asemeja más a Erdem y Şentürk (2009) que encuentran que Estambul, principal mercado urbano de Turquía, mantiene un precio de reventa del vehículo usado más bajo. La Tabla 4 resume qué aportes son o no coincidentes con nuestros hallazgos en distintas contribuciones. Esa misma información refleja también los hallazgos originales.

5. Conclusiones

El trabajo ha realizado un clásico análisis hedónico para evaluar la potencial afectación de diversas características de un vehículo usado al precio en mercados en línea. Los resultados muestran que diversas características halladas como significativas para determinar el precio en otros trabajos académicos también se observan en el análisis de la muestra capturada en línea. En este sentido, podemos mencionar que precios más bajos de venta se asocian a automóviles con las siguientes características: mayor antigüedad, mayor kilometraje, uso de gas natural comprimido como combustible, ciertas marcas específicas de autos populares y producción nacional o dentro del esquema del Mercosur. En este sentido, no hay contribuciones específicas con las que comparar estos hallazgos. Sin embargo, los precios más elevados de los vehículos usados están asociados a las características siguientes: potencia del motor, uso del subsidiado combustible diesel, algunos colores específicos, categoría de alta gama, ser importado y ser *pick-up*. Otras características de confort que afectan en el mismo sentido son la presencia de reproductor de DVD, asientos eléctricos, airbag de cortina y

transmisión automática. Finalmente, la ubicación, medida como la distancia del vehículo respecto al principal tejido urbano nacional, indica que los mercados regionales cotizan precios superiores.

Tabla 4. Características asociadas positiva y negativamente al precio

Característica con relación negativa al precio		Relación con otros aportes
Kilometraje		Dexheimer (2003), Erdem y Sertürk (2009), Prado (2009), Kihm y Vance (2016),
Antigüedad		Dexheimer (2003), Erdem y Sertürk (2009), Prado (2009), Kihm y Vance (2016),
Combustible GNC		
Marca: Chery, Chevrolet, Citroen, Daewoo, Fiat, Ford, Honda, Lada, Peugeot, Renault, Saab, Seat, Susuki y Volkswagen		
Mercosur		
Nacional		
Otras características asociadas negativamente		
Ubicación		Haan y De Boer (2010) no encuentran evidencia de dispersión geográfica. Erdem y Şentürk (2009) hallan evidencia negativa de Estambul (principal ciudad).
Puertas, Utilitario		
Característica con relación positiva al precio		
Potencia		Court (1939), Houthakker (1952), Gual (1989), Andersson (2005), Kihm y Vance (2016), Mohammadian y Miller (2002), Coutont <i>et al.</i> (1996), Reis y Santos Silva (2006), Pickering <i>et al.</i> (1973)
Combustible Diesel		Gual (1989), Prado (2009), Erdem y Şentürk (2009)
Color	Amarillo, azul, blanco, gris, marrón y negro	Erdem y Şentürk (2009) encuentran que color negro y gris están asociados positivamente.
Auto alta gama	Marca: BMW, Land Rover y Mercedes Benz	Erdem y Şentürk (2009) y Atkinson y Halvorsen (1984) encuentran asociación positiva.
<i>Pick-up</i>		Mohammadian y Miller (2002)
Importado		Gual (1989), Erdem y Şentürk (2009), Atkinson y Halvorsen (1984) encuentran que el origen importado está asociado positivamente. Irandoust (1998) encuentra una relación negativa.
Otras características asociadas positivamente		
Asientos eléctricos, DVD, paragolpes pintados, tercera luz de freno, airbag de cortina		Erdem y Şentürk (2009) encuentran que techo corredizo está asociado positivamente.
Transmisión (automática)		Erdem y Şentürk (2009) encuentran que caja automática está asociada positivamente.

Fuente: elaboración propia.

En posteriores trabajos esperamos poder abocarnos al estudio de los determinantes de otras variables importantes del valor de los autos usados, como la tasa de depreciación real, y profundizar más en las diferencias regionales de precio detectadas.

Referencias

- Alberini, A.; Bareit, M. y Filippini, M. (2014): “Does the Swiss Car Market Reward Fuel Efficient Cars? Evidence from Hedonic Pricing Regressions, Matching and a Regression Discontinuity Design”. *CER-ETH Economics Working Paper* No. 14/190. Recuperado de <http://ssrn.com/abstract=2380034>.
- Andersson, H. (2005): “The Value of Safety as Revealed in the Swedish Car Market: An Application of the Hedonic Pricing Approach”. *The Journal of Risk and Uncertainty*, 30(3): 211-239.
- Arguea, N.M. y Hsiao, Ch. (1993): “Econometric issues of estimating hedonic price functions”. *Journal of Econometrics*, 56: 243-267.
- Atkinson, S.E. y Halvorsen, R. (1984): “A New Hedonic Technique for Estimating Attribute Demand: An Application to the Demand for Automobile Fuel Efficiency”. *The Review of Economics and Statistics*, 66 (3): 417-426.
- Baltas, G. y Saridakis, C. (2009): “Brand-name effects, segment differences, and product characteristics: an integrated model of the car market”. *Journal of Product & Brand Management* 18/2: 143–151.
- Baltas, G. y Saridakis, C. (2010): “Measuring brand equity in the car market: a hedonic price analysis”. *Journal of the Operational Research Society*, 61: 284-293.
- Brachinger, H.W. y Beer, M. (2009): “The Econometric Foundations of Hedonic Elementary Price Indices”. *Department of Quantitative Economics Working Papers* 12, Universidad de Fribourg Suiza. Recuperado de http://doc.rero.ch/record/30800/files/WP_DQE_12.pdf.
- Busse, M.; Knittel, C.R. y Zettelmeyer, F. (2013): “Are Consumers Myopic? Evidence from New and Used Car Purchases”. *American Economic Review*, 103(1): 220-256.
- Court, A.T. (1939): “Hedonic price indexes with automotive examples”. En *The Dynamics of Automobile Demand*. Nueva York: General Motors Corporation, pp. 99-119.

- Couton, C.; Gardes, F. y Thepaut, Y. (1996): “Hedonic prices for environmental and safety characteristics and the Akerlof effect in the French car market”. *Applied Economics Letters*, 3(7): 435-440.
- Cowling, K. y Cubbin, J. (1972): “Hedonic Price Indexes for United Kingdom Cars”. *The Economic Journal*, 82 (327): 963-978.
- Cropper, M.; Deck, L. y McConnell, K. (1988): “On the Choice of Functional Form for Hedonic Price Functions”. *Review of Economics and Statistics*, 70: 668-675.
- Epple, D. (1987): “Hedonic Prices and Implicit Markets: Estimating Demand and Supply Functions for Differentiated Products”. *Journal of Political Economy*, 95 (1): 59-80.
- Erdem, C. y Şentürk, I. (2009): “A Hedonic Analysis of Used Car Prices in Turkey”. *International Journal of Economic Perspectives*, 3 (2): 141-149.
- Espey, M. y Nair, S. (2005): “Automobile Fuel Economy: What Is It Worth?”. *Contemporary Economic Policy*, 23 (3): 317-23.
- Dexheimer, V. (2003): *Hedonic Methods of Price Measurement for Used Cars*. Technical Report. German Federal Statistical Office. Recuperado de https://www.destatis.de/EN/FactsFigures/NationalEconomyEnvironment/Prices/HedonicUsedCars.pdf%3F__blob%3DpublicationFile.
- Ginter, J.L.; Young, A.M. y Dickson, P.R. (1987): “A Market Efficiency Study of Used Car Reliability and Prices”. *The Journal of Consumer Affairs*, 21 (2): 258-76.
- Goodman, A.C. (1998): “Andrew Court and the Invention of Hedonic Price Analysis”. *Journal of Urban Economics*, 44: 291-298.
- Gordon, R.J. (1990): “New and Used Automobiles”. En R.J. Gordon (ed.): *The Measurement of Durable Goods Prices*. Chicago: University of Chicago Press, pp. 321-382.
- Griliches, Z. (1961): “Hedonic Price Indexes for Automobiles: An Econometric of Quality Change”. En D.S. Brady; E.F. Denison; I.B. Kravis; P.J. McCarthy; A. Rees; R. Ruggles; B.C. Swerling y G.J. Stigler (eds.): *The Price Statistics of the Federal Government*. Nueva York: National Bureau of Economic Research, pp. 137-196.

- Grubel, H.G. (1980): "International Trade in Used Cars and Problems of Economic Development". *World Development*, 8: 781-788.
- Gual, J. (1989): "Discriminación de precios y diferenciación de productos en el mercado europeo del automóvil. Un análisis descriptivo". *Investigaciones Económicas*, XIII (1): 115-135.
- Haan, M.A. y De Boer, H.-W. (2010): "Has the Internet Eliminated Regional Price Differences? Evidence from the Used Car Market". *De Economist*, 158 (4): 373-386.
- Heravi, S. y Silver, M. (2007): "Different Approaches to Estimating Hedonic Indexes". En E.R. Berndt y C.R. Hulten (eds.): *Hard-to-Measure Goods and Services: Essays in Honor of Zvi Griliches*. Chicago: University of Chicago Press, pp. 235-268.
- Houthakker, H.S. (1952): "Compensated changes in quantities and qualities consumed". *The Review of Economic Studies*, 19: 155-64.
- Iranoust, M. (1998): "Pricing Policy in the Swedish Automobile Market". *Journal of Economics and Business*, 50: 309-317.
- Kihm, A. y Vance, C. (2016): "The determinants of equity transmission between the new and used car markets: a hedonic analysis". *Journal of the Operational Research Society*, 67(10): 1250-1258.
- Krsinich, F. (2011): "Measuring the Price Movements of Used Cars and Residential Rents in the New Zealand Consumers Price Index". Trabajo presentado en la 12th Meeting of the Ottawa Group, 4-6 de mayo, Wellington, Nueva Zelanda. Recuperado de <http://www.stats.govt.nz/~media/Statistics/ottawa-group-2011/Ottawa-2011-Papers/Krsinich-2011-paper-PImethods-comparison.pdf>.
- Lacko, J.M. (1986): *Product Quality and Information in the Used Car Market*. Washington: Bureau of Economics, Federal Trade Commission.
- Lancaster, K.J. (1966): "A New Approach to Consumer Theory". *The Journal of Political Economy*, 74 (2): 132-157.
- León, S.M. (2010): "Formación del precio de oferta de los departamentos en barrios seleccionados de la ciudad de Buenos Aires: un análisis hedónico". *Anales de la*

- Asociación Argentina de Economía Política*, XLV Reunión Anual, 30pp.
Recuperado de <http://www.aaep.org.ar/anales/works/works2010/leon.pdf>
- Matas, A. y Raymond, J.-L. (2009): “Hedonic prices for cars: an application to the Spanish car market, 1981–2005”. *Applied Economics*, 41(22): 2887-2904.
- Maxwell, S.; Nye, P. y Maxwell, N. (1999): “Less pain, same gain: The effects of priming fairness in price negotiations”. *Psychology & Marketing*, 16(7): 545-562.
- Mohammadian, A. y Miller, E.J. (2002): “Estimating Expected Price of Vehicles in a Transportation Microsimulation Modeling System”. *Journal of Transportation Engineering*, 128(6): 537-541.
- Monson, M. (2009): “Valuation Using Hedonic Pricing Models” *Cornell Real Estate Review*, 7: 62-73.
- Murray, J. y Sarantis, N. (1999): “Price Quality Relations and Hedonic Price Indexes for Cars in the United Kingdom”. *International Journal of the Economics of Business*, 6:1, 5-27.
- Nair, B.P. (2004): “Use of hedonic regression methods for quality adjustments in Statistics New Zealand”. Trabajo presentado en la New Zealand Association of Economists 2004 Annual Conference, 30 de junio-2 de julio, Wellington, Nueva Zelanda. Recuperado de <http://www.stats.govt.nz/~media/Statistics/surveys-and-methods/methods/research-papers/NZAE/2004/use-of-hedonic-regression-methods-for-quality-adjustments-in-snz.pdf>.
- Nuñez Tabales, J.M.; Caridad y Ocerín, J.M. y Rey Carmona, F.J. (2013): “Artificial Neural Networks for Predicting Real Estate Prices”. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, 15: 29-44.
- Ohta, M. y Griliches, Z. (1976): “Automobile Prices Revisited: Extensions of the Hedonic Hypothesis”. En N.E. Terleckyj (ed.): *Household Production and Consumption*. Nueva York: National Bureau of Economic Research, pp. 325-398.
- Pashigian, B.P. (2001): “The Used Car Price Index: A Checkup and Suggested Repairs”. *Bureau of Labor Statistics Working Papers*, 338, 36pp. Recuperado de: <http://www.bls.gov/ore/pdf/ec010060.pdf>

- Pickering, J. F.; Harrison, J.A.; Isherwood, B.C.; Hebden, J.J. y Cohen, C.D. (1973): "Are goods goods? Some empirical evidence". *Applied Economics*, 5(1): 1-18.
- Prado, S. (2009): "The European used-car market at a glance: Hedonic resale price valuation in automotive leasing industry". *Economics Bulletin*, 29(3): 2096-2109.
- Prieto, C.; Caemmerer, B. y Baltas, G. (2015): "Using a hedonic price model to test prospect theory assertions: The asymmetrical and nonlinear effect of reliability on used car prices". *Journal of Retailing and Consumer Services*, 22: 206-212.
- Reis, H.J. y Santos Silva, J.M.C. (2006): "Hedonic prices indexes for new passenger cars in Portugal (1997–2001)". *Economic Modelling*, 23(6): 890-908.
- Rosen, S. (1974): "Hedonic Prices and Implicit markets: Product Differentiation in Pure Competition". *Journal of Political Economy*, 82(1): 34-55.
- Shiratsuka, S. (1995): "Automobile Prices and Quality Changes: A Hedonic Price Analysis of the Japanese Automobile Market". *BOJ Monetary and Economic Studies*, 13 (2): 1-44.
- Silver, M. (1999): "An Evaluation of the Use of Hedonic Regressions for Basic Components of Consumer Price Indices". *Review of Income and Wealth*, 45 (1): 41-56.
- Smith, M.A.M. (1974): "International Trade in Second-Hand Machines". *Journal of Development Economics*, 1: 261-278.
- Uri, N.D. (1988): "The Market Valuation of New Car Quality". *Transportation Research Part A*, 22(5): 361-373.

Anexo

Tabla 5. Estimaciones hedónicas

VARIABLES	(1) lp	(2) lp	(3) Lp	(4) lp	(5) lp	(6) lp	(7) lp	(8) lp	(9) lp	(10) lp	(11) lp
Antigüedad	-0,0465*** (0,00378)	-0,0605*** (0,00598)	-0,0477*** (0,00584)	-0,0404*** (0,0143)	-0,0401*** (0,0132)	-0,0491*** (0,00534)			-0,0422*** (0,00646)		
KM	-1,77e-06*** (3,46e-07)		-1,99e-06*** (4,56e-07)	-1,57e-06*** (5,59e-07)	-9,91e-07* (5,34e-07)	-2,02e-06*** (4,45e-07)	-2,17e-06*** (5,28e-07)	-2,01e-06*** (5,69e-07)	-1,54e-06*** (5,22e-07)	-2,11e-06*** (5,09e-07)	-1,60e-06*** (5,03e-07)
Ubicación	0,000469*** (8,36e-05)	0,000485*** (9,76e-05)	0,000225*** (8,10e-05)	0,000505*** (9,44e-05)	0,000387*** (9,59e-05)	0,000191** (8,41e-05)	0,000400*** (9,38e-05)	0,000490*** (9,77e-05)	7,26e-05 (7,88e-05)	0,000182** (8,58e-05)	-2,16e-05 (8,07e-05)
Diesel									0,166*** (0,0538)		0,114* (0,0625)
GNC									-0,222*** (0,0845)		-0,193*** (0,0742)
Limpia-lavalunetas									-0,0371 (0,0406)		-0,00146 (0,0388)
Llantas de aleación									0,210** (0,102)		0,205** (0,0969)
Paragolpes pintados									-0,148*** (0,0538)		-0,135*** (0,0517)
Vidrios polarizados									0,0593 (0,0514)		0,0573 (0,0475)
AM/FM									0,0312 (0,0618)		0,0307 (0,0584)
Entrada auxiliar									0,0143 (0,0449)		0,0281 (0,0420)
MP3									-0,0116 (0,0529)		-0,00136 (0,0503)
Aire acondicionado									-0,0826 (0,0684)		-0,0897 (0,0593)

Alarma de luces encendidas								0,0364 (0,0512)	-0,0115 (0,0496)
Asiento trasero rebatible								-0,182*** (0,0538)	-0,125** (0,0503)
Asiento conductor regulable en altura								0,0533 (0,0509)	0,0729 (0,0522)
Cierre centralizado de puertas								0,0375 (0,0764)	-0,00162 (0,0702)
Computadora de abordo								0,0389 (0,0861)	0,0565 (0,0864)
Espejos eléctricos								0,0780 (0,0650)	0,0598 (0,0587)
Cristales eléctricos								-0,0622 (0,0710)	-0,0471 (0,0688)
Tercera luz de freno								-0,167** (0,0683)	-0,150** (0,0654)
Frenos ABS								0,117* (0,0602)	0,0590 (0,0593)
Airbag conductor								0,0659 (0,110)	0,112 (0,104)
Airbag pasajero								-0,0257 (0,103)	-0,104 (0,0956)
Alarma								0,0402 (0,0845)	0,0105 (0,0815)
Apoyacabeza en asientos traseros								-0,0177 (0,0585)	-0,0165 (0,0589)
Inmovilizador del motor								-0,0181 (0,0408)	0,0123 (0,0395)
Versión								0,0112 (0,0327)	0,0484* (0,0281)
Potencia								0,00112*** (0,000273)	0,000321 (0,000284)

Bluetooth								0,00593 (0,0475)		0,0278 (0,0458)
Caja de CD								-0,0909* (0,0516)		-0,0894* (0,0477)
Cargador de CD								0,0244 (0,0523)		0,0203 (0,0510)
Tarjeta SD								-0,0575 (0,0580)		-0,00748 (0,0532)
Entrada USB								-0,0979* (0,0547)		-0,119** (0,0539)
Apertura remota de maletero								0,0287 (0,0564)		-0,000290 (0,0530)
Climatizador automático								-0,181** (0,0912)		-0,213** (0,0868)
Faros regulables desde el interior								-0,0267 (0,0482)		-0,0438 (0,0499)
Techo corredizo								0,0343 (0,0558)		0,0986* (0,0519)
Airbags laterales								0,0773 (0,0925)		0,0686 (0,0855)
Control de tracción								0,0235 (0,0866)		0,0186 (0,0834)
Control de estabilidad								0,130 (0,0909)		0,106 (0,0866)
Faros antiniebla delanteros								0,0145 (0,0567)		0,0228 (0,0550)
Faros de xenón								0,0269 (0,0493)		0,0145 (0,0481)
Asiento de bebé								-0,0187 (0,0598)		0,00104 (0,0544)
Faros antiniebla traseros								-0,0567 (0,0538)		-0,0152 (0,0500)

Repartidor electrónico de fuerza de frenado								0,00772 (0,0602)		-0,0322 (0,0591)
Comando satelital estéreo								-0,00883 (0,0455)		0,0109 (0,0427)
DVD								0,189** (0,0772)		0,146** (0,0733)
Control de velocidad de crucero								0,00169 (0,0739)		-0,0154 (0,0722)
Sensor de estacionamiento								0,0474 (0,0607)		0,0718 (0,0572)
Sensor de lluvia								0,112 (0,0776)		0,137* (0,0775)
Sensor de luz								-0,00364 (0,0708)		0,0264 (0,0699)
Tapizado de cuero								0,131* (0,0671)		0,108* (0,0652)
Airbag de cortina								0,201** (0,0981)		0,188** (0,0872)
Asientos eléctricos								0,250*** (0,0806)		0,173** (0,0761)
Blindado								0,0300 (0,127)		-0,00299 (0,130)
Doble tracción								0,144 (0,114)		0,0167 (0,112)
GPS								0,0143 (0,0664)		0,0529 (0,0639)
Pasacasete								-0,130 (0,0950)		-0,129 (0,0983)
único dueño	0,0979 (0,0612)	0,0416 (0,0457)	0,0394 (0,0611)	0,0339 (0,0566)	0,0272 (0,0469)	0,0881 (0,0549)	0,0749 (0,0596)	0,0265 (0,0498)	0,0330 (0,0508)	0,0227 (0,0469)
Color = 2, -	0,393*** (0,134)	0,254** (0,105)	0,375*** (0,125)	0,124 (0,102)	0,263*** (0,0868)	0,123 (0,118)	0,361*** (0,120)	0,353*** (0,0959)	0,282*** (0,0877)	0,305*** (0,0997)

Color = 3, amarillo	2,377*** (0,216)	2,310*** (0,236)	1,886*** (0,219)	1,557*** (0,212)	1,789*** (0,209)	1,519*** (0,191)	1,681*** (0,187)	1,534*** (0,274)	1,372*** (0,185)	0,969*** (0,251)
Color = 4, azul	0,538*** (0,142)	0,290*** (0,108)	0,529*** (0,135)	0,256** (0,117)	0,293*** (0,100)	0,254** (0,125)	0,454*** (0,131)	0,280*** (0,102)	0,294*** (0,102)	0,214** (0,109)
Color = 5, beige	0,205 (0,234)	0,0841 (0,261)	0,0166 (0,252)	-0,172 (0,290)	0,0930 (0,221)	-0,229 (0,236)	0,0248 (0,254)	0,177 (0,225)	-0,0545 (0,223)	0,0402 (0,244)
Color = 6, blanco	0,466*** (0,132)	0,259** (0,102)	0,490*** (0,122)	0,236** (0,104)	0,242*** (0,0863)	0,210* (0,116)	0,490*** (0,118)	0,313*** (0,0943)	0,295*** (0,0863)	0,212** (0,0893)
Color = 7, Bordó	0,380* (0,199)	0,314* (0,171)	0,483** (0,211)	0,163 (0,167)	0,312* (0,167)	0,223 (0,207)	0,460** (0,205)	0,315** (0,143)	0,371** (0,188)	0,341** (0,173)
Color = 8, celeste	0,242* (0,146)	0,261** (0,132)	0,274* (0,145)	0,168 (0,125)	0,265*** (0,0810)	-0,0598 (0,165)	0,186 (0,133)	0,0719 (0,130)	0,254** (0,106)	0,0807 (0,123)
Color = 9, champagne	0,365** (0,163)	0,194 (0,136)	0,325** (0,151)	-0,0173 (0,132)	0,221* (0,130)	-0,0353 (0,150)	0,341** (0,144)	0,207 (0,126)	0,133 (0,149)	0,0900 (0,130)
Color = 10, gris	0,443*** (0,124)	0,248*** (0,0919)	0,428*** (0,112)	0,175* (0,0917)	0,253*** (0,0686)	0,181* (0,107)	0,415*** (0,108)	0,280*** (0,0831)	0,267*** (0,0724)	0,214** (0,0866)
Color = 11, marrón	0,788*** (0,119)	0,608*** (0,0935)	0,771*** (0,108)	0,585*** (0,0882)	0,447*** (0,124)	0,359*** (0,108)	0,868*** (0,106)	0,187 (0,168)	0,415*** (0,120)	0,171 (0,192)
Color = 12, negro	0,554*** (0,129)	0,252*** (0,0959)	0,525*** (0,118)	0,242** (0,0971)	0,292*** (0,0750)	0,290*** (0,110)	0,489*** (0,112)	0,387*** (0,0853)	0,281*** (0,0783)	0,251*** (0,0910)
Color = 13, otro	0,679*** (0,197)	-0,161 (0,380)	0,0870 (0,439)	-0,297 (0,425)	-0,151 (0,399)	-0,152 (0,398)	0,0149 (0,428)	-0,195 (0,359)	-0,160 (0,406)	-0,298 (0,354)
Color = 14, plata	0,530*** (0,171)	0,294** (0,121)	0,490*** (0,164)	0,226* (0,136)	0,382*** (0,107)	0,0943 (0,166)	0,457*** (0,160)	0,323** (0,126)	0,350*** (0,120)	0,273** (0,121)
Color = 15, rojo	0,336* (0,173)	0,260** (0,128)	0,246* (0,144)	0,0879 (0,123)	0,238* (0,131)	0,130 (0,127)	0,199 (0,137)	0,344*** (0,127)	0,211 (0,131)	0,302** (0,127)
Color = 16, verde	0,286* (0,158)	0,0830 (0,124)	0,249 (0,160)	-0,0108 (0,146)	0,111 (0,114)	0,0450 (0,153)	0,202 (0,155)	0,224** (0,102)	0,0568 (0,134)	0,112 (0,119)
Marca = 2, Audi		0,355*** (0,110)								
Marca = 3, BMW		0,636*** (0,144)								

Marca = 4, Bmw	0,582*** (0,207)							
Marca = 5, Chery	-0,905*** (0,154)							
Marca = 6, Chevrolet	-0,722*** (0,133)							
Marca = 7, Chrysler	0,342 (0,442)							
Marca = 8, Citrokn	-0,429*** (0,128)							
Marca = 9, Daewoo	-0,974*** (0,114)							
Marca = 10, Dodge	0,312* (0,164)							
Marca = 11, Fiat	-0,730*** (0,106)							
Marca = 12, Ford	-0,313*** (0,118)							
Marca = 13, Honda	-0,212* (0,122)							
Marca = 14, Hyundai	0,236** (0,114)							
Marca = 15, Isuzu	-0,0243 (0,115)							
Marca = 16, Jeep	0,200 (0,202)							
Marca = 17, Kia	0,0489 (0,332)							
Marca = 18, Lada	-2,166*** (0,141)							
Marca = 19, Land	0,825*** (0,127)							
Marca = 20, Mercedes	0,576***							

Marca = 22, Mini		(0,135)						
		0,0312						
		(0,130)						
Marca = 23, Mitsubishi		0,217						
		(0,166)						
Marca = 24, Nissan		0,456***						
		(0,156)						
Marca = 25, Peugeot		-0,451***						
		(0,111)						
Marca = 27, Renault		-0,660***						
		(0,113)						
Marca = 28, Saab		-0,576***						
		(0,120)						
Marca = 29, Seat		-0,729***						
		(0,103)						
Marca = 30, Subaru		0,332						
		(0,252)						
Marca = 31, Suzuki		-0,665***						
		(0,227)						
Marca = 33, Toyota		0,0220						
		(0,146)						
Marca = 34, Volkswagen		-0,317***						
		(0,104)						
Marca = 35, Volvo		0,388***						
		(0,142)						
Relkil/año	-4,60e-06*							
	(2,70e-06)							
Decada = 1990			-0,413	-0,402*	0,331*	0,157	0,175	0,0927
			(0,268)	(0,241)	(0,181)	(0,178)	(0,170)	(0,180)
Decada = 2000			0,0335	0,0253	1,137***	0,983***	0,880***	0,707***
			(0,349)	(0,319)	(0,158)	(0,153)	(0,151)	(0,168)
Decada = 2010			0,0579	0,136	1,389***	1,232***	1,187***	1,007***

				(0,413)	(0,378)		(0,164)	(0,158)		(0,152)	(0,165)
Puertas					-0,104***						
					(0,0276)						
Transmisión					0,564***						
					(0,0499)						
Importado						0,290***					
						(0,0686)					
Alta gama						0,512***				0,723***	0,463***
						(0,0730)				(0,0541)	(0,0555)
Utilitario						-0,0664				-0,0452	
						(0,0615)				(0,0570)	
Pick-Up						0,383***				0,356***	0,256**
						(0,102)				(0,0984)	(0,112)
Mercosur							-0,584***				
							(0,0568)				
Argentina								-0,188***			
								(0,0488)			
Constante	12,37***	11,90***	12,45***	11,86***	11,78***	11,93***	10,81***	10,65***	11,88***	10,66***	10,76***
	(0,0408)	(0,141)	(0,0810)	(0,469)	(0,437)	(0,0847)	(0,193)	(0,187)	(0,106)	(0,167)	(0,172)
Observaciones	918	589	602	602	582	602	602	602	602	602	602
R cuadrado	0,321	0,396	0,631	0,372	0,501	0,544	0,456	0,374	0,655	0,529	0,706
Errores estándares robustos entre paréntesis											
*** p<0,01, ** p<0,05, * p<0,1											

Selection of Variables in Small Business Failure Analysis: Mean Selection vs. Median Selection

TASCÓN, MARÍA T.

Departamento de Dirección y Economía de la Empresa

Universidad de León (España)

E-mail: m.tascon@unileon.es

CASTAÑO, FRANCISCO J.

Departamento de Dirección y Economía de la Empresa

Universidad de León (España)

E-mail: fjasg@unileon.es

ABSTRACT

This paper focuses on one of the most determinant processes in business failure assessment: Variable selection. After a preselection of variables based on previous empirical literature, we perform a statistical variable selection on a sample of small firms using both mean and median differences. As the resulting variables differ in each test, we have performed a varied group of business failure assessment methods (linear discriminant analysis, quadratic discriminant analysis, logistic discriminant analysis, k -th nearest-neighbor discriminant analysis, logit, and probit) to identify the implications of using one test or the other. Our results show that the nature of the sample determines not only the statistical variable selection test, but the most appropriate methods to assess business failure, which constitutes our main contribution. Additionally, we contribute new evidence on the addition of qualitative information (payment incidents), with previous evidence for SMEs being scarce.

Keywords: small business failure; variable selection; discriminant analysis; probit; logit; financial ratios; qualitative information.

JEL classification: C14; G17; G33; L25; M41.

MSC2010: 62P20; 91G70; 91E45; 91G40.

Selección de variables en el análisis de fracaso de empresas pequeñas: selección de medias frente a selección de medianas

RESUMEN

Este trabajo se ocupa de uno de los procesos más determinantes en la evaluación del fracaso empresarial: la selección de variables. Tras una preselección de variables basada en los resultados empíricos de la literatura previa, llevamos a cabo una selección estadística de variables sobre una muestra de empresas pequeñas, utilizando tanto diferencias en medias como diferencias en medianas. Como las variables resultantes difieren con el test, hemos utilizado un variado grupo de métodos de evaluación de fracaso empresarial (LDA, QDA, LogDA, KNNDA, *logit* y *probit*) con el fin de identificar las implicaciones de usar uno u otro test. Nuestros resultados muestran que la naturaleza de la muestra determina no solo el test de selección estadística de variables, sino también los métodos más apropiados para evaluar el fracaso empresarial, lo que constituye nuestra principal contribución. Además, el trabajo proporciona nueva evidencia sobre la adición de información cualitativa (incidencias de pago), siendo escasa la evidencia previa para pymes.

Palabras claves: fracaso en pequeñas empresas; selección de variables; análisis discriminante; *probit*; *logit*; ratios financieros; información cualitativa.

Clasificación JEL: C14; G17; G33; L25; M41.

MSC2010: 62P20; 91G70; 91E45; 91G40.



1. INTRODUCTION

The empirical testing of any hypothesis on business failure encounters problems with one or more of the three key elements that comprise the incomplete theory on business failure: The concept of failure, the model proposed and the selection of the variables chosen as discriminant factors.

Concerning the third issue, several authors (Platt and Platt, 1990; Keasey and Watson, 1991; Sueyoshi and Goto 2009b) have noted that the selection of an appropriate set of variables to implement a particular model may seem trivial but is, in fact, an important part of bankruptcy assessment. Notwithstanding, advances in this line are far less developed than those in methodologies to assess business failure.

Our work focuses on the variable selection process, making contributions to the selection based on statistical analysis. Considering the lack of theory to address our selection of potentially discriminant variables to be included in the statistical process, we check a wide sample of previous empirical works to identify those variables most frequently found significant, and the main economic features underlying the variables.

Once we have made the preselection of variables, we perform a statistical variable selection specifically oriented to the most problematic group of firms concerning data treatment: Small firms. We first apply the mean differences test, which is the most commonly used, and then the rank sum test (a median differences test), which has recently been introduced though not frequently used. Our results show that the significant variables differ radically between the tests. Consequently, the main contribution of our work is the identification of the implications of using mean of median differences to select variables when using a variety of models: Linear discriminant analysis (LDA), quadratic discriminant analysis (QDA), logistic discriminant analysis (logDA), *k*th nearest-neighbor discriminant analysis (KNNDA), logit, and probit.

Our results show that the nature of the sample determines not only the most appropriate statistical variable selection test but also the most appropriate methods to assess business failure. Small firms are usually characterized by variables far from being normally distributed. Thus, our sample of small firms is a clear example of inadequacy of the mean differences test to select the most discriminant variables for failure, since the mean is not a good representation of the value for the variables. Furthermore, we find that parametric models obtain more biased results than non-parametric models when the variables studied are not normally distributed. We get to this conclusion after investigating how the results change when three types of changes are applied: (a) the treatment of data to eliminate outliers by winsorization; (b) the addition of a qualitative variable, i.e. legal incidents, contributing to previous literature by providing new supporting evidence on the role of this type of information in business failure analysis for small firms; and (c) the solving of data imbalance, avoiding sample bias by weighting failed firms instead of taking samples of not-failed firms.

2. LITERATURE REVIEW

The stream of literature related to our study is the one referred to business failure modeling, in which we consider both the appropriate variables and the methodological approximations for a good specification of the problem, which should permit an accurate classification of firms.

2.1. Variables

The absence of a formal theoretical model of the connections among the business failure, internal and/or external economic-financial factors, the economic concerns of the various related agents, and management performance has caused changes in the variable selection procedures. Over the last several decades, the variables included in business failure models have been selected less frequently based on economic reasoning and more frequently based on empirical experience gathered in previous studies (Scott, 1981). This is the common use in empirical works trying to accumulate evidence on the performance of known methods previously applied to business failure. In addition, the use of statistical methods, which can quantify the most discriminant statistically significant variables, is growing. However, those works proposing new methods or relevant innovations to any existing method tend to select the same variables as the empirical works they are compared to (Tascón and Castaño, 2012).

The statistical selection of variables may result in some drawbacks, as several authors have noted: Some empirical results are sample-specific and cannot be extrapolated to other samples (Keasey and Watson, 1991); interrelated factors may generate correlation problems, which could explain why the signs of some variables in certain models seem to be contrary to those that are economically sound (Balcaen and Ooghe, 2006); and some *a priori* relevant factors, such as liquidity, indebtedness, profitability, or activity, might be occasionally discarded (Dambolena and Khoury, 1980).

To identify the most discriminant variables used in the literature, we follow Tascón and Castaño¹ (2012) as our main reference because it complements the study of frequencies of individual variables with a study of frequencies of the economic features behind the variables. To determine whether the variables identified as more discriminant in general are also found to be discriminant in SMEs, we have analyzed² a sample of 23 empirical works, dated from 1987 to 2012, in which a wide variety of methodologies are applied (detailed information is included in Appendix A). Table 1 shows the economic features underlying the most frequently found significant variables, whereas Table 2 shows the most frequent discriminant variables, which are accounting ratios.

Table 1. Economic features underlying the variables

Economic features	Items	%	Num. ratios
Indebtedness	44	16.36	26
Asset structure	43	15.99	21
Profitability	41	15.24	22
Asset turnover	34	12.64	21
Equilibrium assets-liabilities	33	12.27	18
Profit margin	28	10.41	16
Other ratios	38	14.13	23
Variables (other than ratios)	8	2.97	8
Total	269	100.00	155

¹ Unlike similar previous reviews—for example, Daubie and Meskens (2002), and Bellovary *et al.* (2007)—, it includes Spanish empirical works in its international review and thereby constitutes a better base of comparison for the sample of Spanish small firms used in the subsequent empirical analysis. Tascón and Castaño (2012) analyze forty empirical works, from 1966 to 2009.

² Most empirical works internationally are performed on listed firms, but in Spain, which has a small stock exchange market, most empirical studies on business failure have been performed on SMEs. Tables containing all of the information are included in Appendix A.

Table 2. Most frequent ratios

EXPLANATORY VARIABLES	Num.works
Current Assets/Current Liabilities	8
Cash Flow/Total Assets	8
EBIT/Total Assets	7
Total Debt/Total Assets	7
Current Assets/ Total Assets	6
Sales/Total Assets	6
EBIT/Financial expenses	5
Net Income/Total Assets	4
Net income/Sales	4
Financial Expenses/Total Debt	4

In contrast to the reviews on firms of any size, ratios with retained profits are found to be considerably less discriminant, consistent with equity being less representative of the evolution of SMEs. In terms of economic features, indebtedness and asset structure appear as more discriminant than profitability. As expected, accounting variables are used even more frequently (97%) than other variables. After verified that they are a representative group of proxies for the strengths/weaknesses of SMEs as well, we take the 10 financial ratios³ most frequently found significant in past theoretical and empirical literature on business failure, according to Tascón and Castaño (2012). Next, in this section, we provide with a description of these variables and briefly explain how they contribute to the assessment of business failure.

As a complement to accounting ratios, data from sources other than financial statements have been used in empirical works. Some non-financial variables with incremental explanatory ability include the existence of reservations/observations in the audit report (Peel and Peel, 1987), especially in small firms when the observations change from one period to another (Keasey and Watson, 1987); delays in the publication of financial statements (Ohlson, 1980; Peel and Peel, 1987; Somoza, 2002); the time passed from the end of the period to the date in which the financial statements were published (Peel *et al.*, 1986); and some incidents with payments (Altman *et al.*, 2008). Out of these interesting factors, we only could obtain information on one, legal incidents, which is included in our empirical analysis as a dummy variable to check the added ability of qualitative information to delimitate the potential business failure of SMEs.

TD/TA, total debt/total assets, is a leverage measure that indicates a long-term financial obligation. An increase in leverage would increase the probability of financial distress, as a reduction in cash flows could lead to insufficient funds to service debts, resulting in bankruptcy. In general, a positive relationship can be expected between indebtedness and business failure.

CA/CL, current assets/current liabilities, is a measure of short-term economic-financial equilibrium. As trade credits are a large proportion of small firms' liabilities

³ Considering the fewer number of works on SMEs, we have decided to use the selection of most frequent ratios resulting from the general survey performed by Tascón and Castaño (2012), in which eight ratios are the same and another one proxies for the same feature as in our survey on SMEs. The first eight variables are the most frequent variables. The ninth and tenth ratios have been selected as the most frequent representatives for the following two features (profit margin and asset turnover) not proxied by the previous eight ratios.

(Altman *et al.*, 2008), and credit to customers is extended in periods of financial stress, small firm bankruptcies would be primarily influenced by this type of debt.

EBIT/TA, earnings before interests and taxes/total assets, is a measure of economic profitability.

NI/TA, net income/total assets, is a more general measure of economic profitability.

CA/TA, current assets/total assets, is a measure of economic structure.

RP/TA, retained profit/total assets, is a measure of the cumulative profitability and may be a measure of the age of the firm. It indicates the ability of the firm to protect itself against potential future risks; therefore, a negative correlation with business failure can be expected.

FE/TD, financial expenses/total debt, is a measure of financial cost indicative of indebtedness and risk.

CF/TD, cash flow/total debt, is a measure of liquidity.

NI/SL, net income/sales, is a relevant driver of profitability. The greater the proportion of sales that becomes net income, the more efficient the firm is.

SL/TA, sales/total assets, acts as a multiplier of margin to increase profitability when positive.

Incidents indicates the occurrence of 'event' data, such as evidence of company default on credit agreements, trade credit payments and/or debts with any Public Administration organism. Two groups of incidents are considered: Judicial incidents and claims from Public Administration organisms. Judicial incidents gather all of those claims against a firm made to the court by a person of another firm. Claims from Public Administration organisms, such as Social Security, the Treasury or a city/town council, include concepts such as social securities, fines, and taxes that are unpaid at maturity. The variable takes the value 0 if a firm has not received any 'public' claim (neither judicial incidents nor Public Administration claims), 1 if the firm has been publicly claimed by only one of these groups of incidents, and 2 if the firm has appeared in both groups of public claims.

As a general idea, we can hypothesize that firms are financially more vulnerable to insolvency and hence, more likely to fail if they have poor liquidity measures, such as: Cash flows; poor profitability measures, such as net income or operating earnings; poor performance measures, such as margin or turnover; and higher indebtedness and risk measures, such as financial expenses and payment incidents.

2.2. Models

As several well-known works on literature reviews (Zavgren, 1983; Jones, 1987; Altman, 1993; Balcaen and Ooghe, 2006) and many empirical studies have compared different methodologies to identify their advantages and drawbacks, we merely report some of their conclusions referred to the methodologies used in our subsequent empirical analysis. In

previous decades, business failure literature has been dominated by statistical discriminant analysis (DA) and logistic regression as econometric approaches (Aziz and Dar, 2006; Premachandra *et al.*, 2009).

DA uses a function to get a by-firm score that allows us to classify items into *a priori* defined classes, given a cutoff point. Variables can be quantitative and qualitative. Non-relevant variables for a univariate analysis may contribute significant information in DA models, which combine several variables (Altman, 1968). When the independent variables are quantitative, some assumptions are needed: Multivariate normality in the distribution of independent variables, homoscedasticity, representative sample sizes, as well as discrete, identifiable and not overlapping groups of firms, and finally specified failure probabilities and misclassification costs.

Several authors (Eisenbeis, 1977; Collins and Green, 1982; García Ayuso, 1995) show that accounting ratios hardly satisfy the normality hypothesis. When this limitation is overcome, either by transforming or eliminating extreme values, the model is distorted (Balcaen and Ooghe, 2006). Empirical works tend to transform data to reduce dispersion (Taffler, 1982) instead of using a quadratic model, which would solve the problem using the original data (Zavgren 1983), because the quadratic model only performs better than the linear model in very specific conditions (Balcaen and Ooghe, 2006).

A number of recent techniques have been developed to solve various drawbacks of the basic DA. In the current paper, we have used linear DA and quadratic DA as well as logistic DA and *k*th nearest-neighbor DA, the latter two being partially parametric and nonparametric techniques, respectively, unlike the first two.

The logistic regression (LR) is applied by Martin (1977) to avoid the drawbacks of DA. The binary logistic regression (binary logit) is a regression analysis in which the dependent variable takes values in the interval [0, 1] to indicate the probability of group membership; e.g., that of healthy firms or that of failed firms. Coefficients of independent variables can be interpreted as measuring the relative weight of the selected factors to explain the likelihood of failure generated by the model (Ohlson, 1980; Zavgren, 1985; Laitinen and Kankaanpää, 1999).

The logistic regression technique is more flexible than DA, as it can work with non-proportional samples (Hair *et al.*, 1999). It does not require normally distributed variables or equal dispersion matrices (Ohlson, 1980; Zavgren, 1983). However, it is assumed that the dependent variable is dichotomic and that both groups are identifiable, discrete and without overlap, which is difficult to fulfill for the population under study. In addition, the cost of misclassification errors has to be considered to establish a model cutoff point between healthy and failed firms, while these costs are highly subjective. Balcaen and Ooghe (2006) note that logistic analysis models are very sensible to multicollinearity, extreme values, and missing values.

A common source of problems in DA and LR models is the incorporation of *a priori* probabilities for the respective groups (Premachandra *et al.*, 2009). Eisenbeis (1977) suggests that an equally likely occurrence of failure and not-failure is assumed in a particular sample. Even though for matched pair sampling this is adequate, when a population or a random sample is analysed, it is unlikely that the population of potential failed firms will be 50%. In

our study we have used equal priors in the displayed tables, but we have repeated all the empirical analyses using proportional priors, as a robustness analysis.

Probit models use an accumulative normal distribution instead of a logistic distribution, but previous comments on logit are applicable to the rest. Concerning the comparison between logit and probit, Baum (2006) find that a sample in which the proportion of probabilities is quite different will be sensitive to the choice of the cumulative distribution function. Therefore, as the logistic distribution (logit) has fatter tails, it should result in a better fit of the model.

Empirical literature shows other methods to assess business failure, such as different types of neural networks (Ravi Kumar and Ravi, 2007), data envelopment analysis (Premachandra *et al.*, 2009) and boosting (Sun *et al.*, 2014), for which the variable selection analysis made in this work could be applicable.

3. METHODOLOGY

This section contains a brief description of the methods used. The modeling is performed using Stata software. Besides, we statistically describe the 10 variables selected in Section 2.1. We then present the results obtained in the application of business failure models.

3.1. Models used for business failure assessment

We perform four varieties of discriminant analyses, as well as logit and probit. We use linear discriminant analysis (LDA), quadratic discriminant analysis (QDA), logistic discriminant analysis (logDA) and Kth nearest neighbor discriminant analysis (KNNDA). With all four models we use equal prior probabilities⁴, and hence geometric calculations (the other alternative, we have performed too as a robustness analysis, is considering proportional probabilities, in which case the probability of landing in a given group is proportional to the geometric area of that group, and they are certainly not equal). With KNNDA we want the straight line between the points, so we use the Euclidean distance.

Linear Discriminant Analysis

Starting from Fisher's approach (Fisher, 1936), LDA seeks the linear combination of the discriminating variables that provides maximal separation between the groups (originally two groups, but later extended to multiple groups). In the software used, maximal separation of groups is determined from an eigen analysis of $W^{-1}B$, where B is the between-group sum-of-squares and cross-products (SSCP) matrix, and W is the within-group SSCP matrix. The eigenvalues (characteristic values) and eigenvectors (characteristic vectors) provide what are called Fisher's linear discriminant functions.

⁴ As classifying failed firms as not-failed is considered a bigger problem (due to higher costs) setting prior probability of failed firms higher than the proportion of these firms in the population, the classification of this group is more careful than the classification of the other one. Modifying the computational priors option we can factor in the cost of misclassifying firms.

Quadratic Discriminant Analysis

As introduced by Smith (1947), it is a generalization of LDA. Both LDA and QDA assume that the observations come from a multivariate normal distribution. Unlike the LDA's assumption that the groups have equal covariance matrices, QDA allows the groups to have different covariance matrices. Given the nature of our population, we have to take into account a restriction concerning the sample sizes: if a group is relatively small, the estimation of the covariance matrix for that group may not do a good job of representing the group's population covariance, leading to inaccuracies in classification.

Logistic Discriminant Analysis

LogDA is a partially parametric method falling between parametric discrimination methods such as LDA and QDA and nonparametric discrimination methods such as k th-nearest-neighbor (KNN) discrimination (Albert and Lesaffre, 1986). Instead of making assumptions about the distribution of the data within each group, logistic discriminant analysis is based on the assumption that the likelihood ratios of the groups have an exponential form. As multinomial logistic regression provides the basis for logDA, this type of DA is appropriate for both binary and continuous discriminating variables.

k th Nearest Neighbor Discriminant Analysis

Even though KNNDA can be found at least as far back as the fifties, advanced treatments are quite more recent (McLachlan, 2004). KNNDA is a nonparametric discrimination method based on the k nearest neighbors of each observation. Compared to other methods of discriminant analysis, KNNDA is able to distinguish irregular-shaped groups.

The k th nearest-neighbor algorithm (KNN) classifies objects (firms in our case) based on closest training examples in the feature space. The KNN is one of the simplest machine-learning algorithms: An object is classified by a majority vote of its neighbors, with the object being assigned to the class most common amongst its k nearest neighbors (k is a positive integer, typically small). For example, if $k = 1$, the object is simply assigned to the class of its nearest neighbor. The same method can be used for regression, by simply assigning the property value for the object to be the average of the values of its k nearest neighbors. It can be useful to weight the contributions of the neighbors, so that the nearer neighbors contribute more to the average than the more distant ones (a common weighting scheme is to give a weight of $1/d$ to each neighbor, where d is the distance to the neighbor; this scheme is a generalization of linear interpolation). Stata offers us different similarity or dissimilarity measures, being the Euclidean distance the default option.

The neighbors are taken from the set of objects for which the correct classification (or, in the case of regression, the value of the property) is known. This can be thought of as the training set for the algorithm, though no explicit training step is required. The KNN is sensitive to the local structure of the data.

Logit

The word "logit" was coined by Berkson (1944) and is analogous to the word "probit". Logit fits maximum likelihood models with dichotomous dependent (left-hand-side) variables coded as 0/1 (or, more precisely, coded as 0 and not-0). Stata makes a maximization supporting the Huber/White/sandwich estimator of the variance and its clustered version.

Stata checks data for collinear variables and omits them if collinearity exists. Therefore, no observations need to be eliminated and model fitting proceeds without the offending variable.

This technique is based in mean analysis. In fact, when the results are $\text{prob} > \chi^2 = 0.01$; this test would have declared the means different at the 1% level. The same as the parametric discriminant analyses, where a test with $\text{prob} > F = 0.02$ is declaring the means different at the 2% level.

Probit

Probit analysis originated in connection with bioassay, and the word probit (a contraction of “probability unit”) was suggested by Bliss (1934). Probit fits maximum likelihood models with dichotomous dependent (left-hand-side) variables coded as 0/1 (more precisely, coded as 0 and not 0). Stata also checks data for collinear variables, following the same procedure as in logit.

3.2. Data and statistical variable selection

All of the data were obtained from *Iberinform Database*. In this database, the accounting variables are compiled from the Official Commercial Registry, information about the firm’s status as failed (bankrupt, dissolved, extinct) is compiled from the Spanish Official Gazette of the Commercial Registry, and data on legal incidents are compiled from the Official State Gazette, Official Gazettes of Provinces, Official Gazettes of Autonomous Communities, Website of Social Security and the press (newspapers).

Our sample is made up of Spanish construction firms⁵, classified as small according to official accounting standards⁶. The original file contained 3426 firms, of which 3230 had real values for ratio variables. Therefore, our final database consists of 3193 sets of accounts for not-failed firms and 37 for failed firms in 2008, in addition to qualitative data on the status of the firm and its public incidents on payment. The insolvency rate is approximately 1.15%. We first present the statistics and models using full accounting data, and then we present the statistics and modeling results for winsorized accounting ratios.

The variables pre-selected as explained in Section 2.1 are: Total debt/ total assets, current assets/ current liabilities, earnings before interests and taxes/ total assets, net income/ total assets, current assets/ total assets, retained profit/ total assets, financial expenses/ total debt, cash flow/ total debt, net income/ sales, and sales/ total assets. Table 3 displays the correlation matrix among the financial ratios and the additional firm-specific (but not accounting) variable. The correlation coefficients are relatively low, except for those between the profitability ratios and between several ratios divided by total assets.

⁵ To develop all the methodologies used in this work, the sample has been selected by taking the whole population of construction firms in a Spanish Autonomous Community (Castilla and Leon) for which the number of firms was near the maximum number that the software could manage.

⁶ The European Union definition was updated in 2003 (Commission Recommendation 2003/361/EC May 6). Enterprises qualify as small enterprises if they fulfill the following criteria: Fewer than 50 employees, less than or equal to €10million in sales, and less than or equal to €10 million in total assets.

Table 3. Panel A: Correlation matrix

	Failure	r1	r2	r3	r4	r5	r6	r7	r8	r9	r10	incident
Failure	1.0000											
r1= TD/TA	-0.0011	1.0000										
r2= CA/CL	-0.0029	-0.0023	1.0000									
r3= EBIT/TA	-0.0108	-0.9057*	0.0031	1.0000								
r4= NI/TA	-0.0052	-0.9773*	0.0023	0.9692*	1.0000							
r5= CA/TA	0.0147	-0.0024	0.0260	-0.0049	0.0354	1.0000						
r6= FE/TD	0.1593*	-0.0006	0.0375	0.0024	0.0018	-0.0126	1.0000					
r7= RP/TA	-0.0021	0.9995*	-0.0015	-0.8940*	-0.9714*	-0.0011	-0.0006	1.0000				
r8= CF/TD	0.0471*	-0.0036	0.4113*	0.0343	0.0189	0.0096	0.5289*	-0.0018	1.0000			
r9= NI/SL	0.0012	0.0002	-0.0000	0.0084	0.0044	-0.0062	0.0027	0.0001	0.0240	1.0000		
r10= SL/TA	0.0038	0.8138*	-0.0032	-0.6477*	-0.7883*	-0.3350*	-0.0144	0.8173*	-0.0037	0.0015	1.0000	
incidents	0.1794*	0.1057*	-0.0081	-0.0914*	-0.0978*	-0.0199	0.0041	0.1051*	-0.0227	0.0014	0.0808*	1.0000

Panel B: Correlation matrix, winsorized ratios

	Failure	wr1	wr2	wr3	wr4	wr5	wr6	wr7	wr8	wr9	wr10	incident
Failure	1.0000											
wr1= TD/TA	0.0546*	1.0000										
wr2= CA/CL	-0.0047	-0.2632*	1.0000									
wr3= EBIT/TA	-0.0906*	-0.5407*	0.0550*	1.0000								
wr4= NI/TA	-0.0999*	-0.5879*	0.0656*	0.9719*	1.0000							
wr5= CA/TA	0.0215	-0.1396*	0.1469*	0.1595*	0.1724*	1.0000						
wr6= FE/TD	0.0193	-0.0274	0.1200*	0.0830*	0.0011	-0.0811*	1.0000					
wr7= RP/TA	-0.0127	0.3276*	-0.0047	-0.1929*	-0.2100*	-0.0788*	-0.0615*	1.0000				
wr8= CF/TD	-0.0325	-0.4451*	0.2458*	0.5925*	0.6009*	0.0401	-0.0240	0.0182	1.0000			
wr9= NI/SL	-0.0384	-0.2497*	-0.1024*	0.3873*	0.3974*	0.0778*	-0.0056	-0.0880*	0.3025*	1.0000		
wr10= SL/TA	0.0189	0.1653*	-0.1781*	-0.0521*	-0.0957*	0.0208	0.1062*	0.1581*	0.0433	0.1265*	1.0000	
incidents	0.1794*	0.1497*	-0.0346	-0.1304*	-0.1421*	-0.0025	0.0542*	0.0081	-0.1134*	-0.0679*	-0.0026	1.0000

NOTES: TD/TA is total debt/ total assets; CA/CL is current assets/ current liabilities; EBIT/TA is earnings before interests and taxes/ total assets; NI/TA is net income/ total assets; CA/TA is current assets/ total assets; RP/TA is retained profit/ total assets; FE/TD is financial expenses/ total debt; CF/TD is cash flow/ total debt; NI/SL is net income/ sales; and SL/TA is sales/ total assets.

* significance at the 1% level.

To avoid the influence of extreme values on some statistics but retaining the same number of observations, we have winsorized the ratios. For this procedure, the bottom 1% of the values are set equal to the 1st percentile, while the upper 1% are set equal to the 99th percentile. This technique reduces the effect of outliers and brings the corrected data mean closer to the median with a reduction in the standard deviation. After winsorizing the variables, all correlation coefficients are relatively low, except for that between the profitability ratios, r3 and r4 (Table 3, Panel B).

In Table 4, we report the mean, median, standard deviation and skewness of the variables for failed and not-failed firms separately. It can be appreciated that using the full accounting data mean values is quite different than using the median values and both the standard deviation and skewness are high. Once the ratios have been winsorized at the 1% level (Table 4, Panel B), the mean values are closer to the median values and both the standard deviations and the skewness have decreased considerably. The variables express the expected signs.

A well-known method (Peel *et al.*, 1986; Grice and Ingram, 2001; Sueyoshi and Goto, 2009a, 2009b, 2009c; Jin *et al.*, 2011) to select discriminant variables is the analysis of the mean differences (simple univariate analysis) between failed firms and not-failed firms. Table 5 (4th column) shows the results with the t-statistic results. The ratio of financial expenses to total debt is 42.96% and 3.19% for failed firms and not-failed firms, respectively. On the other hand, the ratio of accounting cash flow to total debt is 141.86% and 18.90% for failed firms and not-failed firms, respectively. This spurious result derives from an extraordinary value of 8.328% for this ratio in a specific one failed firm. Once this firm is dropped, the mean value equals is -0.85, being with the difference in means being equally significant. Incidents seem to be a relevant discriminant factor, showing mean values of 0.62 for failed firms and 0.07 for not-failed firms. The difference in means between the two groups is significant at the 1% level for these three variables. The non-default group outperforms the default group in each factor.

Table 4. Panel A: Descriptive statistics

Failure	variable	n	Mean	median	St.dev.	skewness
not-failed	r1= TD/TA	3193	1.464248	0.7783218	35.13914	56.26852
not-failed	r2= CA/CL	3193	4.992888	1.274884	65.81954	30.69193
not-failed	r3= EBIT/TA	3193	-0.0345993	0.0444596	2.19314	-41.647
not-failed	r4= NI/TA	3193	-0.0876411	0.0159537	3.849023	-51.79087
not-failed	r5= CA/TA	3193	0.7268043	0.7864155	0.3425963	9.195928
not-failed	r6= FE/TD	3193	0.0319486	0.0214282	0.0583653	13.70667
not-failed	r7= RP/TA	3193	0.810277	0.1062388	32.54369	56.31467
not-failed	r8= CF/TD	3193	0.1890471	0.0608538	2.319081	23.02114
not-failed	r9= NI/SL	3193	-0.5259805	0.0124977	26.23841	-48.29314
not-failed	r10= SL/TA	3193	1.815489	1.381083	22.46602	18.59462
not-failed	incidents	3193	0.0720326	0	0.3133578	4.695205
Failed	r1= TD/TA	37	1.09844	0.9751387	1.010565	3.7524
Failed	r2= CA/CL	37	3.23058	1.057278	11.17866	5.727102
failed	r3= EBIT/TA	37	-0.2554667	-0.0164002	0.7124744	-2.656331
failed	r4= NI/TA	37	-0.2745696	-0.0354618	0.6439843	-2.230388
failed	r5= CA/TA	37	0.774168	0.8938961	0.2734852	-1.460193
failed	r6= FE/TD	37	0.4296611	0.032181	2.422027	5.832577
failed	r7= RP/TA	37	0.1619858	0.0299024	0.6085422	3.317699
failed	r8= CF/TD	37	1.418611	-0.0286602	14.66338	4.637255
failed	r9= NI/SL	37	-0.2360054	-0.0441338	0.5619837	-3.127511
failed	r10= SL/TA	37	2.612674	1.475444	5.620027	5.245937
failed	incidents	37	0.6216216	0	0.720777	0.694475

Panel B: Descriptive statistics, winsorized ratios

failure	variable	n	Mean	median	St.dev.	skewness
not-failed	wr1= TD/TA	3193	0.7876563	0.7783218	0.4490908	2.483903
not-failed	wr2= CA/CL	3193	2.783909	1.274884	5.769318	5.38778
not-failed	wr3= EBIT/TA	3193	0.022242	0.0444596	0.220357	-2.688866
not-failed	wr4= NI/TA	3193	-0.0056056	0.0159537	0.1911801	-3.040909
not-failed	wr5= CA/TA	3193	0.7263177	0.7864155	0.2373353	-0.9497068
not-failed	wr6= FE/TD	3193	0.0297533	0.0214282	0.032074	1.978609
not-failed	wr7= RP/TA	3193	0.1956719	0.1062388	0.3814027	2.493171
not-failed	wr8= CF/TD	3193	0.1211922	0.0608538	0.3389109	2.552918
not-failed	wr9= NI/SL	3193	-0.0638995	0.0124977	0.475318	-6.155788
not-failed	wr10= SL/TA	3193	1.661431	1.381083	1.448189	2.268183
not-failed	incidents	3193	0.0720326	0	0.3133578	4.695205
failed	wr1= TD/TA	37	1.019683	0.9751387	0.6442166	1.777834
failed	wr2= CA/CL	37	2.527121	1.057278	6.940696	5.563727
failed	wr3= EBIT/TA	37	-0.1692527	-0.0164002	0.4425078	-1.603176
failed	wr4= NI/TA	37	-0.1896237	-0.0354618	0.4113469	-1.710292
failed	wr5= CA/TA	37	0.7744578	0.8938961	0.2726751	-1.451836
failed	wr6= FE/TD	37	0.0355791	0.032181	0.0330995	2.367284
failed	wr7= RP/TA	37	0.1500051	0.0299024	0.4884795	2.808293
failed	wr8= CF/TD	37	0.0164868	-0.0286602	0.5752716	2.43246
failed	wr9= NI/SL	37	-0.2360054	-0.0441338	0.5619837	-3.127511
failed	wr10= SL/TA	37	1.919005	1.475444	1.894715	1.989572
failed	incidents	37	0.6216216	0	0.720777	0.694475

NOTES: TD/TA is total debt/ total assets; CA/CL is current assets/ current liabilities; EBIT/TA is earnings before interests and taxes/ total assets; NI/TA is net income/ total assets; CA/TA is current assets/ total assets; RP/TA is retained profit/ total assets; FE/TD is financial expenses/ total debt; CF/TD is cash flow/ total debt; NI/SL is net income/ sales; and SL/TA is sales/ total assets.

Considering the results obtained, failed firms generate lower cash flows, have higher financial expenses, and suffer legal incidents in a higher proportion than not-failed firms. The mean differences test shows the expected results considering the correlation analysis of the explanatory variables with the failure variable.

However, this type of analysis (mean differences) requires that the populations being compared be normally distributed. In addition, a substantial proportion of the accounting variables shows high-dispersion distributions, in which the median values are more representative than the mean values. Hence, we have performed a nonparametric test to compare two groups: the Wilcoxon rank sum test (also called Mann-Whitney-Wilcoxon). This test has been used to select variables in a bankruptcy assessment process in recent works, such

as Premachandra *et al.* (2009). Its main advantages are that it does not assume that the populations being compared are normally distributed, it uses only ranks, and it is not sensitive to outliers.

Table 5. Descriptive statistics by success/failure status of firms and tests on differences

Variable	Failed firms n = 37 Mean Median (Std. dev.) [Skewness]	Not-failed firms n = 3193 Mean Median (Std. dev.) [Skewness]	Difference in means (t-statistic)	Two sample Wilcoxon rank-sum test between medians (Z) [p-value> (Z)]
r1= TD/TA	1.0984 0.9751 (1.0105) [3.7524]	1.464 0.7783 (35.1391) [56.2685]	0.3658 (0.0633)	-3.551 [0.0004]***
r2= CA/CL	3.2305 1.0572 (11.1786) [5.7271]	4.9928 1.2748 (65.8195) [30.6919]	1.7623 (0.1628)	1.715 [0.0864]*
r3= EBIT/TA	-0.2554 -0.0164 (0.7124) [-2.6563]	-0.0345 0.0444 (2.1931) [-41.647]	0.2208 (0.6121)	3.093 [0.0020]***
r4= NI/TA	-0.2745 -0.0354 (0.6439) [-2.2303]	-0.0876 0.0159 (3.8490) [-51.7908]	0.1869 (0.2953)	4.112 [0.0000]***
r5= CA/TA	0.7741 0.8938 (0.2734) [-1.4601]	0.7268 0.7864 (0.3425) [9.1959]	-0.0473 (-0.8378)	-1.977 [0.0480]**
r6= FE/TD	0.4296 0.3221 (2.4220) [5.8325]	0.0319 0.0214 (0.0583) [13.7066]	-0.3977 (-9.1707)***	-1.641 [0.1007]
r7= RP/TA	0.1619 0.0299 (0.6085) [3.3176]	0.8102 0.1062 (32.5436) [56.3146]	0.6482 (0.1212)	2.272 [0.0231]**
r8= CF/TD	1.4186 -0.0286 (14.6633) [4.6372]	0.1890 0.0608 (2.3190) [23.0211]	-1.2295 (-2.6770)***	4.476 [0.0000]***
r9= NI/SL	-0.2360 -0.0441 (0.5619) [-3.1275]	-0.5259 0.0124 (26.2384) [-48.2931]	-0.2899 (-0.0672)	4.302 [0.0000]***
r10= SL/TA	2.6126 1.4754 (5.6200) [5.2459]	1.8154 1.3810 (22.4660) [18.5946]	-0.7971 (-0.2157)	-0.436 [0.6625]
Incidents	0.6216 0 (0.7207) [0.6944]	0.0720 0 (0.3133) [4.6952]	-0.5495 (-10.3621)***	-10.838 [0.0000]***

NOTES: The full sample contains 3,230 firm observations during 2008. Variable definitions: TD/TA is total debt/ total assets; CA/CL is current assets/ current liabilities; EBIT/TA is earnings before interests and taxes/ total assets; NI/TA is net income/ total assets; CA/TA is current assets/ total assets; RP/TA is retained profit/ total assets; FE/TD is financial expenses/ total debt; CF/TD is cash flow/ total debt; NI/SL is net income/ sales; and SL/TA is sales/ total assets.

* significance at the 10% level based on a two-tailed test

** significance at the 5% level based on a two-tailed test

*** significance at the 1% level based on a two-tailed test.

Table 6. Descriptive statistics by success/failure status of firms, tests of differences, winsorized ratios

Variable	Failed firms n = 37 Mean Median (Std. dev.) [Skewness]	Not-failed firms n = 3193 Mean Median (Std. dev.) [Skewness]	Difference in means (t-statistic)	Two sample Wilcoxon rank-sum test between medians (Z) [p-value> (Z)]
wr1= TD/TA	1.0196 0.9751 (0.6442) [1.7778]	0.7876 0.7783 (0.4490) [2.4839]	-0.2320 (-3.1063)***	-3.551 [0.0004]***
wr2= CA/CL	2.5271 1.0572 (6.9406) [5.5637]	2.7839 1.2748 (5.7693) [5.3877]	0.2567 (0.2685)	1.714 [0.0866]
wr3= EBIT/TA	-0.1692 -0.0164 (0.4425) [-1.6031]	0.0222 0.0444 (0.2203) [-2.6888]	0.1914 (5.1689)***	3.094 [0.0020]***
wr4= NI/TA	-0.1896 -0.0354 (0.4113) [-1.7102]	-0.0056 0.0159 (0.1911) [-3.0409]	0.1840 (5.7069)***	4.118 [0.0000]***
wr5= CA/TA	0.7744 0.8938 (0.2726) [-1.4518]	0.7263 0.7864 (0.2373) [-0.9497]	-0.0481 (-1.2245)	-1.976 [0.0481]**
wr6= FE/TD	0.0355 0.0321 (0.3309) [2.3672]	0.0297 0.0214 (0.0320) [1.9786]	-0.0058 (-1.0981)	-1.638 [0.1015]
wr7= RP/TA	0.1500 0.0299 (0.4884) [2.8082]	0.1956 0.1062 (0.3814) [2.4931]	0.0456 (0.7215)	2.270 [0.0232]**
wr8= CF/TD	0.0164 -0.0286 (0.5752) [2.4324]	0.1211 0.0608 (0.3389) [2.5529]	0.1047 (1.8491)*	4.474 [0.0000]***
wr9= NI/SL	-0.2360 -0.0441 (0.5619) [-3.1275]	-0.0638 0.0124 (0.4753) [-6.1557]	0.1721 (2.1849)**	4.302 [0.0000]***
wr10= SL/TA	1.9190 1.4754 (1.8947) [1.9895]	1.6614 1.3810 (1.4481) [2.2681]	-0.2575 (-1.0714)	-0.434 [0.6641]
incidents	0.6216 0 (0.7207) [0.6944]	0.0720 0 (0.3133) [4.6952]	-0.5495 (-10.3620)***	-10.838 [0.0000]***

NOTES: The full sample contains 3,230 firm observations during 2008. Variable definitions: TD/TA is total debt/ total assets; CA/CL is current assets/ current liabilities; EBIT/TA is earnings before interests and taxes/ total assets; NI/TA is net income/ total assets; CA/TA is current assets/ total assets; RP/TA is retained profit/ total assets; FE/TD is financial expenses/ total debt; CF/TD is cash flow/ total debt; NI/SL is net income/ sales; and SL/TA is sales/ total assets.

* significance at the 10% level based on a two-tailed test

** significance at the 5% level based on a two-tailed test

*** significance at the 1% level based on a two-tailed test.

On the other hand, it also has some disadvantages: Nonparametric methods are often less sensitive (powerful) for finding true differences because they throw away information (they use only ranks); they need the full data set, not just summary statistics; and the results

do not include any confidence intervals quantifying the range of possibility for true difference between populations.

Results from a two-way Wilcoxon rank-sum test indicate that the median values for the failed and not-failed firms are significantly different for the following variables: r1, r3, r4, r8, r9, and legal incidents at the 1% level; r5 and r7 at the 5% level; and r2 at the 10% level. These results suggest that, except for r10 and r6, the accounting ratios used in the analysis are appropriate for classifying the firms as failed or healthy⁷. Using the differences in medians, we appreciate that the values in r8 are not affected by outliers, unlike in the case in which the differences in means are used instead.

Using winsorized ratios (see Table 6), the most discriminant variables identified by the mean test change considerably, becoming almost the same as those identified by the median test, which remain unchanged. This finding supports the use of the median test on dispersed and skewed samples of data, such as SME samples.

3.3. Business failure assessment

In this section we apply four discriminant analysis methods (LDA, QDA, LogDA and KNNDA) and two binary regression models (logit and probit). We perform every model with the entire group of ratio variables and with smaller groups of variables using the significant ratios for median and mean selections at the 5% and 1% levels of significance. All of the models are re-estimated with the inclusion of the qualitative non-accounting variable (legal incidents), which is significant at the 1% level in all cases.

For the LDA model (see Table 7), the best percentage of well-classified firms is obtained with the mean selection. The inclusion of the incidents variable considerably improves the selection of failed firms, while it reduces the well-classified not-failed firms in a higher quantity, resulting in a worse global percentage (except for 7 ratios)

Table 7. Linear discriminant analysis (LDA)

	All ratios		Median selection (5% and 1%)				Mean selection(1%)	
	10 ratios number (percentage)	10 ratios +inc. number (percentage)	7 ratios number (percentage)	7 ratios + inc. number (percentage)	5 ratios number (percentage)	5 ratios + inc. number (percentage)	2 ratios number (percentage)	2 ratios + inc. number (percentage)
Not-failed n=3,173	3,158 (98.90)	3,003 (94.05)	2,636 (82.56)	3,004 (94.08)	3,102 (97.15)	3,005 (94.11)	3,171 (99.31)	3,007 (94.17)
Failed n= 37	2 (5.41)	20 (54.05)	19 (51.35)	19 (51.35)	6 (16.22)	19 (51.35)	2 (5.41)	20 (54.05)
Total well classified n= 3,210	3,160 (98.44)	3,023 (94.17)	2,655 (82.71)	3,023 (94.17)	3,108 (96.82)	3,024 (94.21)	3,173 (98.84)	3,027 (94.29)

NOTES: This table contains results obtained with the LDA model taking equal priors. Ten ratios include: r1=TD/TA, total debt/ total assets; r2=CA/CL, current assets/ current liabilities; r3=EBIT/TA, earnings before interests and taxes/ total assets; r4=NI/TA, net income/ total assets; r5=CA/TA, current assets/ total assets; r6=RP/TA, retained profit/ total assets; r7=FE/TD, financial expenses/ total debt; r8=CF/TD, cash flow/ total debt; r9=NI/SL, net income/ sales; and r10=SL/TA, sales/ total assets. The median selection at the 1% level (5 ratios) include: r1, r3, r4, r8, r9; at the 5% level includes: r1, r3, r4, r5, r7, r8, r9. The mean selection at the 1% level (the same as at the 5% level) includes: r6, r8.

QDA (see Table 8) shows a big discriminant power concerning failed firms for the ten variables, highly improved when the incident variable is added; this ability is kept with less variables when selected by medians (7 and 5 variables), but not when the variables were

⁷ r10 and r6 are not the less significant ratios in previous literature. This finding supports the idea of taking a varied group of variables representing the main economic features of firms and, if necessary, making a second selection, specific for the sample.

selected by means (2 variables). By contrast, not failed firms are poorly identified with 10, 7 or 5 ratios, without the incidents variable, and just a bit better with the incidents variable; while the discriminant power of the two variables selected by means is excellent for not-failed firms and very poor for failed firms.

Table 8. Quadratic discriminant analysis (QDA)

	All ratios		Median selection (5% and 1%)				Mean selection (1%)	
	10 ratios	10 ratios +inc.	7 ratios	7 ratios + inc.	5 ratios	5 ratios + inc.	2 ratios	2 ratios + inc.
	number (percentage)	number (percentage)	number (percentage)	number (percentage)	number (percentage)	number (percentage)	number (percentage)	number (percentage)
Not-failed n=3,173	378 (11.84)	390 (12.21)	134 (4.20)	142 (4.45)	98 (3.07)	103 (3.23)	3,161 (99.00)	3,111 (97.43)
Failed n= 37	36 (97.30)	37 (100.00)	35 (94.59)	36 (97.30)	35 (94.59)	35 (94.59)	2 (5.41)	7 (18.92)
Total well classified n= 3,210	414 (12.90)	427 (13.30)	169 (5.26)	178 (5.55)	133 (4.14)	138 (4.30)	3,163 (98.54)	3,118 (97.13)

NOTES: This table contains results obtained with the QDA model taking equal priors. Ten ratios include: r1=TD/TA, total debt/ total assets; r2=CA/CL, current assets/ current liabilities; r3=EBIT/TA, earnings before interests and taxes/ total assets; r4=NI/TA, net income/ total assets; r5=CA/TA, current assets/ total assets; r6=RP/TA, retained profit/ total assets; r7=FE/TD, financial expenses/ total debt; r8=CF/TD, cash flow/ total debt; r9=NI/SL, net income/ sales; and r10=SL/TA, sales/ total assets. The median selection at the 1% level (5 ratios) include: r1, r3, r4, r8, r9; at the 5% level includes: r1, r3, r4, r5, r7, r8, r9. The mean selection at the 1% level (the same as at the 5% level) includes: r6, r8.

The results obtained with LogDA (see Table 9) show that not-failed firms are better identified with a fewer number of variables, especially when the incidents variable is added. On the contrary, failed firms are better identified with a higher number of ratios. With 10 or 7 ratios the incidents variable even takes away discriminant power, but when less ratios are used, the addition of the incidents variable considerably improves the discriminant power of the models. In fact, for 7, 5, and 2 ratios with the incidents variable, the discriminant power on failed firms is stable.

Table 9. Logistic discriminant analysis (LogDA)

	All ratios		Median selection (5% and 1%)				Mean selection (1%)	
	10 ratios	10 ratios +inc.	7 ratios	7 ratios + inc.	5 ratios	5 ratios + inc.	2 ratios	2 ratios + inc.
	number (percentage)	number (percentage)	number (percentage)	number (percentage)	number (percentage)	number (percentage)	number (percentage)	number (percentage)
Not-failed n=3,173	1,896 (59.38)	2,921 (91.48)	1,691 (52.96)	2,998 (93.89)	2,952 (92.45)	3,006 (94.14)	2,839 (88.91)	2,995 (93.80)
Failed n= 37	26 (70.27)	23 (62.16)	28 (75.68)	19 (51.35)	6 (16.22)	19 (51.35)	8 (21.62)	20 (54.05)
Total well classified n= 3,210	1,922 (59.88)	2,944 (91.71)	1,719 (53.55)	3,017 (93.99)	2,958 (92.15)	3,025 (94.24)	2,847 (88.69)	3,015 (93.93)

NOTES: This table contains results obtained with the LogDA model taking equal priors. Ten ratios include: r1=TD/TA, total debt/ total assets; r2=CA/CL, current assets/ current liabilities; r3=EBIT/TA, earnings before interests and taxes/ total assets; r4=NI/TA, net income/ total assets; r5=CA/TA, current assets/ total assets; r6=RP/TA, retained profit/ total assets; r7=FE/TD, financial expenses/ total debt; r8=CF/TD, cash flow/ total debt; r9=NI/SL, net income/ sales; and r10=SL/TA, sales/ total assets. The median selection at the 1% level (5 ratios) include: r1, r3, r4, r8, r9; at the 5% level includes: r1, r3, r4, r5, r7, r8, r9. The mean selection at the 1% level (the same as at the 5% level) includes: r6, r8.

Using KNNDA (see Table 10), we can appreciate an excellent discriminant power, both for not-failed and failed firms. All the failed firms are identified with any selection of variables. As for the not-failed firms, when only ratios are taken, any median selection (7 or 5 ratios) performs better than the mean selection (2 ratios). Furthermore, 5 ratios produce a better classification than 7 ratios, and 7 ratios perform better than 10 ratios. This type of discriminant analysis is nonparametric; thus, it does not rely on data belonging to any particular distribution. With nonparametric methodology the median selection performs better than the mean selection.

Table 10. *k*th nearest-neighbor discriminant analysis (KNNDA)

	All ratios		Median selection (5% and 1%)				Mean selection (1%)	
	10 ratios number (percentage)	10 ratios +inc. number (percentage)	7 ratios number (percentage)	7 ratios + inc. number (percentage)	5 ratios number (percentage)	5 ratios + inc. number (percentage)	2 ratios number (percentage)	2 ratios + inc. number (percentage)
Not-failed n=3,173	3,151 (98.68)	3,163 (99.06)	3,153 (98.75)	3,161 (99.00)	3,163 (99.06)	3,156 (98.84)	3,150 (98.65)	3,160 (98.97)
Failed n= 37	37 (100.00)	37 (100.00)	37 (100.00)	37 (100.00)	37 (100.00)	37 (100.00)	37 (100.00)	37 (100.00)
Total well classified n= 3,210	3,188 (99.31)	3,200 (99.69)	3,190 (99.38)	3,198 (99.63)	3,200 (99.69)	3,193 (99.47)	3,187 (99.28)	3,197 (99.60)

NOTES: This table contains results obtained with the KNNDA model taking equal priors. Ten ratios include: r1=TD/TA, total debt/ total assets; r2=CA/CL, current assets/ current liabilities; r3=EBIT/TA, earnings before interests and taxes/ total assets; r4=NI/TA, net income/ total assets; r5=CA/TA, current assets/ total assets; r6=RP/TA, retained profit/ total assets; r7=FE/TD, financial expenses/ total debt; r8=CF/TD, cash flow/ total debt; r9=NI/SL, net income/ sales; and r10=SL/TA, sales/ total assets. The median selection at the 1% level (5 ratios) include: r1, r3, r4, r8, r9; at the 5% level includes: r1, r3, r4, r5, r7, r8, r9. The mean selection at the 1% level (the same as at the 5% level) includes: r6, r8.

Table 11. Panel A: Logit

	All ratios		Median selection (5% and 1%)				Mean selection(1%)	
	10 ratios number (percentage)	10 ratios +inc. number (percentage)	7 ratios number (percentage)	7 ratios + inc. number (percentage)	5 ratios number (percentage)	5 ratios +inc. number (percentage)	2 ratios number (percentage)	2 ratios +inc. number (percentage)
Not-failed n=3,193	3193 (100.00)	3193 (100.00)	3193 (100.00)	3193 (100.00)	3193 (100.00)	3193 (100.00)	3,193 (100.00)	3,193 (100.00)
Failed n= 37	2 (5.41)	2 (5.41)	0 (0.00)	0 (0.00)	0 (0.00)	0 (0.00)	2 (5.41)	2 (5.41)
Total well classifie n= 3,230	3,195 (98.92)	3,195 (98.92)	3,193 (98.85)	3,193 (98.85)	3,193 (98.85)	3,193 (98.85)	3,195 (98.92)	3,195 (98.92)

Panel B: Probit

	All ratios		Median selection (5% and 1%)				Mean selection(1%)	
	10 ratios number (percentage)	10 ratios +inc. number (percentage)	7 ratios number (percentage)	7 ratios + inc. number (percentage)	5 ratios number (percentage)	5 ratios +inc. number (percentage)	2 ratios number (percentage)	2 ratios +inc. number (percentage)
Not-failed n=3,193	3193 (100.00)	3193 (100.00)	3193 (100.00)	3193 (100.00)	3193 (100.00)	3193 (100.00)	3,193 (100.00)	3,193 (100.00)
Failed n= 37	1 (2.70)	1 (2.70)	0 (0.00)	0 (0.00)	0 (0.00)	0 (0.00)	2 (5.41)	1 (2.70)
Total well classifie n= 3,230	3,194 (98.89)	3,194 (98.89)	3,193 (98.85)	3,193 (98.85)	3,193 (98.85)	3,193 (98.85)	3,195 (98.92)	3,194 (98.89)

Panel C: Logit and probit, tests

	All ratios		Median selection (5% and 1%)				Mean selection (1%)	
	10 ratios	10 ratios +inc.	7 ratios	7 ratios + inc.	5 ratios	5 ratios +inc.	2 ratios	2 ratios +inc.
LOGIT								
Prob>chi2	0.0038***	0.0000***	0.4951	0.0000***	0.5832	0.0000***	0.0003***	0.0000***
McFadden's R2	0.0642	0.1674	0.0158	0.1216	0.0093	0.1157	0.0406	0.145
McFadden's Adj R2	0.01	0.108	-0.024	0.077	-0.02	0.081	0.026	0.125
BIC	-25631.91	-25665.59	-25636.61	-25671.31	-25650.15	-25685.06	-25687.02	-25721.17
Area under ROC	0.7101	0.8052	0.6737	0.7894	0.5288	0.7099	0.6921	0.8116
PROBIT								
Prob>chi2	0.0032***	0.0000***	0.5916	0.0000***	0.6121	0.0000***	0.0003***	0.0000***
McFadden's R2	0.0653	0.1712	0.0138	0.1252	0.0088	0.1215	0.0405	0.1512
McFadden's Adj R2	0.011	0.112	-0.026	0.081	-0.021	0.087	0.026	0.131
BIC	-25632.39	-25667.13	-25635.78	-25672.74	-25649.95	-25687.41	-25686.99	-25723.69
Area under ROC	0.7145	0.8077	0.6835	0.784	0.5612	0.7118	0.6909	0.8105

NOTES: Ten ratios include: r1=TD/TA, total debt/total assets; r2=CA/CL, current assets/current liabilities; r3=EBIT/TA, earnings before interests and taxes/total assets; r4=NI/TA, net income/total assets; r5=CA/TA, current assets/total assets; r6=RP/TA, retained profit/total assets; r7=FE/TD, financial expenses/total debt; r8=CF/TD, cash flow/total debt; r9=NI/SL, net income/sales; and r10=SL/TA, sales/total assets. The median selection at the 1% level (5 ratios) include: r1, r3, r4, r8, r9; at the 5% level includes: r1, r3, r4, r5, r7, r8, r9. The mean selection at the 1% level (the same as at the 5% level) includes: r6, r8.

Logit and probit results (see Table 11) show that:

- For the same selection of variables, probit tends to perform better than logit.

- McFadden's R2 decreases as we drop variables.
- At the same level of significance (1%) the mean selection performs better than the median selection. In fact, using the median selection to reduce the number of ratios (5 or 7 ratios) the models are not significant.
- The addition of the incidents variable considerably improves the quality of the models, making any selection of ratios significant.
- Once we have computed McFadden's adjusted R2 to avoid the influence of the number of variables, we note that the discriminant ability of the models decreases⁸. The mean selection (two variables) shows a better discriminant power than the model with 10 ratios. And the same pattern remains when the incidents variable is added.
- Another possibility to compare logit and probit models is using BIC (Bayesian Information Criterion), based on the likelihood of the models and their degrees of freedom, for which the higher the negative value, the better. The results of the BIC test are better for those models with fewer variables, that is, the mean selection (two ratios). Curiously, the following better models are those with five variables, selected by medians.
- Finally, we have used the area under ROC curves to compare the goodness of the fit of the different models⁹. In this case, it seems that methods with more variables tend to perform better than methods with a lower number of variables, except for the model with two ratios and incidents, which performs the best.

3.4. Winsorized data analysis

After winsorizing ratios, the LDA results (see Table 12) exhibit an irregular pattern. Now, the best percentage of well-classified firms is obtained for the mean selection at the 1% level after the incidents variable is added, but it is only slightly better than the percentage for the model with 10 ratios and the incidents variable. For models using only ratios as independent variables, the use of fewer variables better classifies not-failed firms but classifies failed firms worse, except for the model with three ratios. The inclusion of the incidents variable improves the selection of failed firms, making the number of well-classified failed firms stable, while the reduction of well-classified not-failed firms is small for the median selection and negligible for the mean selection at the 10% level. In general, for our sample, after winsorizing the ratios, LDA tends to select failed firms better but non-failed firms worse.

⁸ The adjusted count R2 eliminates from the account those cases related to the higher marginal. It indicates the proportion of correct classifications further derived from putting all firms in the group with the higher marginal. This test would show if the model has a real ability to generate a good classification.

⁹ Receiver operating characteristics (ROC) curves are used for example by Altman *et al.* (2008) to assess the performance of logit models. In a ROC curve, the true positive rate (sensitivity) is plotted as a function of the false positive rate (100-specificity) for different cut-off points of a parameter. Each point on the ROC curve represents a sensitivity/specificity pair corresponding to a particular decision threshold to discriminate failed and not-failed firms. The area under the ROC curve is a measure of accuracy in the discrimination, where the value 1 means a perfect model. Both the Gini coefficient and the Kolmogorov-Smirnov (K-S) statistic, commonly used by scoring analysts, derive from ROC curves.

Table 12. Linear discriminant analysis (LDA), winsorized ratios

	All ratios		Median selection				Mean selection			
	10 ratios	10 ratios +inc.	7 ratios	7 ratios + inc.	5 ratios	5 ratios + inc.	5 ratios	5 ratios + inc.	3 ratios	3 ratios + inc.
	number	number	number	number	number	number	number	number	number	number
	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)
Not-failed n=3,173	2,776 (86.94)	2,939 (92.05)	2,798 (87.63)	2,935 (91.92)	2,836 (88.82)	2,934 (91.89)	2,836 (88.82)	2,934 (91.89)	2,822 (88.38)	2,944 (92.20)
Failed n= 37	18 (48.65)	22 (59.46)	17 (45.95)	22 (59.46)	13 (35.14)	22 (59.46)	13 (35.14)	22 (59.46)	13 (35.14)	21 (56.76)
Total well classified n= 3,210	2,794 (87.04)	2,961 (92.24)	2,815 (87.69)	2,957 (92.12)	2,849 (88.75)	2,956 (92.09)	2,849 (88.75)	2,956 (92.09)	2,835 (88.32)	2,965 (92.37)

NOTES: This table contains results obtained with the LDA model taking equal priors. Ten ratios include: wr1=TD/TA, total debt/ total assets; wr2=CA/CL, current assets/ current liabilities; wr3=EBIT/TA, earnings before interests and taxes/ total assets; wr4=NI/TA, net income/ total assets; wr5=CA/TA, current assets/ total assets; wr6=RP/TA, retained profit/ total assets; wr7=FE/TD, financial expenses/ total debt; wr8=CF/TD, cash flow/ total debt; wr9=NI/SL, net income/ sales; and wr10=SL/TA, sales/ total assets. The median selection at the 1% level (5 ratios) include: wr1, wr3, wr4, wr8, wr9; and at the 5% level includes: wr1, wr3, wr4, wr5, wr7, wr8, wr9. The mean selection at the 1% level (3 ratios) includes: r1, r3, r4; and at the 5% level (5ratios) includes: r1, r3, r4, r8, r9, the same ratios as the 1% level mean selection.

Both mean and median selection of variables perform well for not-failed firms, although the median selection shows that the use of fewer variables corresponds to a reduction in discriminant power, while the mean selection produces a better discriminant power with fewer variables (slightly lower than the case with 10 variables). On the other hand, the use of more ratios leads to a better classification, and the mean selection performs worse than the median selection at the same level of significance. Unlike LDA, after winsorizing ratios, QDA (see Table 13) performs much better in identifying not-failed firms, but the identification of failed firms is poorer than the case in which raw data are used.

Table 13. Quadratic discriminant analysis (QDA), winsorized ratios

	All ratios		Median selection				Mean selection			
	10 ratios	10 ratios +inc.	7 ratios	7 ratios + inc.	5 ratios	5 ratios + inc.	5 ratios	5 ratios + inc.	3 ratios	3 ratios + inc.
	number	number	number	number	number	number	number	number	number	number
	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)
Not-failed n=3,173	2,947 (92.30)	2,916 (91.32)	2,905 (90.98)	2,829 (88.60)	2,847 (89.16)	2,778 (87.00)	2,847 (89.16)	2,778 (87.00)	2,944 (92.20)	2,873 (89.98)
Failed n= 37	16 (43.24)	25 (67.57)	11 (29.73)	25 (67.57)	11 (29.73)	24 (64.86)	11 (29.73)	24 (64.86)	7 (18.92)	22 (59.46)
Total well classified n= 3,210	2,963 (92.30)	2,941 (91.62)	2,916 (90.84)	2,854 (88.91)	2,858 (89.03)	2,802 (87.29)	2,858 (89.03)	2,802 (87.29)	2,951 (91.93)	2,895 (90.19)

NOTES: This table contains results obtained with the QDA model taking equal priors. Ten ratios include: wr1=TD/TA, total debt/ total assets; wr2=CA/CL, current assets/ current liabilities; wr3=EBIT/TA, earnings before interests and taxes/ total assets; wr4=NI/TA, net income/ total assets; wr5=CA/TA, current assets/ total assets; wr6=RP/TA, retained profit/ total assets; wr7=FE/TD, financial expenses/ total debt; wr8=CF/TD, cash flow/ total debt; wr9=NI/SL, net income/ sales; and wr10=SL/TA, sales/ total assets. The median selection at the 1% level (5 ratios) include: wr1, wr3, wr4, wr8, wr9; and at the 5% level includes: wr1, wr3, wr4, wr5, wr7, wr8, wr9. The mean selection at the 1% level (3 ratios) includes: r1, r3, r4; and at the 5% level (5ratios) includes: r1, r3, r4, r8, r9, the same ratios as the 1% level mean selection.

After winsorizing ratios, logDA (see Table 14) better identifies not-failed firms with a fewer number of variables, especially when the incidents variable is added. Again, the opposite is found for failed firms: as the number of variables decreases, the number of well-classified firms decreases, although adding the incidents variable leads to a better discriminant power for any selection of variables. In general, after winsorizing ratios, logDA produces more stable results across different selections of variables than the use of raw data (see Table 9). It improves the identification of not-failed firms when using a higher number of ratios and that of failed firms when using a lower number of ratios, the percentages of total well classified firms are better using 10 or 7 variables without the incidents variable (when previous results were poorer) but worse in any other case.

Table 14. Logistic discriminant analysis (LogDA), winsorized ratios

	All ratios		Median selection				Mean selection			
	10 ratios	10 ratios +inc.	7 ratios	7 ratios + inc.	5 ratios	5 ratios + inc.	5 ratios	5 ratios + inc.	3 ratios	3 ratios + inc.
	number	number	number	number	number	number	number	number	number	number
	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)
Not-failed n=3,173	2,285 (71.56)	2,716 (85.06)	2,277 (71.31)	2,735 (85.66)	2,715 (85.03)	2,826 (88.51)	2,715 (85.03)	2,826 (88.51)	2,747 (86.03)	2,861 (89.60)
Failed n= 37	26 (70.27)	26 (70.27)	24 (64.86)	26 (70.27)	15 (40.54)	23 (62.16)	15 (40.54)	23 (62.16)	15 (40.54)	22 (59.46)
Total well classified n= 3,210	2,311 (71.99)	2,742 (85.42)	2,301 (71.68)	2,761 (86.01)	2,730 (85.05)	2,849 (88.75)	2,730 (85.05)	2,849 (88.75)	2,762 (86.04)	2,883 (89.81)

NOTES: This table contains results obtained with the Log DA model taking equal priors. Ten ratios include: wr1=TD/TA, total debt/ total assets; wr2=CA/CL, current assets/ current liabilities; wr3=EBIT/TA, earnings before interests and taxes/ total assets; wr4=NI/TA, net income/ total assets; wr5=CA/TA, current assets/ total assets; wr6=RP/TA, retained profit/ total assets; wr7=FE/TD, financial expenses/ total debt; wr8=CF/TD, cash flow/ total debt; wr9=NI/SL, net income/ sales; and wr10=SL/TA, sales/ total assets. The median selection at the 1% level (5 ratios) include: wr1, wr3, wr4, wr8, wr9; and at the 5% level includes: wr1, wr3, wr4, wr5, wr7, wr8, wr9. The mean selection at the 1% level (3 ratios) includes: r1, r3, r4; and at the 5% level (5ratios) includes: r1, r3, r4, r8, r9, the same ratios as the 1% level mean selection.

Using winsorized ratios, KNNDA (see Table 15) achieves an excellent discriminant power: All of the failed firms are identified, and high percentages of well-classified not-failed firms are obtained for any selection of variables. As for the not-failed firms, using only ratios, the median selection performs better at the 1% level of significance. And again, the fewer accounting variables are used, the better the discriminant power obtained. When the incidents variable is added, a good and quite stable behavior is achieved for any selection of variables. The results are similar to those using raw data, but slightly better for not-failed firms.

Table 15. Kth Nearest-neighbor discriminant analysis (KNNDA), winsorized ratios

	All ratios		Median selection				Mean selection			
	10 ratios	10 ratios +inc.	7 ratios	7 ratios + inc.	5 ratios	5 ratios + inc.	5 ratios	5 ratios + inc.	3 ratios	3 ratios + inc.
	number	number	number	number	number	number	number	number	number	number
	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)
Not-failed n=3,173	3,152 (98.72)	3,162 (99.03)	3,153 (98.75)	3,161 (99.00)	3,159 (98.94)	3,153 (98.75)	3,159 (98.94)	3,153 (98.75)	3,143 (98.43)	3,161 (99.00)
Failed n= 37	37 (100.00)	37 (100.00)	37 (100.00)	37 (100.00)	37 (100.00)	37 (100.00)	37 (100.00)	37 (100.00)	37 (100.00)	37 (100.00)
Total well classified n= 3,210	3,189 (99.35)	3,199 (99.66)	3,190 (99.38)	3,198 (99.63)	3,196 (99.56)	3,190 (99.38)	3,196 (99.56)	3,190 (99.38)	3,180 (99.07)	3,198 (99.63)

NOTES: This table contains results obtained with the KNNDA model taking equal priors. Ten ratios include: wr1=TD/TA, total debt/ total assets; wr2=CA/CL, current assets/ current liabilities; wr3=EBIT/TA, earnings before interests and taxes/ total assets; wr4=NI/TA, net income/ total assets; wr5=CA/TA, current assets/ total assets; wr6=RP/TA, retained profit/ total assets; wr7=FE/TD, financial expenses/ total debt; wr8=CF/TD, cash flow/ total debt; wr9=NI/SL, net income/ sales; and wr10=SL/TA, sales/ total assets. The median selection at the 1% level (5 ratios) include: wr1, wr3, wr4, wr8, wr9; and at the 5% level includes: wr1, wr3, wr4, wr5, wr7, wr8, wr9. The mean selection at the 1% level (3 ratios) includes: r1, r3, r4; and at the 5% level (5ratios) includes: r1, r3, r4, r8, r9, the same ratios as the 1% level mean selection.

After winsorizing the ratios for the logit and the probit model (see Table 16, Panels A and B), the first relevant effect is that all of the models are significant at the 1% level. That is, we can obtain models with good discriminant ability with any selection of significant variables, applying either mean or median differences. Both models identify all not-failed firms but no failed firms when using the ratios only. When incidents is added, the results are similar, except that all models identify one failed firm.

Table 16. Panel A: Logit, winsorized ratios

	All ratios			Median selection (5% and 1%)			Mean selection(1%)	
	10 ratios number (percentage)	10 ratios +inc. number (percentage)	7 ratios number (percentage)	7 ratios + inc. number (percentage)	5 ratios number (percentage)	5 ratios +inc. number (percentage)	3 ratios number (percentage)	3 ratios +inc. number (percentage)
Not-failed n=3,193	3193 (100.00)	3192 (99.97)	3193 (100.00)	3192 (99.97)	3193 (100.00)	3193 (100.00)	3,193 (100.00)	3,193 (100.00)
Failed n= 37	0 (0.00)	1 (2.70)	0 (0.00)	1 (2.70)	0 (0.00)	1 (2.70)	0 (0.00)	1 (2.70)
Total well classifie n= 3,230	3,193 (98.85)	3,193 (98.85)	3,193 (98.85)	3,193 (98.85)	3,193 (98.85)	3,194 (98.89)	3,193 (98.85)	3,194 (98.89)

Panel B: Probit, winsorized ratios

	All ratios			Median selection (5% and 1%)			Mean selection(1%)	
	10 ratios number (percentage)	10 ratios +inc. number (percentage)	7 ratios number (percentage)	7 ratios + inc. number (percentage)	5 ratios number (percentage)	5 ratios +inc. number (percentage)	3 ratios number (percentage)	3 ratios +inc. number (percentage)
Not-failed n=3,193	3193 (100.00)	3193 (100.00)	3193 (100.00)	3193 (100.00)	3193 (100.00)	3193 (100.00)	3,193 (100.00)	3,193 (100.00)
Failed n= 37	0 (0.00)	1 (2.70)	0 (0.00)	1 (2.70)	0 (0.00)	1 (2.70)	0 (0.00)	1 (2.70)
Total well classifie n= 3,230	3,193 (98.85)	3,194 (98.89)	3,193 (98.85)	3,194 (98.89)	3,193 (98.85)	3,194 (98.89)	3,193 (98.85)	3,194 (98.89)

Panel C: Logit and probit, winsorized ratios, tests

	All ratios			Median selection			Mean selection			
	10 ratios	10 ratios + inc.	7 ratios	5% 7 ratios + inc.	1% 5 ratios	5 ratios + inc.	5 ratios	5% 5 ratios + inc.	1% 3 ratios	3 ratios + inc.
LOGIT										
Prob>chi2	0.0004*	0.0000*	0.0001*	0.0000*	0.0009*	0.0000*	0.0009*	0.0000*	0.0002*	0.0000*
McFadden's R2	0.0798	0.1545	0.0765	0.1529	0.0515	0.1329	0.0515	0.1329	0.0497	0.1298
McFadden's Adj R2	0.025	0.095	0.037	0.108	0.022	0.098	0.022	0.098	0.030	0.105
BIC	-25638.2	-25660.3	-25661.1	-25683.9	-25667.1	-25692.0	-25667.1	-25692.0	-25682.6	-25706.9
Area under ROC	0.7576	0.8326	0.7518	0.8288	0.6742	0.7733	0.6742	0.7733	0.6908	0.7686
PROBIT										
Prob>chi2	0.0003*	0.0000*	0.0000*	0.0000*	0.0010*	0.0000*0.1	0.0010*	0.0000*0.1	0.0002*	0.0000*
McFadden's R2	0.0814	0.1619	0.0785	0.1607	0.0510	0.420	0.0510	0.420	0.0485	0.1377
McFadden's Adj R2	0.027	0.102	0.039	0.116	0.021	0.107	0.021	0.107	0.029	0.113
BIC	-25638.8	-25663.3	-25661.9	-25687.1	-25667.0	-25695.7	-25667.0	-25695.7	-25682.1	-25710.1
Area under ROC	0.7679	0.8389	0.7608	0.8350	0.7061	0.7875	0.7061	0.7875	0.7103	0.7849

NOTES: Ten ratios include: wr1=TD/TA, total debt/ total assets; wr2=CA/CL, current assets/ current liabilities; wr3=EBIT/TA, earnings before interests and taxes/ total assets; wr4=NI/TA, net income/ total assets; wr5=CA/TA, current assets/ total assets; wr6=RP/TA, retained profit/ total assets; wr7=FE/TD, financial expenses/ total debt; wr8=CF/TD, cash flow/ total debt; wr9=NI/SL, net income/ sales; and wr10=SL/TA, sales/ total assets. The median selection at the 1% level (5 ratios) include: wr1, wr3, wr4, wr8, wr9; and at the 5% level includes: wr1, wr3, wr4, wr5, wr7, wr8, wr9. The mean selection at the 1% level (3 ratios) includes: r1, r3, r4; and at the 5% level (5ratios) includes: r1, r3, r4, r8, r9, the same ratios as the 1% level mean selection.

*Significant at the 1% level.

Panel C in Table 16 includes the results of several tests of significance:

- McFadden's R2 shows the best discriminant power for the model with 10 ratios, followed by the model with two ratios. Both are considerably improved when the incidents variable is added.
- Again, probit tends to perform better than logit, although in fewer models than when using not-winsorized ratios.
- At the same level of significance, the mean selection is better at 1%, while the median selection is better at 5%. And these results remain unchanged based on McFadden's adjusted R2.
- Using BIC, the fewer variables used, the better. Therefore, the mean selection is better for any level of significance, as, in every case, fewer variables are significant for any level with the mean selection.
- Using ROC curves, again the areas under the curves show that models with a higher number of variables perform better.

As mentioned in Section 2.2, LDA requires representative sample sizes, while logit and probit can work with non-proportional samples. Nevertheless, the common practice has been to use a small sample of not-failed firms to obtain a sample size equal to that of the available group of failed firms. In this work, we have avoided sample bias by including the whole population of both failed and not-failed firms. In Appendix B, we include the results of the DA methods, logit and probit, after weighting the failed firms to achieve sample sizes of failed firms that are approximately 50% and 100% those of not-failed firms. As expected, the non-parametric method (KNNDA) offers the same results, and the results of the semi-parametric method (LogDA) changes very little. Contrary to our expectations, LDA and QDA show smaller changes in the percentages of well-classified firms than logit and probit do.

4. CONCLUSIONS

Our work contributes on the variable selection, as one of the three core elements in the empirical study of business failure (jointly with the concept of failure, and the method used to identify or predict the business failure).

Previous empirical studies have evolved from the selection of economically sound variables to statistical selection starting with a group found significant in previous empirical studies. We agree with Altman's inductive reasoning in that it is precisely the empirical evidence that confirms which ones of those variables proposed by the economical reasoning are applicable in business failure analyses of certain populations for a given period and within a given geographical area. In fact, during the last several decades, advances have been made in empirical techniques.

As a cause or a consequence of those big guidelines in the theory on business failure, some business features identified in previous literature as frequently significant are profitability, indebtedness, and economical-financial equilibrium, followed by economic structure, margins and turnovers, whereas the most frequently significant variables proxy for economic profitability and economic-financial short-term equilibrium.

As for the variable selection using statistical tests, our empirical analysis shows that different statistical procedures generate different selections of variables, except in very specific conditions. Our sample of small firms offers a wide dispersion in most of the accounting ratios computed. Outliers increase the standard deviation and skewness, moving the mean away from the median. As a consequence, the selection using mean differences and that using median differences produce radically different groups of significant discriminant variables, when applied to raw data.

After refining the sample by winsorizing the ratios used at the 1% level to homogenize the statistics while maintaining the population size, we find that the mean selection results are closer to the median selection results, which remain unchanged. Therefore, our work shows that mean analysis is not an appropriate method for selecting discriminant variables when they exhibit a wide and skewed dispersion. On the other hand, the mean selection is a proper way to select discriminant variables when the population or the sample analyzed is normally distributed, which is not the case for most accounting variables. Although this condition is attributed to the LDA, our study shows that the lack of normality also biases other parametric methodologies, such as QDA, logit, and probit.

Next, we applied the most commonly used techniques for analyzing business failure, discriminant analysis (DA) and logit and probit binomial regressions. In addition to the well-known linear discriminant analysis (LDA) and quadratic discriminant analysis (QDA) approaches, both of which are parametric techniques, we have used a half-parametric technique, logistic discriminant analysis (log DA), and a nonparametric technique, kth nearest-neighbor discriminant analysis (KNNDA). As for the comparison of the two types of binomial regressions, we have incorporated several recent tests to compare the goodness of fit of the two types of binomial regressions with the different groups of variables.

Our empirical results show that a population with widely dispersed variables requires a different variable selection procedure according to the methodology to be used to discriminate or classify failed and not-failed firms. Parametric methods show a better discriminant power with mean selection, while nonparametric methods perform better with median selection. Furthermore, as nonparametric DA methods are superior to parametric ones in classifying both failed and not-failed firms, our results suggest that the parametric methodology is biased when variable data present wide dispersion. Supporting the well-known idea that median is more representative than mean when the variable is dispersed, our results discourage the use of the statistical mean differences test and parametric business failure assessment methodologies for SMEs.

To avoid the sample bias, this work uses all of the failed and not-failed firms in the population under study, which implies a small proportion of failed firms. Weighting the failed firms to 50% and 100% of the not-failed firms, we find that the results do not vary using the non-parametric DA (KNNDA) and are very similar using the semi-parametric DA (logDA). As the weighting of failed firms increases towards paired samples, the bias in both LDA and QDA is mitigated: LDA identifies more failed and fewer not-failed firms, and QDA produces the opposite pattern. Unexpectedly, logit and probit show a more pronounced pattern, in line with LDA.

The same empirical models were also performed after incorporating a qualitative variable, that is, the payment incidents. Our results show a general significant improvement in the discriminant power of all of the models used and more stable proportions of well-classified firms across different selections of variables. It supports the contribution of firm-specific variables from sources other than financial statements in the accuracy of business failure models, as found by the still-scarce collection of relevant works. More specifically, our evidence supports the findings of Altman *et al.* (2008) in a different geographical area, also using a wide sample of small firms, confirming that qualitative variables are even more important for small business failure models, as financial information is quite limited for a large part of SMEs.

In summary, this work contributes to previous evidence on variable selection twofold:

- First, we test two different statistical variable selection procedures, showing the radically different results they may produce and the relevant implications for the methodology choice considering the descriptive statistics of the data. Based on a wide literature review, to our knowledge, this is the first study to address this issue.
- Second, we provide evidence on the DA and binomial models that offer more stable results across different proportions of failed and not-failed firms, indicating a better potential to avoid the imbalance problem. This is the first study to compare so many methods from this viewpoint

- Third, we provide new evidence regarding the effect of the addition of qualitative information to failure models, with previous evidence for SMEs being scarce. Our results show the relevant contribution of a qualitative non-accounting variable (legal incidents) to improve the discriminatory power of all the models applied in our work, for any selection of variables and any weighting of failed firms.

Finally, we contribute to the previous literature by adding new evidence of the application of DA models, logit and probit with several selections of variables. The use of nonparametric DA models is innovative with respect to the previous literature.

REFERENCES

- Albert, A. and Lesaffre, E. (1986): "Multiple group logistic discrimination", *Computers and Mathematics with Applications*, 12A(2), 209–224.
- Altman, E.I. (1968): "Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy", *Journal of Finance*, 23(4), 589–609.
- Altman, E.I. (1993): *Corporate Financial Distress and Bankruptcy: A Complete Guide to Predicting and Avoiding Distress and Profiting from Bankruptcy*. New York: John Wiley & Sons.
- Altman, E. I.; Sabato, G. and Wilson, N. (2008): "The value of qualitative information in SME risk management", *Journal of Credit Risk*, 6(2), 95–127.
- Aziz, M.A. and Dar, H.A., (2006): "Predicting corporate bankruptcy: Where we stand", *Corporate Governance*, 6, 18–33.
- Balcaen, S. and Ooghe, H. (2006): "35 years of studies on business failure: An overview of the classic statistical methodologies and their related problems", *British Accounting Review*, 38(1), 63–93.
- Baum, C.F. (2006): *An introduction to modern Econometrics using Stata*. Texas: Stata Press.
- Bellovary, J.L.; Giacomino, D.E. and Akers, M.D. (2007): "A review of bankruptcy prediction studies: 1930 to present", *Journal of Financial Education*, 33, 1–43.
- Berkson, J. (1944): "Application of the logistic function to bio-assay", *Journal of the American Statistical Association*, 39, 357–365.
- Bliss, C. I. (1934): "The method of probits", *Science*, 79, 38–39.
- Collins, R.A. and Green, R.D. (1982): "Statistical methods of bankruptcy forecasting", *Journal of Economics and Business*; 32(4), 349–352.
- Dambolena, I.G. and Khoury, S.J. (1980): "Ratio stability and corporate failure", *Journal of Finance*, 35(4), 1017–1026.
- Daubie, M. and Meskens, N. (2002): "Business failure prediction: A review and analysis of the Literature". En C. Zopounidis (ed.): *New Trends in Banking Management*. New York: Physica-Verlag, pp. 71–86.
- Eisenbeis, R. (1977): "Pitfalls in the application of discriminant analysis in business, finance and economics", *Journal of Finance*, 32, 875–900.

- Fisher, R.A. (1936): “The use of multiple measurements in taxonomic problems”, *Annals of Eugenics*, 7, 179–188.
- García-Ayuso, M. (1995): “La necesidad de llevar a cabo un replanteamiento de la investigación en materia de análisis de la información financiera”, *Análisis financiero*, 66, 36–61.
- Grice, S. and Ingram, R. (2001): “Tests of the generalizability of Altman’s bankruptcy prediction model”, *Journal of Business Research*, 54, 53–61.
- Hair, J.F.; Anderson, R.E.; Tatham, R.L. and Black, W.C. (1999): *Análisis multivariante*, Madrid: Prentice-Hall.
- Jin, J.Y.; Kanagaretnam, K. and Lobo, G.J. (2011): “Ability of accounting and audit quality variables to predict bank failure during the financial crisis”, *Journal of Banking and Finance*, 35(11), 2811–2819.
- Jones F.L. (1987): “Current techniques in bankruptcy prediction”, *Journal Accounting Literature*, 6, 131–164.
- Keasey, K. and Watson, R. (1987): “Non-financial symptoms and the prediction of small company failure: a test of Argenti’s hypothesis”, *Journal of Business, Finance and Accounting*, 14(3), 335–354.
- Keasey, K. and Watson, R. (1991): “Financial distress prediction models: A review of their usefulness”, *British Journal of Management*, 2(2), 89–102.
- Laitinen, T. and Kankaanpää, M. (1999): “Comparative analysis of failure prediction methods: The Finnish case”. *The European Accounting Review*, 8(1), 67–92.
- Martin, D. (1977): “Early warning of bank failure: A logit regression approach”, *Journal of Banking & Finance*, 1(3), 249–276.
- McLachlan, G. J. (2004): *Discriminant Analysis and Statistical Pattern Recognition*. New York: Wiley.
- Ohlson, J.A. (1980): “Financial ratios and the probabilistic prediction of bankruptcy”, *Journal of Accounting Research*, 18(1), 109–131.
- Peel, M.J. and Peel, D.A. (1987): “Some further empirical evidence on predicting private company failure”, *Accounting and Business Research*, 18(69), 57–66.
- Peel, M.J.; Peel, D.A. and Pope, P.F. (1986): “Predicting corporate failure- Some results for the UK corporate sector”, *Omega. International Journal of Management Science*, 14(1) 5–12.
- Platt, H.D. and Platt, M.B. (1990): “Development of a class of stable predictive variables: The case of bankruptcy prediction”, *Journal of Business, Finance & Accounting*, 17(1), 31–51.
- Premachandra, I.M.; Bhabra, G.S. and Sueyoshi, T. (2009): “DEA as a toll for bankruptcy assessment: A comparative study with logistic regression technique”, *European Journal of Operational Research*, 193, 412–424.
- Ravi Kumar, P. and Ravi, V. (2007): “Bankruptcy prediction in banks and firms via statistical and intelligent techniques - A review”, *European Journal of Operational Research*, 180(1), 1–28.
- Scott, J. (1981): “The probability of bankruptcy”, *Journal of Banking and Finance*, 5, 317–344.

- Smith, C.A.B. (1947): "Some examples of discrimination", *Annals of Eugenics*, 13, 272–282.
- Somoza López, A. (2002): "Modelos de predicción de la insolvencia: la incorporación de otro tipo de variables". En F. Doldán M. Rodríguez, M. (eds.): *La gestión del riesgo de crédito*. Madrid, AECA, pp. 139–173.
- Sueyoshi, T. and Goto, M. (2009a): "Can R&D expenditure avoid corporate bankruptcy? Comparison between Japanese machinery and electric equipment industries using DEA-discriminant analysis", *European Journal of Operational Research*, 199, 576–594.
- Sueyoshi, T. and Goto, M. (2009b): "Methodological comparison between DEA (data envelopment analysis) and DEA-DA (discriminant analysis) from the perspective of bankruptcy assessment", *European Journal of Operational Research*, 199, 561–575.
- Sueyoshi, T. and Goto, M. (2009c): "DEA-DA for bankruptcy-based performance assessment: misclassification analysis of Japanese construction industry", *European Journal of Operational Research*, 199, 576–594.
- Sun, J.; Li, H.; Huang, Q.-H. and He, K.-Y. (2014): "Predicting financial distress and corporate failure: A review from the state-of-the-art definitions, modeling, sampling, and featuring approaches", *Knowledge-Based Systems*, 57, 41–56.
- Taffler, R.J. (1982): "Forecasting company failure in the UK using discriminant analysis and finance ratio data", *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 145(3), 342–358.
- Tascón, M.T. and Castaño, F.J. (2012): "Variables and models for the identification and prediction of business failure: Revision of recent empirical research advances", *Spanish Accounting Review*, 15(1), 7–58.
- Zavgren, C.V. (1983): "The prediction of corporate failure: The state of the art", *Journal of Accounting Literature*, 2(1), 1–38.
- Zavgren, C.V. (1985): "Assessing the vulnerability of failure of American industrial firms: A logistic analysis", *Journal of Banking and Finance*, 12(1), 19-45.

APPENDIX A: Significant variables SMEs

VARIABLES	Keasey, Watson (1987)	Gandía, López-Gracia, Molina (1995)	Lizarraga (1997)	Gallago, Gomez, Yañez (1997)	López, Gandía, Molina (1998)	Ferrando, Blanco (1998)	Lizarraga (1998)	Altman, Sabato (2005)	Pompe, Bilderbeek (2005)	Altman, Sabato (2007)	Somoza, Vallverdu (2007)	Gómez, Torre, Román (2008)	Arquero, Abad, Jiménez (2008)	Labatut, Pozuelo, Veres (2009)	Fantazzini, Figini (2009)	Lugovskaya (2009)	Mora, González (2009)	Pozuelo, Labatut, Veres (2010)	Manzanares, Benegas, García (2010)	Pederzoli, Torricelli (2010)	Llano, Piñero, Rodríguez (2011)	Blanco, Irimia, Oliver (2012)	Authors using the ratio	
Account payable/Total assets							X	X														X	3	
Added value/Sales														X										1
Added value/Total assets							X	X												X				3
Amortization/Sales														X										1
Average assets/Sales										X														1
Bank debt/(Total assets-Bank debt)							X																	1
Capital/Total assets																							X	1
Cash flow/Current liabilities															X					X				2
Cash flow/Sales														X										1
Cash flow/Shareholders equity								X						X								X		3
Cash flow/Total assets		X					X	X	X						X					X	X	X		8
Cash flow/Total debt								X																1
Cash flow/Total liabilities									X									X						1
Cash flow/Working capital								X																1
Common earnings/Sales														X										1
Common earnings/Shareholders equity																		X						1
Common earnings/Total assets																		X						1
Common earnings/Total liabilities																		X						1
Cost of goods sold/Trading account liabilities															X									1
Current assets/(Shareholders equity+Long-term liabilities)	X		X																					2
Current assets/Current liabilities	X	X	X											X	X	X						X		7
Current assets/Long-term assets										X														1
Current assets/Sales																X								1
Current assets/Total assets		X						X	X													X		4
Current assets/Total debt																X								1
(Current assets-Current liabilities)/Shareholders equity																	X							1
(Current assets-Inventory)/Current liabilities						X											X							2
(Current assets-Inventory)/Total assets					X																			1
(Current assets-Inventory-Current liabilities)/(Operating expenses-Amortizations-depreciation (no credit))														X										1
Current liabilities/Shareholders equity																X								1
Current liabilities/Total assets																				X		X		2
Current Liabilities/Total Liabilities																		X						1
Debt maturity															X									1
Depreciation/Sales															X									1
EBIT/Financial expenses		X							X			X	X											4
EBIT/Sales														X										2
EBIT/Total assets						X													X	X				3
EBIT/Total debt					X																			1
EBITDA/Financial expenses									X											X				2
EBITDA/Total assets									X															1
(EBT + Amortizations)/Total assets	X																							1
(EBT + Amortizations+Depreciations)/Capital										X														1
(EBT + Amortizations+Depreciations)/Financial expenses										X														1
(EBT + Amortizations+Depreciations)/Sales										X														1

VARIABLES	Keasey, Watson (1987)	Gandía, López-Gracia, Molina (1995)	Lizarraga (1997)	Gallego, Gomez, Yañez (1997)	López, Gandía, Molina (1998)	Ferrando, Blanco (1998)	Lizarraga (1998)	Altman, Sabato (2005)	Pompe, Bildérbeek (2005)	Altman, Sabato (2007)	Somoza, Valverde (2007)	Gómez, Torre, Román (2008)	Arquero, Abad, Jiménez (2008)	Labatut, Pozuelo, Veres (2009)	Fantazzini, Fighi (2009)	Lugovskaya (2009)	Mora, González (2009)	Pozuelo, Labatut, Veres (2010)	Mananeque, Benegas, García (2010)	Pederzoli, Torricelli (2010)	Llano, Piñeiro, Rodríguez (2011)	Blanco, Irimia, Oliver (2012)	Authors using the ratio
EBT/Sales														X		X							2
EBT/Shareholders equity			X																				1
Financial expenses/Total liabilities			X	X							X							X					4
Increase of generated funds												X											1
Increase of total assets												X											1
Innovation/Total assets															X								1
Interests/Sales			X	X																			2
Interests/Total assets															X								1
Interval without credit																					X		1
Inventory/Current assets														X									1
Inventory/Sales			X																	X			2
(Investments+Cash-Financial expenses)/Current assets								X															1
(Long term liabilities+Shareholders equity)/Current liabilities			X																				1
Long-term assets/Shareholders equity											X												1
Long-term assets/Total assets	X						X										X						3
Long-term bank debt/Bank debt							X																1
Long-term debt/Shareholders equity										X													1
Long-term debt/Total assets										X					X					X			3
Long-term liabilities/Shareholders equity																X							1
Long-term liabilities/Total assets							X											X					2
Neperian logarithm of total assets																						X	1
(Net income + Interests) / Shareholders equity	X																						1
(Net income + Interests) / Total debt	X																						1
Net income/Added value														X									1
Net Income/Current Liabilities			X																				1
Net income/Sales				X										X	X								3
Net income/Shareholders equity					X										X	X							2
Net income/Total assets	X	X	X												X						X		5
Net Income/Total debt																					X		1
Net revenues/Total assets															X					X			2
Operating earnings/Operating revenues																	X						1
Operating earnings/Total assets			X														X						2
Operating margin /Average operating assets											X												1
Operating revenues/Sales															X								1
Operating revenues/Total assets															X	X							2
Personnel expenses/Added value														X				X					2
Personnel expenses/Sales					X									X	X								3
Publication lag								X															1
Quick ratio (Current assets/Current liabilities)	X																						1
Real assets/Total liabilities											X												1
Receivables/Current assets																						X	1
Receivables/Inventory										X													1
Receivables/Operating revenues																	X						1
Receivables/Total assets														X									1
Reserves/Total assets										X													1

VARIABLES	Keasey, Watson (1987)	Gandia, López-Gracia, Molina (1995)	Lizarraga (1997)	Gallego, Gomez, Yañez (1997)	López Gandia, Molina (1998)	Ferrando, Blanco (1998)	Lizarraga (1998)	Altman, Sabato (2005)	Pompe, Bilderberk (2005)	Altman, Sabato (2007)	Somoza, Vallverdu (2007)	Gómez, Torre, Román (2008)	Arquero, Abad, Jiménez (2008)	Labatut, Pozuelo, Veres (2009)	Fantazzini, Fighi (2009)	Lugovskaya (2009)	Mora, González (2009)	Pozuelo, Labatut, Veres (2010)	Manzanaque, Benegas, García (2010)	Pederzoli, Torticelli (2010)	Llano, Piñeiro, Rodríguez (2011)	Blanco, Irimia, Oliver (2012)	Authors using the ratio
Retained earnings/Total assets							X		X										X				3
ROA - Average cost of liabilities													X										1
Sales/Average number of employees											X												1
Sales/Current liabilities			X																				1
Sales/Inventory																		X					1
Sales/Shareholders equity			X																				1
Sales/Total assets						X			X				X	X					X	X			6
Sales/Total debt					X																		1
Sales/Trading account assets																X							1
Sales/Treasury										X													1
Sales/Working capital-Inventory										X													1
Shareholders equity/Long-term assets			X													X	X						3
Shareholders equity/Total assets								X				X	X							X	X	X	6
Shareholders equity/Total debt			X			X												X			X		4
Shareholders equity/Total liabilities															X								1
(Shareholders equity+long-term liabilities)/Sales														X									1
Short-term debt/Long-term debt															X								1
Short-term debt/Shareholders equity							X	X												X			3
Short-term debt/Total debt															X								1
(Short-term negotiated debt+short-term debt without explicit cost-Ext. Assets)/Generated funds before taxes												X											1
Taxes/Added value								X															1
Taxes/Sales															X								1
Total assets																						X	1
Total assets/Operating revenues		X		X										X									3
Total assets/Total liabilities																	X						1
Total debt/Shareholders equity										X							X						2
Total debt/Total assets	X				X				X														3
Total debt/Working capital										X													1
Total liabilities/(Shareholders equity+total liabilities)																			X				1
Total liabilities/(Total liabilities+Shareholders equity)															X								1
Total liabilities/Current assets																						X	1
Total liabilities/Shareholders equity																	X						1
Total liabilities/Total assets													X	X									2
Trade debtors/Total assets								X															1
Trade debtors/Total debt									X														1
Trading account assets/Sales			X																				1
Trading account liabilities/Total debt																						X	1
Trading account liabilities/Trading account assets																						X	1
(Treasury+Long-term financial investments)/Total assets				X																			1
(Treasury+Long-term financial investments)/Working capital				X																			1
(Treasury+Receivables)/Current liabilities										X						X							2
(Treasury+Receivables)/Total assets		X		X													X						3
Working capital/Current liabilities																				X			1
Working capital/Operating revenues														X									1
Working capital/Sales																				X			1
Working capital/Total assets				X		X										X				X			4
Number of ratios used by author	6	5	9	11	5	9	5	8	12	10	16	3	6	19	15	22	11	11	3	16	8	13	223

References Appendix A

- Altman, E.I. & Sabato, G. (2005): "Effects of the new Basel capital accord on bank capital requirements for SMEs", *Journal of Financial Services Research*, 28(1-3), 15-42.
- Altman, E.I. & Sabato, G. (2007): "Modeling credit risk for SMEs: evidence from the U.S. market", *Abacus*, 43(3), 332-357.
- Arquero, J.L.; Abad, M.C. and Jiménez, S.M. (2008): "Procesos de fracaso empresarial en pymes, identificación y contrastación empírica", *Revista Internacional de la Pequeña y Mediana Empresa*, 1(2), 64-77.
- Blanco, A.; Irimia, A. and Oliver, M.D. (2012): "The prediction of bankruptcy of small firms in the UK using logistic regression", *Análisis Financiero*, 118, 32-40.
- Fantazzini, D. and Figini, S. (2009): "Random survival forests models for SME credit risk measurement", *Methodology and Computing in Applied Probability*, 11(1), 29-45.
- Ferrando, M. and Blanco, F. (1998): "La previsión del fracaso empresarial en la comunidad valenciana: aplicación de los modelos discriminante y logit", *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, 27(95), 499-540.
- Gallego, A.M.; Gómez, J.C. and Yáñez, L. (1997): "Modelos de predicción de quiebras en empresas no financieras", *Actualidad Financiera*, 2(5), 3-14.
- Gandía, J.L.; López Gracia, J. and Molina, R. (1995): *Estudio empírico de la solvencia empresarial en la Comunidad Valenciana*. Valencia: Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas.
- Gómez, M.A.; Torre, J.M. and Román, I. (2008): "Análisis de sensibilidad temporal en los modelos de predicción de insolvencia: una aplicación a las pymes industriales", *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, 37(137), 85-111.
- Keasey, K., and Watson, R. (1987): "Non-financial symptoms and the prediction of small company failure: a test of Argenti's hypothesis", *Journal of Business, Finance and Accounting*, 14(3), 335-354.
- Labatut, G.; Pozuelo, J. and Veres, E.J. (2009): "Modelización temporal de los ratios contables en la detección del fracaso empresarial de la pyme española", *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, 38(143), 423-448.
- Lizarraga Dallo, F. (1997): "Utilidad de la información contable en el proceso de fracaso: análisis del sector industrial de la mediana empresa", *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, 26(93), 871-915.
- Lizarraga Dallo, F. (1998): "Modelos de predicción del fracaso empresarial: ¿funciona entre nuestras empresas el modelo de Altman de 1968?", *Revista de Contabilidad*, 1(1), 137-164.
- Llano, P.D.; Piñeiro, C. and Rodríguez, M. (2011): "A model to forecast financial failure in non financial galician SMES". Paper presented at *XII Ibero-Italian Congress of Financial and Actuarial Mathematics*, Lisboa, 7-9 July. Available at <https://core.ac.uk/download/pdf/47130940.pdf>.
- López, J.; Gandía, J.L. and Molina, R. (1998): "La suspensión de pagos en las pymes: una aproximación empírica", *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, 27(94), 71-97.
- Lugovskaya, L. (2009): "Predicting default of Russian SMEs on the basis of financial and non-financial variables", *Journal of Financial Services Marketing*, 14(4), 301-313.

Manzaneque, M.; Benegas, R. and Gandía, D. (2010): “Diferentes procesos de fracaso empresarial: un análisis dinámico a través de la aplicación de técnicas estadísticas clúster”, *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa*, 19(3), 67-88.

Mora, M. C. and González, M. I. (2009): “Caracterización del fracaso empresarial en Colombia: un enfoque con escalado multidimensional”. Working Paper 11/09 in “*Nuevas Tendencias en Dirección de Empresas*” Series.

Pederzoli, C. and Torricelli, C. (2010): “A parsimonious default prediction model for Italian SMEs”, *Banks and Bank Systems*, 5(4), 28-32.

Pompe, P.P.M. and Bilderbeek, J. (2005): “The prediction of bankruptcy of small and medium sized industrial firms”, *Journal of Business Venturing*, 20(6), 847–868.

Pozuelo, J.; Labatut, G. and Veres, E. (2010): “Análisis descriptivo de los procesos de fracaso empresarial en microempresas mediante técnicas multivariantes”, *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa*, 19 (3), 47-66.

Somoza, A. and Vallverdú, J. (2007): “Predicción de la insolvencia empresarial: comparación de la selección de los ratios contables en los modelos contable-financieros”, *Revista de Contabilidad y Dirección*, 5, 169-203.

APPENDIX B: Business failure assessment with winsorized ratios and different weightings of failed firms

Across any selection of variables and any weighting of failed firms, the qualitative variable contributes to obtain better identification power and more stable proportions of well classified firms.

Table B.1. Linear discriminant analysis (LDA), winsorized data, weighted failed firms

Panel A. Failed firms 1591, total firms 4784

	All ratios		Median selection (5% and 1%)			Mean selection(1%)		
	10 ratios number (percentage)	10 ratios +inc. number (percentage)	7 ratios number (percentage)	7 ratios + inc. number (percentage)	5 ratios number (percentage)	5 ratios +inc. number (percentage)	3 ratios number (percentage)	3 ratios +inc. number (percentage)
Not-failed n=3,193	2.479 (77.64)	2.935 (91.92)	2.487 (77.89)	2.947 (92.30)	2.884 (90.32)	2.956 (92.58)	2.902 (90.89)	2.975 (93.17)
Failed n= 1591	903 (56.76)	946 (59.46)	903 (56.76)	989 (62.16)	473 (29.73)	946 (59.46)	473 (29.73)	903 (56.76)
Total well classified n= 4,784	3.382 (70.69)	3.881 (81.12)	3.390 (70.86)	3.936 (82.27)	3.357 (70.17)	3.902 (81.56)	3.375 (70.55)	3.878 (81.06)

Panel B. Failed firms 3182, total firms 6375

	All ratios		Median selection (5% and 1%)			Mean selection(1%)		
	10 ratios number (percentage)	10 ratios +inc. number (percentage)	7 ratios number (percentage)	7 ratios + inc. number (percentage)	5 ratios number (percentage)	5 ratios +inc. number (percentage)	3 ratios number (percentage)	3 ratios +inc. number (percentage)
Not-failed n=3,193	2.248 (70.40)	2.933 (91.86)	2.300 (72.03)	2.926 (91.64)	2.858 (89.51)	2.943 (92.17)	2.903 (90.92)	2.976 (93.20)
Failed n= 3182	2.150 (67.57)	1.978 (62.16)	1.892 (59.46)	1.978 (62.16)	1.032 (32.43)	1.892 (59.46)	860 (27.03)	1.806 (56.76)
Total well classified n= 6,375	4.398 (68.99)	4.911 (77.04)	4.192 (65.76)	4.904 (76.93)	3.890 (61.02)	4.835 (75.84)	3.763 (59.03)	4.782 (75.01)

NOTES: This table contains results obtained with the LDA model taking equal priors. Ten ratios include: r1=TD/TA, total debt/total assets; r2=CA/CL, current assets/current liabilities; r3=EBIT/TA, earnings before interests and taxes/total assets; r4=NI/TA, net income/total assets; r5=CA/TA, current assets/total assets; r6=RP/TA, retained profit/total assets; r7=FE/TD, financial expenses/total debt; r8=CF/TD, cash flow/total debt; r9=NI/SL, net income/sales; and r10=SL/TA, sales/total assets. The median selection at the 1% level (5 ratios) include: r1, r3, r4, r8, r9; at the 5% level includes: r1, r3, r4, r5, r7, r8, r9. The mean selection at the 1% level (the same as at the 5% level) includes: r6, r8.

Using LDA, results show similar percentages of well-classified firms for different weightings of failed firms, especially when the qualitative variable is added. Using only ratios, as the weighting of failed firms increases, more failed firms and fewer not-failed firms are well-classified, except for the mean selection (fewer variables).

Table B2. Quadratic discriminant analysis (QDA), winsorized data, weighted failed firms
Panel A: Failed firms 1591, total firms 4784

	All ratios		Median selection (5% and 1%)			Mean selection(1%)		
	10 ratios number (percentage)	10 ratios +inc. number (percentage)	7 ratios number (percentage)	7 ratios + inc. number (percentage)	5 ratios number (percentage)	5 ratios +inc. number (percentage)	3 ratios number (percentage)	3 ratios +inc. number (percentage)
Not-failed n=3,193	2.991 (93.67)	2.974 (93.14)	3.042 (95.27)	2.952 (92.45)	3.007 (94.17)	2.965 (92.86)	3.032 (94.96)	2.903 (90.92)
Failed n= 1591	602 (37.84)	1.032 (64.86)	344 (21.62)	903 (56.76)	387 (24.32)	688 (43.24)	258 (16.22)	946 (59.46)
Total well classified n= 4,784	3.593 (75.10)	4.006 (83.74)	3.386 (70.78)	3.855 (80.58)	3.394 (70.94)	3.653 (76.36)	3.290 (68.77)	3.849 (80.46)

Panel B: Failed firms 3182, total firms 6375

	All ratios		Median selection (5% and 1%)			Mean selection(1%)		
	10 ratios number (percentage)	10 ratios +inc. number (percentage)	7 ratios number (percentage)	7 ratios + inc. number (percentage)	5 ratios number (percentage)	5 ratios +inc. number (percentage)	3 ratios number (percentage)	3 ratios +inc. number (percentage)
Not-failed n=3,193	3.111 (97.43)	3.030 (94.90)	3.063 (95.93)	3.006 (94.14)	3.035 (95.05)	3.005 (94.11)	3.034 (95.02)	2.904 (90.95)
Failed n= 3182	688 (21.62)	1.634 (51.35)	688 (21.62)	1.376 (43.24)	774 (24.32)	1.032 (32.43)	516 (16.22)	1.892 (59.46)
Total well classified n= 6,375	3.799 (59.59)	4.664 (73.16)	3.751 (58.84)	4.382 (68.74)	3.809 (59.75)	4.037 (63.33)	3.550 (55.69)	4.796 (75.23)

NOTES: This table contains results obtained with the QDA model taking equal priors. Ten ratios include: r1=TD/TA, total debt/total assets; r2=CA/CL, current assets/current liabilities; r3=EBIT/TA, earnings before interests and taxes/total assets; r4=NI/TA, net income/total assets; r5=CA/TA, current assets/total assets; r6=RP/TA, retained profit/total assets; r7=FE/TD, financial expenses/total debt; r8=CF/TD, cash flow/total debt; r9=NI/SL, net income/sales; and r10=SL/TA, sales/total assets. The median selection at the 1% level (5 ratios) include: r1, r3, r4, r8, r9; at the 5% level includes: r1, r3, r4, r5, r7, r8, r9. The mean selection at the 1% level (the same as at the 5% level) includes: r6, r8.

Using QDA, as the weighting of failed firms increases, more not-failed firms are identified, in contrast to well-classified failed firms whose percentage decreases for any selection of variables.

Table B3. Logistic discriminant analysis (LogDA), winsorized data, weighted failed firms
Panel A: Failed firms 1591, total firms 4784

	All ratios		Median selection (5% and 1%)			Mean selection(1%)		
	10 ratios number (percentage)	10 ratios +inc. number (percentage)	7 ratios number (percentage)	7 ratios + inc. number (percentage)	5 ratios number (percentage)	5 ratios +inc. number (percentage)	3 ratios number (percentage)	3 ratios +inc. number (percentage)
Not-failed n=3,193	2.226 (69.72)	2.869 (89.85)	2.260 (70.78)	2.876 (90.07)	2.792 (87.44)	2.916 (91.32)	2.794 (87.50)	2.942 (92.14)
Failed n= 1591	1.161 (72.97)	1.032 (64.86)	946 (59.46)	989 (62.16)	602 (37.84)	946 (59.46)	559 (35.14)	903 (56.76)
Total well classified n= 4,784	3.387 (70.80)	3.901 (81.54)	3.206 (67.02)	3.865 (80.79)	3.394 (70.94)	3.862 (80.73)	3.353 (70.09)	3.845 (80.37)

Panel B: Failed firms 3182, total firms 6375

	All ratios		Median selection (5% and 1%)			Mean selection(1%)		
	10 ratios number (percentage)	10 ratios +inc. number (percentage)	7 ratios number (percentage)	7 ratios + inc. number (percentage)	5 ratios number (percentage)	5 ratios +inc. number (percentage)	3 ratios number (percentage)	3 ratios +inc. number (percentage)
Not-failed n=3,193	2.241 (70.18)	2.883 (90.29)	2.248 (70.40)	2.892 (90.57)	2.768 (86.69)	2.915 (91.29)	2.755 (86.28)	2.938 (92.01)
Failed n= 3182	2.236 (70.27)	2.064 (64.86)	1.978 (62.16)	1.978 (62.16)	1.204 (37.84)	1.892 (59.46)	1.204 (37.84)	1.806 (56.76)
Total well classified n= 6,375	4.477 (70.23)	4.947 (77.60)	4.226 (66.29)	4.870 (76.39)	3.972 (62.31)	4.807 (75.40)	3.959 (62.10)	4.744 (74.42)

NOTES: This table contains results obtained with the LogDA model taking equal priors. Ten ratios include: r1=TD/TA, total debt/total assets; r2=CA/CL, current assets/current liabilities; r3=EBIT/TA, earnings before interests and taxes/total assets; r4=NI/TA, net income/total assets; r5=CA/TA, current assets/total assets; r6=RP/TA, retained profit/total assets; r7=FE/TD, financial expenses/total debt; r8=CF/TD, cash flow/total debt; r9=NI/SL, net income/sales; and r10=SL/TA, sales/total assets. The median selection at the 1% level (5 ratios) include: r1, r3, r4, r8, r9; at the 5% level includes: r1, r3, r4, r5, r7, r8, r9. The mean selection at the 1% level (the same as at the 5% level) includes: r6, r8.

Using LogDA, as the weighting of failed firms increases, the proportions of well-classified firms do not follow a homogeneous changing pattern. In general, well-classified failed firms tend to reduce and well-classified not-failed firms tend to increase.

Table B4. *k*th-nearest-neighbor discriminant analysis (KNNDA), winsorized data, weighted failed firms
Panel A: Failed firms 1591, total firms 4784

	All ratios		Median selection (5% and 1%)				Mean selection(1%)	
	10 ratios number (percentage)	10 ratios +inc. number (percentage)	7 ratios number (percentage)	7 ratios + inc. number (percentage)	5 ratios number (percentage)	5 ratios +inc. number (percentage)	3 ratios number (percentage)	3 ratios +inc. number (percentage)
Not-failed n=3,193	3.149 (98.62)	3.163 (99.06)	3.152 (98.72)	3.161 (99.00)	3.163 (99.06)	3.156 (98.84)	3.163 (99.06)	3.164 (99.09)
Failed n= 1591	1.591 (100.00)	1.591 (100.00)	1.591 (100.00)	1.591 (100.00)	1.591 (100.00)	1.591 (100.00)	1.591 (100.00)	1.591 (100.00)
Total well classified n= 4,784	4.740 (99.08)	4.754 (99.37)	4.743 (99.14)	4.752 (99.33)	4.754 (99.37)	4.747 (99.23)	4.754 (99.37)	4.755 (99.39)

Panel B: Failed firms 3182, total firms 6375

	All ratios		Median selection (5% and 1%)				Mean selection(1%)	
	10 ratios number (percentage)	10 ratios +inc. number (percentage)	7 ratios number (percentage)	7 ratios + inc. number (percentage)	5 ratios number (percentage)	5 ratios +inc. number (percentage)	3 ratios number (percentage)	3 ratios +inc. number (percentage)
Not-failed n=3,193	3.149 (98.62)	3.163 (99.06)	3.151 (98.68)	3.160 (98.97)	3.164 (99.09)	3.157 (98.87)	3.164 (99.09)	3.165 (99.12)
Failed n= 3182	3.182 (100.00)	3.182 (100.00)	3.182 (100.00)	3.182 (100.00)	3.182 (100.00)	3.182 (100.00)	3.182 (100.00)	3.182 (100.00)
Total well classified n= 6,375	6.331 (99.31)	6.345 (99.53)	6.333 (99.34)	6.342 (99.48)	6.346 (99.55)	6.339 (99.44)	6.346 (99.55)	6.347 (99.56)

NOTES: This Table contains results obtained with the KNNDA model taking equal priors. Ten ratios include: r1=TD/TA, total debt/total assets; r2=CA/CL, current assets/current liabilities; r3=EBIT/TA, earnings before interests and taxes/total assets; r4=NI/TA, net income/total assets; r5=CA/TA, current assets/total assets; r6=RP/TA, retained profit/total assets; r7=FE/TD, financial expenses/total debt; r8=CF/TD, cash flow/total debt; r9=NI/SL, net income/sales; and r10=SL/TA, sales/total assets. The median selection at the 1% level (5 ratios) include: r1, r3, r4, r8, r9; at the 5% level includes: r1, r3, r4, r5, r7, r8, r9. The mean selection at the 1% level (the same as at the 5% level) includes: r6, r8.

Using KNNDA, the three weightings of failed firms obtain the same excellent results: 100% of the failed firms and around 99% of the not-failed firms are identified.

Table B5. Logit, winsorized data, weighted failed firms 1591, total firms 4784

	All ratios		Median selection (5% and 1%)				Mean selection(1%)	
	10 ratios number (percentage)	10 ratios +inc. number (percentage)	7 ratios number (percentage)	7 ratios + inc. number (percentage)	5 ratios number (percentage)	5 ratios +inc. number (percentage)	3 ratios number (percentage)	3 ratios +inc. number (percentage)
Not-failed n=3,193	3035 (95.05)	2989 (93.61)	3045 (95.36)	2983 (93.42)	3053 (95.62)	2983 (93.42)	3.098 (97.02)	2.994 (93.77)
Failed n= 1,591	559 (35.14)	946 (59.46)	516 (32.43)	946 (59.46)	344 (21.62)	946 (59.46)	215 (13.51)	903 (56.76)
Total well classified n= 4,784	3.594 (75.13)	3.935 (82.25)	3.561 (74.44)	3.929 (82.13)	3.397 (71.01)	3.929 (82.13)	3.313 (69.25)	3.897 (81.46)

Using logit, when failed firms are weighted to reach approximately 50% of not-failed firms, well-classified failed firms increase, obtaining a better percentage (from 14% to 35%) as the number of variables is higher. A stable 59% is obtained when the qualitative variable is added. In exchange, the percentage of well-classified not-failed firms goes down to 95% when only ratios are used, and decreases more (93%) when the qualitative variable is added.

Table B6. Probit, winsorized data, weighted failed firms 1591, total firms 4784

	All ratios			Median selection (5% and 1%)			Mean selection(1%)	
	10 ratios number (percentage)	10 ratios +inc. number (percentage)	7 ratios number (percentage)	7 ratios + inc. number (percentage)	5 ratios number (percentage)	5 ratios +inc. number (percentage)	3 ratios number (percentage)	3 ratios +inc. number (percentage)
Not-failed n=3,193	3057 (95.74)	2996 (93.83)	3064 (95.96)	2992 (93.70)	3065 (95.99)	2986 (93.52)	3.110 (97.40)	2.994 (93.77)
Failed n= 1,591	473 (29.73)	946 (59.46)	473 (29.73)	946 (59.46)	344 (21.62)	946 (59.46)	215 (13.51)	903 (56.76)
Total well classified n= 4,784	3.530 (73.79)	3.942 (82.40)	3.537 (73.93)	3.938 (82.32)	3.409 (71.26)	3.932 (82.19)	3.325 (69.50)	3.897 (81.46)

Using probit, the results are similar albeit a bit worse for the highest number of variables when using only ratios.

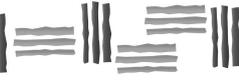
Table B7. Logit and probit, tests, winsorized data, weighted failed firms 1591, total firms 4784

	All ratios			Median selection (5% and 1%)			Mean selection (1%)	
	10 ratios	10 ratios +inc.	7 ratios	7 ratios + inc.	5 ratios	5 ratios +inc.	3 ratios	3 ratios +inc.
LOGIT								
Prob>chi2	0.0000*	0.0000*	0.0000*	0.0000*	0.0000*	0.0000*	0.0000*	0.0000*
McFadden's R2	0,161	0,284	0,144	0,269	0,089	0,246	0,071	0,252
McFadden's Adj R2	0,157	0,28	0,141	0,266	0,087	0,244	0,07	0,252
BIC	-35335,323	-36073,537	-35255,376	-36012,621	-34941,617	-35886,589	-34849,892	-35797,44
Area under ROC	0,7761	0,8438	0,7531	0,83	0,7385	0,8051	0,7255	0,7859
PROBIT								
Prob>chi2	0.0000*	0.0000*	0.0000*	0.0000*	0.0000*	0.0000*	0.0000*	0.0000*
McFadden's R2	0,155	0,276	0,139	0,262	0,089	0,241	0,071	0,224
McFadden's Adj R2	0,151	0,272	0,136	0,259	0,087	0,239	0,07	0,222
BIC	-35298,948	-36025,258	-35225,7	-35969,951	-34937,639	-35857,091	-34847,784	-35770,865
Area under ROC	0,7761	0,8434	0,7532	0,8316	0,7302	0,8059	0,7237	0,7869

After weighting the failed firms, the tests applied show much better fit than using the real proportion, except the area under ROC that shows only slightly better numbers.



UNIVERSIDAD
PABLO
OLAVIDE
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA
ECONOMÍA Y LA EMPRESA (24). Páginas 89–128.
Diciembre de 2017. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
www.upo.es/revistas/index.php/RevMetCuant/article/view/2882

La informalidad laboral colombiana en los últimos años: análisis y perspectivas de política pública

MORA RODRÍGUEZ, JHON JAMES

Departamento de Economía

Universidad Icesi (Colombia)

Correo electrónico: jjmora@icesi.edu.co

RESUMEN

Este artículo analiza la informalidad laboral en Colombia en los últimos años. A partir de plantear una discusión sobre el concepto de informalidad laboral en la teoría estructuralista y la teoría institucionalista, se analizan las estrategias empíricas aplicadas al caso colombiano. Debido a que la informalidad ha estado relacionada con la coexistencia de segmentos laborales, analizamos la existencia de segmentación del mercado laboral en Colombia encontrando que efectivamente el mercado laboral colombiano se encuentra segmentado. Por último, se discuten algunas recomendaciones de política pública activa para contrarrestar la informalidad en Colombia.

Palabras claves: informalidad laboral; estructuralismo; institucionalismo; teoría de informalidad laboral; segmentación del mercado laboral.

Clasificación JEL: C10, J46, O17.

MSC2010: 91B40; 62P20; 62-07.

Informal Labor in Colombia in Recent Years: Analysis and Perspectives of Public Policy

ABSTRACT

This article analyzes informal labor in Colombia in recent years. Starting from discussing the concept of informal labor in structuralism theory and institutionalism theory, the empirical strategies applied to the Colombian case are analyzed. Because informal labor has been related to the coexistence of labor segments, we analyze the existence of labor market segmentation in Colombia, finding that the Colombian labor market is indeed segmented. Finally, we discuss some recommendations of active public policy to counter informal labor in Colombia.

Keywords: informal labor; structuralism; institutionalism; theory of informal labor; labor market segmentation.

JEL classification: C10, J46, O17.

MSC2010: 91B40; 62P20; 62-07.



1. Introducción

La informalidad laboral es un fenómeno que se ha vuelto permanente en los países de América Latina y es común en la literatura encontrar referencias con respecto a niveles de informalidad alrededor del 50% en las últimas décadas. Colombia es, sin lugar a dudas, ejemplo de ello: López *et al.* (1987), Caro (1995), López (1996), Henao *et al.* (1999), Ribero (2003), Uribe *et al.* (2006b), Flórez (2002) y Mora y Muro (2014), entre otros, muestran tasas de informalidad de entre el 50% y el 60% en las décadas de los ochentas y de los noventas del siglo pasado, mostrando que éste es y ha sido un fenómeno permanente del mercado laboral colombiano.

La teoría económica ha planteado al menos dos posibles explicaciones: aspectos estructurales de la economía o aspectos institucionales. E incluso algunos autores colombianos y argentinos recientemente han planteado la posibilidad de unir ambos conceptos en un solo modelo econométrico sin tener en cuenta las implicaciones teóricas de ello.

Desde el enfoque estructural, el tamaño de los sectores incide sobre la informalidad y la coexistencia de un sector moderno con un sector tradicional nos muestra las tensiones entre formalidad e informalidad mediadas por diferencias en productividades que a su vez inciden sobre los salarios. Portes y Schaufler (1993) consideran que es la misma lógica y funcionamiento del capitalismo lo que lleva a la informalidad, jugando un papel importante en la acumulación ya que incide sobre la provisión de bienes y servicios de bajo costo para los trabajadores de las empresas formales como en la descentralización y el movimiento entre el sector formal e informal (Portes y Haller, 2004).

Por otro lado, desde el enfoque institucional, son las instituciones quienes generan incentivos que inciden sobre las elecciones racionales de los agentes a la hora de elegir entre el sector formal e informal.

Adicionalmente, existen perspectivas más neoliberales basadas en la elección racional de los sujetos, como la planteada por De Soto (1987) para quien las actividades informales son una respuesta a la rigidez de los estados mercantilistas predominantes en Perú y en general en América Latina. Para La Porta y Shleifer (2014), la evidencia “no soporta particularmente la visión romántica de De Soto acerca de la informalidad como potencial acumulado” de energía empresarial productiva, de tal forma que la mayoría de empresas informales son demasiado ineficientes para sobrevivir en el sector formal de la economía.

Bajo la visión del enfoque institucional, las actividades informales consisten en un escape racional de los agentes que no tienen incentivos para formar del sector regulado (Perry *et al.*, 2007; Maloney, 2003). Es en este contexto donde dadas las preferencias y los costos se toma la decisión de ser formal e informal.

Si bien teóricamente es claro que los dos enfoques no podrían ser más antagonistas (ya que, por un lado, hay elecciones y, por el otro, los individuos se ven obligados a estar en la informalidad laboral en tanto que existe racionamiento en uno de los sectores y este es un proceso involuntario), muchos autores han mezclado empíricamente elementos de una u otra vertiente sin la más mínima discusión de los supuestos: unos tal vez pensando en que son menores las implicaciones a fin de dar cuenta de una realidad y otros pensando de manera explícita en que ambas explicaciones pueden coexistir en un solo modelo y, por lo tanto, como plantea Jiménez (2012: p. 136), *“es viable estimar un modelo en el que se incluyen variables de ambos enfoques teóricos para explicar el comportamiento de la tasas de informalidad laboral”*.

El objetivo de este artículo consiste: en primer lugar, en analizar cuáles son los supuestos que se consideran fundamentales en ambas visiones de la informalidad laboral colombiana y cuáles son irreconciliables; y, en segundo lugar, mostrar los diferentes trabajos realizados hasta ahora para finalmente plantear recomendaciones de política económica que busquen reducir los niveles en la informalidad laboral colombiana, ya que esta no solo es una preocupación de los economistas laborales en Colombia sino también de la mitad de los trabajadores colombianos que viven en situación de informalidad.¹

Este artículo se encuentra estructurado de la siguiente forma. En la primera sección se presentan las dos teorías predominantes sobre la informalidad laboral. En la sección 2, se analizan el concepto de informalidad laboral, sus orígenes y las formas de medirlos. En la sección 3, se presentan los resultados de los diferentes artículos realizados hasta ahora en Colombia, además de analizar los planteamientos que buscan unificar formalmente ambas teorías en un solo modelo así como las diferentes estimaciones realizadas al respecto. En la cuarta sección, se discute cómo la

¹ Arango y Hamman (2012: p. XXXV) realizaron una encuesta a un grupo de especialistas del mercado laboral colombiano y entre las respuestas sobre las políticas que recomendarían para mejorar el funcionamiento del mercado de trabajo se encuentran el *“crear incentivos para la formalización de la mano de obra”* además de ofrecer *“incentivos para la creación de empresas formales”*.

segmentación laboral explica la informalidad laboral y se presenta un modelo para la misma. Finalmente, la última sección presenta las conclusiones y algunas ideas de política pública para reducir la misma.

2. El concepto de informalidad laboral: Una revisión

El concepto de informalidad urbana, como bien lo destaca Tokman (2001), tiene como característica que incluye a todo tipo de actividades en las que se puede ingresar con mayor facilidad que en las del sector formal de la economía. El sector informal predominantemente se explica por actividades con poco capital, bajo nivel tecnológico y escasos requerimientos de capital físico y humano. El empleo en estas actividades informales se caracteriza por la identificación de la empresa con la persona y, en el caso de que se contraten personas, estas generalmente son familiares remunerados (Tokman, 2001: pp. 18-19).

Por su parte, el concepto de informalidad laboral tiene su origen en la misión dirigida por Jolly y Singer para la Organización Internacional del Trabajo (OIT en adelante) sobre Kenia en 1972 (OIT, 1972) y a la que Tokman (2011, p. 18) hace referencia como sigue: *“[l]a difusión del concepto sector informal es atribuible al informe de empleo de la OIT sobre Kenia de 1972, en el cual se reconoce que el problema de empleo en naciones en desarrollo, a diferencia de en las más desarrolladas, no se manifiesta en desempleo sino, sobre todo, en ocupación que genera ingresos insuficientes para la sobrevivencia. En esa situación se encuentran los trabajadores pobres, que se desempeñan en actividades caracterizadas por su baja productividad, las cuales se definen en oposición a las actividades formales y resultan en exclusión en el acceso a los mercados y a los recursos productivos”*.²

Como era natural, el debate en América Latina surge debido a los problemas en materia de desarrollo, empleo y crecimiento por los cuales atravesaban los países latinoamericanos en los ochentas (la famosa década perdida). Las formas de contratación (sobre todo en textiles y confecciones), la aparición de contratos flexibles, de empresas de servicios temporales y toda la intermediación laboral, las cooperativas de trabajo asociado, la descentralización de la producción, la relación de las empresas formales subcontratando actividades con empresas informales, y los

² Cabe destacar que los trabajos de 1972 están inspirados en el Trabajo de Hart (1973), quien inicialmente propone reemplazar la categoría de desempleo y subempleo por la de actividad informal.

cambios en la división internacional del trabajo dieron lugar a que la OIT en la Conferencia Internacional del Trabajo del año 2002 ampliara el concepto de sector informal al incorporar aquellas actividades que no estén reguladas o protegidas de forma legal de tal manera que se incluye en las definiciones de informalidad laboral a todos los ocupados, sin considerar el tamaño de la empresa, que no estén cobijados por la legislación laboral correspondiente (Moser, 1978; Portes *et al.*, 1989; Chen *et al.*, 2004, Tokman, 2011).

La resolución de la OIT en la XV Conferencia Internacional de Estadísticos del Trabajo (OIT, 1993) considera que *"[e]l sector informal en general puede caracterizarse como algo consistente en unidades económicas orientadas a la producción de bienes y servicios con el objetivo primario de generar empleo e ingresos para las personas involucradas. Estas unidades típicamente operan a un nivel bajo de organización, con poca división o separación entre trabajo y capital en tanto factores de la producción y en una pequeña escala. Las relaciones laborales a su interior —cuando existen— están basadas en empleo casual, parentesco o relaciones personales y sociales, más que acuerdos contractuales acompañados de garantías formales"* (traducción del autor)³.

Como bien plantea Farné (2015), *"[l]a informalidad es un concepto OIT... La informalidad es un tema sobre el cual la OIT está trabajando hace casi 50 años"*⁴. De esta forma, el concepto de informalidad, indudablemente ha estado delimitado por las consideraciones de la OIT en términos de su medición y que se han incorporado de manera estadística en América Latina por instituciones como el Departamento Administrativo Nacional de Estadística en el caso Colombiano, como se puede observar a continuación.

En particular, la OIT (2006) muestra los cambios en el concepto de informalidad laboral en los últimos años como se recoge en Tabla 1.

³ Hussmanns (2004: p. 21) incorpora el siguiente extracto de la resolución OIT (1993): *"The informal sector may be broadly characterized as consisting of units engaged in the production of goods and services with the primary objective of generating employment and incomes to the persons concerned. These units typically operate at a low level of organization, with little or no division between labour and capital as factors of production and on a small scale. Labour relations –where they exist- are based mostly on casual employment, kinship or personal and social relations rather than contractual arrangements with formal guarantees"*.

⁴ Discurso en la ceremonia de ascenso a la categoría de profesora asociada de la profesora Jiménez en la Universidad del Valle.

Tabla 1. Definiciones de Informalidad laboral según la OIT

Características	Programa Regional del Empleo para América Latina y el Caribe (PREALC-OIT)	XV Conferencia Internacional de Estadísticos del Trabajo (CIET) (sector informal)	XVII Conferencia Internacional de Estadísticos del Trabajo (CIET) (empleo informal)
Situación en el empleo	Trabajadores independientes o por cuenta propia (excluye profesionales y técnicos).	Empresas informales de trabajadores por cuenta propia (incluyendo profesionales y técnicos si no tienen condiciones de formalidad, en especial registro conforme a la legislación nacional). Pueden incluirse todas las empresas por cuenta propia o solamente las que no están registradas.	Trabajadores por cuenta propia dueños de sus propias empresas del sector informal (incluyendo profesionales y técnicos si no tienen condiciones de formalidad, en especial registro conforme a la legislación nacional). Pueden incluirse todos los trabajadores por cuenta propia dueños de sus propias empresas informales o solamente los que no están registrados.
	Empleadores o propietarios de empresas de cinco o menos ocupados.	Empresas de empleadores informales en función de una o varias condiciones: (i) el tamaño de las unidades es inferior a un nivel determinado de empleo; y (ii) no están registradas o no ocupan empleados registrados.	Empleadores dueños de sus propias empresas del sector informal en función de una o varias condiciones: (i) el tamaño de las unidades es inferior a un nivel determinado de empleo; y (ii) no están registradas o no ocupan empleados registrados.
	Asalariados en empresas de cinco o menos ocupados.	Asalariados ocupados en empresas informales en función de una o varias condiciones: (i) el tamaño de las unidades es inferior a un nivel determinado de empleo; y (ii) no están registradas o no ocupan empleados registrados.	Asalariados que tienen empleos informales, tanto si están empleados por empresas del sector formal o por empresas del sector informal.
	Trabajadores familiares o auxiliares no remunerados.	Trabajadores familiares o auxiliares ocupados en empresas de empleadores informales o en empresas de trabajadores por cuenta propia informales.	Trabajadores familiares o auxiliares, independientemente de si trabajan en empresas del sector formal o informal.
		Miembros de cooperativas de productores que no están formalmente constituidas como entidades legales.	Miembros de cooperativas de productores que no están formalmente constituidas como entidades legales.
	Servicio doméstico.	El servicio doméstico se excluye del ámbito del sector informal, identificándose de manera separada.	Asalariados de los hogares que tienen empleos informales.
			Trabajadores en actividades no especializadas de producción o bienes para consumo final de su propio hogar.
Unidad de observación	Las personas ocupadas.	Las unidades de producción.	Los empleos.

Fuente: Tomado de OIT (2006).

A la par con el debate de la OIT, dos teorías se abrieron camino en la explicación de la misma: la informalidad laboral vista a partir del estructuralismo y la informalidad laboral vista a partir del institucionalismo.

La visión estructuralista considera que la informalidad laboral se encuentra relacionada con el bajo desarrollo del sector moderno de la economía (sector formal), el cual no absorbe la fuerza laboral disponible llevando a los trabajadores a sectores menos productivos o a engrosar las filas del desempleo. De esta forma, se habla de exclusión (Perry *et al.*, 2007) y de dualismo (Hart, 1973; Doeringer y Piore, 1971; Harris y Todaro, 1970; Piore, 1983; OIT, 1972; Singer, 1980; Tokman y García, 1981; PREALC, 1985; Tokman, 1978, 1982, 2011).

Los trabajos de PREALC (Tokman y García, 1981; PREALC, 1985) muestran la existencia de un excedente de mano de obra como resultado del proceso de industrialización que no generaba incrementos en las oportunidades de empleo (Pérez, 1991). De esta forma, el excedente de mano de obra se absorbía fuera del sector moderno de la economía. Así, existe subordinación heterogénea en el sentido de que la expansión del sector informal depende de nichos económicos no ocupados por el sector moderno (Tokman, 1978). Para Mezzera (1987: p. 4), la ausencia de mercados de capitales en las economías latinoamericanas lleva a que las firmas reinviertan sus excedentes y se financien con su flujo de caja y esto lleva a establecer barreras de entrada de mercados de bienes que involucra un sesgo inmanente contra las técnicas intensivas de trabajo.

Por lo tanto, existen dos sectores en la economía: uno moderno, que utiliza economías de escala tanto en el capital físico como en el humano, y uno tradicional. El sector moderno utiliza técnicas de producción intensivas en capital, es muy productivo, genera empleos de calidad y está guiado por la lógica de la acumulación capitalista. El sector tradicional (informal) no requiere de capital físico o humano y se caracteriza por una baja capacitación laboral, lo cual a su vez se ve reflejado en una baja productividad, sin barreras a la entrada. En este sector existe una sobreoferta laboral debido a los bajos costos de entrada en el sector, por lo cual no es posible limitar la entrada de trabajadores por encima de los niveles de eficiencia. El sector informal opera en gran parte con unidades pequeñas de baja productividad.

La teoría estructuralista parte del hecho de que históricamente no existe emparejamiento entre la oferta y la demanda, tanto en términos cuantitativos como cualitativos, debido a que las sociedades preindustriales (caracterizadas por economías de subsistencia), cuando se insertan en

los mercados globales y debido a la aparición de un sector moderno, el cual esta tecnológicamente avanzado y con estructuras de mercado de monopolio u oligopolio, recibe la mano de obra que no se puede absorber en el sector moderno por lo que los individuos deben de generar sus propios empleos. De esta forma, el sector informal es anterior al surgimiento del sector formal en la economía (Portes, 1995). Ahora bien, existen dos vías por las cuales existe una sobreoferta en el sector informal. Por un lado, la mano de obra en los países en vías de desarrollo generalmente es poco cualificada y abundante y, por otro lado, el sector moderno puede expulsar también mano de obra debido a los cambios tecnológicos entre otros. Esta sobreoferta en el sector informal lleva a una menor remuneración en dicho sector ya que los trabajadores que provienen del sector formal se encuentran con restricciones de capital físico en el sector informal, lo cual los hace menos productivos que en el sector formal.

Por su parte, la visión institucionalista hace énfasis en los costos que el estado y las instituciones imponen a las empresas. Debido a las regulaciones que enfrentan las empresas en términos de impuestos de todo tipo y a los requisitos formales para establecer y registrar las empresas así como una serie de instituciones reguladas por el estado como es el caso de la política en torno al salario mínimo, el sistema de pensiones y pagos de parafiscales, los incentivos para permanecer en situación de informalidad laboral son muy altos. En términos generales, los costos de transacción a los que se enfrentan las firmas desalientan la formalización de estas (Zylbersztajn y Graça, 2003). La restricción al acceso al sistema financiero aumenta la situación de informalidad laboral (De Soto, 1987, 2000). Como indican Uribe y Ortiz (2006, p. 31), *“[d]ada la asimetría de la información que caracteriza a los mercados financieros y el alto costo de adquirir información sobre los clientes, los intermediarios financieros usualmente canalizan el crédito en condiciones más baratas y rápidas hacia aquellos clientes con capacidad de respaldar sus deudas”*.

Como plantean Uribe et al. (2006a: p. 225), *“[e]l enfoque institucionalista ignora las restricciones que puedan provenir de la estructura económica y se concentra en las decisiones que los individuos toman con respecto a la participación en la actividad económica. Por ello plantean que los agentes toman sus decisiones con base en un análisis costo beneficio cuyas opciones son pertenecer al sector formal o al informal. Si el beneficio neto de ser informal es mayor (menor), la gente optará por la informalidad (formalidad). Por tanto, a diferencia de los enfoques anteriores, este enfoque institucionalista considera la informalidad como resultado de una decisión voluntaria”*.

Para Maloney (1998), el sector informal actúa como un sector empresarial desregulado mientras que el sector formal está caracterizado por rigideces sindicales, costos laborales, costos tributarios y regulatorios, entre otros. Levenson y Maloney (1998) plantean que la formalidad resulta de una decisión de participar en los beneficios que ofrecen algunas instituciones sociales y, como consecuencia, las firmas pequeñas e informales no se benefician de la participación en el sistema debido a que los contratos son realizados con parientes y amigos, los cuales a su vez son trabajadores y clientes potenciales. La participación institucional es un activo, al igual que el trabajo y el capital físico y humano. Para Loayza (1997), el sector informal está compuesto por un conjunto de unidades económicas que no pagan impuestos al gobierno ni respetan las regulaciones institucionales. De acuerdo con lo anterior, el sector informal surge porque el gobierno exige e impone regulaciones e impuestos y son dichas características las que hacen al sector formal poco atractivo, por costoso, a pesar de las ventajas que le ofrece la institucionalidad a las empresas: servicios públicos completos, garantía sobre los derechos de propiedad, acceso a mercados de capitales y aseguramiento financiero, entre otros.

Cabe resaltar el trabajo, desde una perspectiva neomarxista, de Castells y Portes (1989) quienes consideran que la diferencia fundamental entre la economía formal e informal no es su relación con el producto final, sino con la forma en la cual este se produce y se intercambia, lo cual permite distinguir tres categorías: actividades formales, actividades informales y actividades ilegales. Para Castells y Portes (1989), la informalidad no es una condición individual; es “un proceso de generación de ingreso caracterizado por un hecho central: su no regulación por instituciones sociales en un contexto social y legal donde actividades similares si lo están” (Castells y Portes, 1989: p. 12). De esta forma, el sector informal ha estado históricamente articulado al sector formal siendo la informalidad un sinónimo de actividades no reguladas.

Sin lugar a dudas, los problemas conceptuales de incluir ambas definiciones en un modelo radican en que los supuestos básicos son irreconciliables y que responde a las preguntas planteadas en la introducción de este ensayo. ¿Qué supuestos realmente son los que se consideran fundamentales en ambas explicaciones de la informalidad laboral? Pues bien, mientras que para los estructuralistas, la informalidad laboral es primordialmente involuntaria; para los institucionalistas, la informalidad laboral es fundamentalmente voluntaria. La estructura productiva de un país limita la movilidad laboral entre el sector formal e informal, lo que no depende del individuo según la versión

estructural. Sin embargo, para los institucionalistas existe un proceso racional de elección entre costos y beneficios de elegir formalizarse.

Un punto importante en la discusión sobre la informalidad laboral consiste en la pregunta: ¿son los mercados segmentados? Para Fields (1980), un aspecto importante en la segmentación de los mercados consiste en que en uno de los sectores existe un acceso limitado a buenos trabajos (seguridad social, salarios altos, condiciones de trabajo seguras y oportunidades de entrenamiento) mientras que en el otro no. Por su parte, PREALC asume un modelo de segmentación basado en tres hipótesis: a) el mercado laboral debe entenderse en términos de segmentos y no como un agregado homogéneo; b) los mecanismos de determinación del nivel de empleo y salario difieren según el segmento; y c) la segmentación debe concebirse como un fenómeno permanente y no coyuntural (Pérez, 1991: p. 22.). Desde el punto de vista institucional, Doering y Piore (1971) también consideran la segmentación laboral a partir de los mercados internos de trabajo en la que la asignación y el salario se rigen por normas y procedimientos internos y no por las fuerzas competitivas⁵. De esta forma, siguiendo a Toharia (1983), los mercados internos de trabajo son el resultado del funcionamiento no competitivo del mercado de trabajo y de las estrategias optimizadoras de los empresarios, quienes buscan reducir los costos de la rotación laboral bajo el contexto anterior.

3. La informalidad laboral en Colombia: de la teoría a la medición

La medición oficial de la informalidad laboral en Colombia ha estado determinada por los lineamientos de la OIT, los cuales han llevado a que el Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE en adelante), de manera consistente, publique la información oficial sobre la informalidad laboral. De esta forma, el Documento metodológico sobre el cálculo de la informalidad laboral publicado por el DANE señala que *“la definición adoptada por el DANE, para la medición del empleo informal se remite a la resolución de 1993 y las recomendaciones del grupo de DELHI, de las que se toman elementos que se ajustan a la realidad del mercado laboral colombiano. Estas indican que la aproximación a la medición de informalidad laboral en materia de escala de personal*

⁵ La teoría inicial de la segmentación laboral se divide entre los institucionalistas como Doering y Piore y la corriente radical de Edwards, Gordon y Reich. Para estos últimos, la persistencia en la segmentación es resultado de la intervención de una lucha político-económica que acentúa la división en el mercado de trabajo.

ocupado en las empresas debe ser de cinco trabajadores, y en particular, toma otros que permiten precisar si un trabajador se encuentra trabajando en el empleo informal. A continuación se describen las características principales que hacen operativa la definición para el DANE: 1. Los empleados particulares y los obreros que laboran en establecimientos, negocios o empresas que ocupen hasta cinco personas en todas sus agencias y sucursales, incluyendo al patrono y/o socio; 2. Los trabajadores familiares sin remuneración; 3. Los trabajadores sin remuneración en empresas o negocios de otros hogares; 4. Los empleados domésticos; 5. Los jornaleros o peones; 6. Los trabajadores por cuenta propia que laboran en establecimientos hasta cinco personas, excepto los independientes profesionales; 7. Los patronos o empleadores en empresas de cinco trabajadores o menos; 8. Se excluyen los obreros o empleados del gobierno” (DANE, 2009: p. 8).

No obstante, los criterios utilizados y las formas de abordar la informalidad laboral de los académicos colombianos han sido tan variadas que han llevado a un rango de informalidad laboral muy amplio; como bien anota Sánchez (2013: p. 16), “los niveles de informalidad van desde el 15% hasta el 70%” y, según Guataqui *et al.* (2010: p. 7), “las definiciones propuestas nos generan un rango de informalidad de 26% a 63%”.⁶ Como bien plantean Uribe *et al.* (2006a: p. 268), “estas versiones se refieren a cosas diferentes y por supuesto ellas se cruzan. Los pobres son usualmente los que menos cumplen el marco regulatorio institucional pues su objetivo primordial es la subsistencia: pero no todos los pobres incumplen todas sus obligaciones. Por otra parte, los que no cumplen las regulaciones son usualmente pobres, pero no todos los que no acatan las regulaciones son pobres. Nótese pues las diferencias entre los enfoques. Por ello, sus criterios de medición difieren y por ello es también equivocado pretender fusionar ambas concepciones”.

El trabajo de Flórez (2002) se puede clasificar dentro de la perspectiva de la teoría de la informalidad desde el punto de vista estructural. La autora divide al sector informal colombiano en cuatro grupos ocupacionales: cuenta propia, trabajadores familiares no remunerados y servicio doméstico (subsector de subsistencia), asalariados en pequeñas y grandes firmas no cubiertos por la seguridad social en salud (subsector de asalariados informales) y dueños de pequeñas firmas (subsector de propietarios). Para Flórez, el sector de subsistencia es compatible con la teoría dual

⁶ La discusión ha estado caracterizada por el hecho de que, aunque los laboristas colombianos estemos hablando del mismo tema – la informalidad laboral –, los enfoques no coincidan, sean diferentes y los criterios de medición sean diferentes (Uribe *et al.*, 2006a; Sánchez, 2013).

de los mercados de trabajo y su comportamiento es anticíclico, En general, tanto el subsector de subsistencia como el de propietarios están relacionados con la visión de la informalidad laboral estructural. Por su parte, Uribe *et al.* (2006a) consideran el tamaño de los establecimientos en los cuales se realiza la actividad laboral y consideran que, para el periodo 1988 a 2000, el mercado de trabajo colombiano estaba segmentado entre el sector formal e informal cuya dimensión está acorde con el ciclo económico de tal forma que en periodos de recesión aumenta la informalidad laboral, los cuentapropistas, y disminuyen los trabajadores asalariados del sector formal. Botero (2011) presenta un modelo de equilibrio general computable utilizando la definición de informalidad del DANE-OIT. Para Botero (2011: p. 11), la informalidad laboral *“es una alternativa de trabajo de baja calidad, a la que se recurre solo cuando no existen oportunidades en los mercados formales de trabajo. Alguna literatura reciente enfatiza, además, los aspectos de demanda del problema y sugiere un enfoque de economía dual”*. Cardenas y Mejia (2007) consideran la informalidad laboral a partir de la definición PREALC (1978), que está en el marco de la informalidad estructural: *“la informalidad laboral no es sinónimo de ausencia de seguridad social. [...] [L]a afiliación de los trabajadores informales a los sistemas de pensiones, y especialmente, salud, es considerable”* (Cardenas y Mejía, 2007: p. 10).

Cabe observar que, en tanto la informalidad laboral estructural implique segmentos de mercado y, por lo tanto, algún tipo de segmentación laboral, los resultados de autores como Fields (1980), Bourguignon (1979), Nupia (1997), Jaramillo *et al.* (2001), Galvis (2002), Uribe *et al.* (2008), Ortiz *et al.* (2008), Pedraza (2011), Prada (2012), Peña (2013), García (2017) y Mora y Muro (2014) podrían hacer parte de la literatura sobre informalidad laboral estructural ya que conllevan a una asignación involuntaria a uno de los segmentos caracterizados por la informalidad laboral. Sin embargo, la discusión sobre la segmentación en el mercado laboral se dejará para la sección siguiente.

Con respecto a la informalidad laboral institucional, la principal variable utilizada consiste en la afiliación a la seguridad social, existencia de contratos y salarios mínimos. Para Núñez (2002), existen dos tipos de individuos que participan en el sector informal: por un lado, para aquellos para los que el sector informal es un sector de supervivencia, con trabajadores marginados, explotados y

que reciben salarios bajos; mientras que en el extremo están trabajadores autónomos, altamente cualificados, que utilizan tecnología de punta, con prestaciones sociales y altos ingresos.⁷

Ahora bien, aunque Núñez (2002) discute los beneficios de pertenecer o no a la informalidad laboral utiliza la definición del DANE de informalidad laboral (DANE, 2009: p. 7). Curiosamente, el autor utiliza para ecuaciones de ingresos la participación en el sector informal (para corregir el sesgo de selección), incluyendo entre los determinantes de estas los ingresos, impuestos y sectores. Almanza (2006: p. 10) utiliza como indicador de informalidad laboral a los trabajadores ocupados que afirman no tener afiliación a la seguridad social en salud.⁸ Para Almanza, los cambios en la demanda relativa entre 1992 y 2004 se atribuyen a cambios intrasectoriales donde el sesgo de demanda hacia los trabajadores informales es resultado de cambio en precios de los factores no laborales, cambios tecnológicos en la producción o cambios en la forma de contratación. Las firmas, buscando ahorros de costos, optan por prácticas como el *outsourcing* o la contratación de cooperativas de trabajo para reducir los costos de operar en la formalidad. Bernal (2009: p. 161) estima la probabilidad de ser informal, considerando como trabajador informal aquellos que no están afiliados a salud y pensión. Mora y Muro (2014), a partir de la construcción de la informalidad laboral como la afiliación en salud y pensión, discuten el efecto del salario mínimo sobre la decisión de ser informal. Los autores encuentran que el incremento de un 1% de la brecha entre el salario mínimo y los ingresos incrementa la probabilidad de entrar a la informalidad de un 7% y en un 38% la probabilidad de permanecer en situación de informalidad (es decir, permanecer más periodos en situación de informalidad).

Por otro lado, existen autores que presentan mediciones de la informalidad laboral sin adherirse específicamente a una u otra teoría. La discusión se centra en presentar las estimaciones

⁷ El supuesto de elección para todos los trabajadores es algo que merece más atención ya que no es una posibilidad para todos los trabajadores e, incluso, no solo los de ingresos altos como los plantean Uribe *et al.* (2006a), sino que el umbral podría estar definido por el salario mínimo tal y como lo muestran Mora y Muro (2014).

⁸ Almanza no tiene claro las definiciones teóricas de informalidad laboral y sus implicaciones, como puede observarse: “[e]ste trabajo concluye que la visión más apropiada es la estructuralista, a partir de la cual se mide la informalidad como los trabajadores que no están afiliados al sistema de seguridad social en salud” (Almanza, 2006: p. 8, segundo párrafo), lo que continúa con “en este trabajo se seguirá la definición de informalidad según el enfoque estructuralista, ya que los resultados de Florez (2002) sugieren que en Colombia este es un fenómeno que se ha expandido a raíz de la excesiva e ineficiente regulación del estado” (Almanza, 2006: p.8, tercer párrafo).

realizadas utilizando la definición de la OIT-DANE y, por la vía institucional, la afiliación o no a la seguridad social, contratos, etc. Por ejemplo, Caro (1995) utiliza la definición de informalidad laboral del DANE (con una variante en el sector manufacturero que consiste en subir a 10 el número de trabajadores) e incluye el cubrimiento en salud, lo cual implica, como mencionan Uribe *et al* (2006a: p. 232), una “visión institucionalista”. Por su parte, López *et al.* (1987) utilizan la encuesta sobre informalidad laboral realizada en 1984 para las cuatro áreas metropolitanas y consideran que las unidades de pequeña escala se caracterizan por el no pago de prestaciones sociales e incumplimientos con respecto al salario mínimo. Los resultados muestran que en 1984 el 82% de los trabajadores informales no tenían protección, mientras que en el sector formal el 84% estaban afiliados a la seguridad social. De esta forma, se utiliza la metodología del DANE en términos de la informalidad laboral y adicionalmente incorpora el cumplimiento de la regulación a la seguridad social, lo cual implica una visión institucional. Ribero (2003) propone cuatro agrupaciones para el sector informal en un análisis sobre la situación laboral de las mujeres: trabajadores por cuenta propia (excepto profesionales), trabajadores independientes (excepto profesionales) más trabajadores por cuenta propia, servicio doméstico y trabajadores familiares sin remuneración, trabajadores en firmas hasta con 10 trabajadores y trabajadores sin contrato laboral, afiliación social a salud y pensión. La tercera definición, está más acorde con la visión estructural de la informalidad laboral, arroja resultados de una tasa de informalidad laboral cercana al 64%. Aun cuando se presentan estas cuatro definiciones, las estimaciones realizadas por Ribero (2003) para el caso de las mujeres no incluyen las cuatro definiciones y le da un énfasis mayor en sus estimaciones a la visión institucionalista de la informalidad. García (2008), utilizando modelos de datos de panel, estima el efecto de la participación del PIB industrial y del gasto en nómina *per cápita* sobre la tasa de informalidad laboral definida por el DANE (informalidad estructural) y la tasa de informalidad laboral definida a partir de la afiliación a salud y pensión (informalidad institucional). En ambos modelos, las variables fueron estadísticamente significativas, por lo que ambos modelos son útiles para predecir la informalidad laboral. Guataqui *et al.* (2010), utilizando la GEIH del 2010, calcula los efectos marginales de un conjunto de covariables (genero, edad, educación, ciudades y sectores) sobre la probabilidad de ser informal utilizando la definición del DANE-PREALC (informalidad estructural) y las definiciones fuertes y débiles por ellos definidas que tienen que ver con afiliaciones a salud y pensión, tipo de contrato y porcentaje sobre el salario mínimo (Informalidad institucional). La significancia estadística en los tres modelos de las variables se mantiene y, con respecto al

modelo de informalidad estructural y el modelo más “riguroso” de informalidad institucional, *“incluso en la magnitud de los efectos marginales, no hay grandes diferencias entre los modelos 1 y 2”* (Guataqui *et al.*, 2010: p. 113).

3.1. ¿Es posible conciliar las dos teorías en Colombia?

En los últimos años ha existido una serie de intentos explícitos por conciliar ambas visiones. Y, planteo específicamente que son explícitos en tanto los autores abiertamente buscan conciliar las dos versiones a diferencia de otros autores que incluyen variables de ambos modelos sin darse cuenta de ello.⁹

El primer intento por discutir la integración de ambas teorías es el de Uribe *et al.* (2006a). Los autores proponen que una forma de contrastar la hipótesis de informalidad laboral estructural consiste en analizar la calidad del empleo de tal forma que si existen mercados laborales segmentados ellos diferirán en términos de la calidad del empleo (Uribe *et al.*, 2006a: p. 254). Los autores encuentran diferencias sustanciales por niveles de escolaridad, experiencia, horas de trabajo e ingresos mensuales. Estas variables son fundamentales en la medición de la calidad del empleo (Mora y Ulloa, 2011; Mora y Pérez, 2015, Arroyo *et al.*, 2016). Llegan a la conclusión de que la economía urbana colombiana experimenta rendimientos crecientes a escala en capital físico y humano (Uribe *et al.*, 2006a: p. 262). A la par, proponen que una forma de contrastar la visión institucionalista de la informalidad consiste en los costos de transacción que impone el estado a los trabajadores. Para ello, proponen analizar la afiliación a la salud, pensiones, la existencia de contratos y el cumplimiento con el pago del salario mínimo. Los resultados de Uribe *et al.* (2006) muestran diferencias sustanciales por el tipo de empresa (unipersonales, famiempresas, microempresas, formales pequeñas, formales grandes). Por último y de manera interesante, los autores concluyen como *“cuando se ha entendido que ambas teorías se refieren a cosas diferentes aparece la posibilidad de fusionarlas, pero no de forma simétrica o como una simple mezcla”,* lo que implica realizar consideraciones en torno a la definición sobre los tamaños de planta (unipersonales, famiempresas y microempresas) así como el hecho de que *“los sobrecostos institucionales si pueden influir en las decisiones de las empresas y lanzarlas a la marginalidad legal.*

⁹ Agradezco los comentarios del referee con respecto al Programa Cambio Estructural y Desigualdad Social de la Universidad de Buenos Aires, que también ha realizado operacionalizaciones que permiten realizar mediciones sobre la informalidad laboral combinando la perspectiva estructural e institucional.

Pero este mecanismo de funcionamiento solo es válido para los trabajadores con ingresos suficientemente altos como para no estar restringidos al imperativo primordial de la subsistencia” (Uribe et al., 2006a: p. 269). De igual forma en Uribe y Ortiz (2006) se propone en el primer capítulo, titulado “Visiones sobre la informalidad laboral y una propuesta alternativa”, combinar las corrientes institucionales y estructurales para analizar el caso colombiano. La idea principal de ése capítulo es la misma que la de Uribe et al. (2006a) en el sentido que los trabajadores eligen dentro de un rango limitado de opciones (Uribe y Ortiz, 2006: p. 23) y que este rango es el rango de ingresos altos y, es solo para ellos, que se puede utilizar el análisis microeconómico a partir de la elección entre sector formal e informal. Con respecto a la informalidad estructural como bien lo plantean los autores “no se centra en las opciones individuales sino en las limitaciones estructurales del sistema que inciden en la capacidad de generación de empleo de buena calidad” (Uribe y Ortiz, 2006: p. 23). De esta forma, la propuesta es similar a la planteada por Uribe et al. (2006). Como indica Urrea (2009: p. 196), Uribe y Ortiz (2006) “[e]s un texto que intenta colocarse en el debate de las diferentes corrientes sobre la informalidad en América Latina y Colombia. Curiosamente, hasta el cuarto capítulo dicho intento se soporta en un manejo ecléctico de la teoría económica, que les da razón por igual tanto a estructuralistas como a teóricos de la búsqueda de empleo o de la elección racional laboral”. Sin embargo, como bien observa Urrea (2009, p. 196), en el último capítulo se asume la teoría de segmentación del mercado (corriente estructural) y se elimina el enfoque institucional como explicativo de la informalidad laboral, “[p]erdiendo la partida sobre la informalidad, la explicación de la búsqueda del empleo de los agentes individuales y sobre todo de las restricciones institucionales a los empleadores”.

En un segundo intento, Jiménez (2012) asume que existe un modelo único de informalidad, el cual es explicado tanto por variables institucionales como estructurales. Como este es un modelo estructural desde el punto de vista econométrico y no reducido, deberé referirme específicamente al modelo por las implicaciones que del mismo se derivan. El modelo completo propuesto por Jiménez (2012: p. 132) se define como:

$$TI_{it} = \beta_0 + X_{it}\alpha + Z_{it}\delta + u_{it} \quad (1)$$

En el modelo econométrico (1), TI_{it} es la tasa de informalidad, i es un conjunto de países, t representa los años, X_{it} es un vector de variables explicativas asociadas al enfoque estructuralista

y Z_{it} es un conjunto de variables explicativas asociadas al enfoque institucionalista. Jiménez (2012) plantea dos hipótesis:

1. $TI_{it} = X'_{it}\alpha + e_{it}$, cuando la informalidad es exclusivamente estructuralista;
2. $TI_{it} = Z'_{it}\delta + \omega_{it}$, cuando la informalidad es exclusivamente institucionalista.

En el caso de que simultáneamente α y δ no sean cero, coexistirán en el mismo modelo los dos tipos de informalidad (la institucional y la estructural). Con respecto al modelo planteado son varias las preguntas sin contestar por Jiménez (2012). En primer lugar, si uno considerase que en el modelo de informalidad estructural los individuos son asignados involuntariamente a uno u otro sector debido a *shocks* ocurridos por cambios en la economía y ello explica e_{it} mientras que en la informalidad institucional son los *shocks* a lo largo del ciclo de vida que afectan la elección por uno u otro sector, lo que explica ω_{it} , entonces ¿qué es U_{it} ? y ¿cómo se unen elecciones involuntarias con elecciones voluntarias en el término aleatorio de error y cuán dependientes serán unas y otras a lo largo del tiempo?

En segundo lugar, si bien no se plantea como supuesto implícito, es claro que para que se cumpla el modelo completo es necesario que $E(X'_{it} u_{it}) = E(Z'_{it} \omega_{it}) = 0$. ¿Se puede mantener este supuesto si el modelo de datos de panel considera efectos fijos para el modelo de informalidad estructural y efectos aleatorios para el modelo de informalidad institucional? Tal y como lo plantea Jiménez (2012), esta no es una discusión sin sentido: a continuación supóngase que c_i es la heterogeneidad individual no observada en el modelo de informalidad institucional y a_i es la heterogeneidad individual en el modelo de informalidad estructural; por lo que, debido a los supuestos realizados por Jiménez (2012), se tiene:

$$Cov(Z_{it}, c_i) = 0 \quad (2)$$

$$Cov(X_{it}, a_i) \neq 0 \quad (3)$$

Definiendo $M_{it} = [Z_{it}, X_{it}]$ y $d_i = [a_i]$, entonces cabe preguntarse cuál sería el valor de $Cov(M_{it}, a_i)$.

Dado a que (3) no se cumple, entonces $E(TI_{it} | M_{i1}, \dots, M_{iT}) = M_{it} \beta + E(d_i | M_{i1}, \dots, M_{iT})$ y claramente por (3), se tiene que $E(d_i | M_{i1}, \dots, M_{iT}) \neq E(d_i)$; por lo cual, los estimadores no son consistentes.

Si bien, no existe una discusión metodológica del modelo canónico planteado por Jiménez (2012), la forma de determinar la validez empírica de uno u otro modelo tampoco es la adecuada al utilizar el contraste de Davidson y Mackinnon (1981). Este contraste es válido cuando se tienen dos modelos con Z_{it} y X_{it} que explican a una tasa única de informalidad, IT_{it} . Sin embargo, éste contraste, en el contexto aplicado por Jiménez (2012), no es válido ya que IT_{it} no es la misma tasa de informalidad sino que viene construida de acuerdo a cada modelo; Vale la pena aclarar que el análisis sería similar para García (2008); es decir, se tiene una tasa de informalidad estructural donde las variables que la explican y forman parte de su medición son diferentes a la tasa de informalidad institucional, por lo cual $IT_{it}^{Estructural} \neq IT_{it}^{Institucional}$.

Además de que conceptualmente las definiciones son diferentes y excluyentes econométricamente, existirán errores de medición propios a cada definición, lo cual muestra un panorama más complejo de lo analizado por Jiménez (2012) y García (2008). Además, si se incluye Z_{it} en la explicación de la informalidad estructuralista, el rechazo o aceptación de este modelo implica la aceptación o no de la explicación institucional en la construcción de la informalidad desde el estructuralismo, lo cual merece de nuevo una discusión sobre los supuestos y viceversa. La no inclusión de Z_{it} en la ecuación principal implica un problema de identificación en el modelo mostrado en (1), pero la pregunta fundamental es si esta variable debería explicar $IT_{it}^{Estructural}$ cuando lo que está explicando es $IT_{it}^{Institucional}$. Cabe observar que este mismo problema se observa en García (2008), quien incluye como variables explicativas de la informalidad estructural e institucional tanto a Z como a X; es decir, tanto variables que explican la informalidad estructural (PIB) como variables que explican la informalidad institucional (gasto en nómina).

Aquí las cuestiones teóricas, sin lugar a dudas, son fundamentales en la construcción de un modelo econométrico y, como bien destacan Uribe *et al.* (2006a: p. 240), *“[g]ran parte de los problemas en la interpretación de la informalidad laboral radica en que las diferentes corrientes teóricas no se refieren exactamente al mismo fenómeno, aunque lo denominen igual. La causa de este desencuentro se halla en sus motivaciones primarias: la preocupación fundamental de los estructuralistas es identificar a los trabajadores pobres; para los institucionalistas el objetivo fundamental es caracterizar a los agentes que evaden el cumplimiento de la institucionalidad y de la ley. Para los estructuralistas, la informalidad es una condición derivada de la precariedad: los trabajadores pobres se preocupan formalmente por su subsistencia, y solo en segundo o tercer*

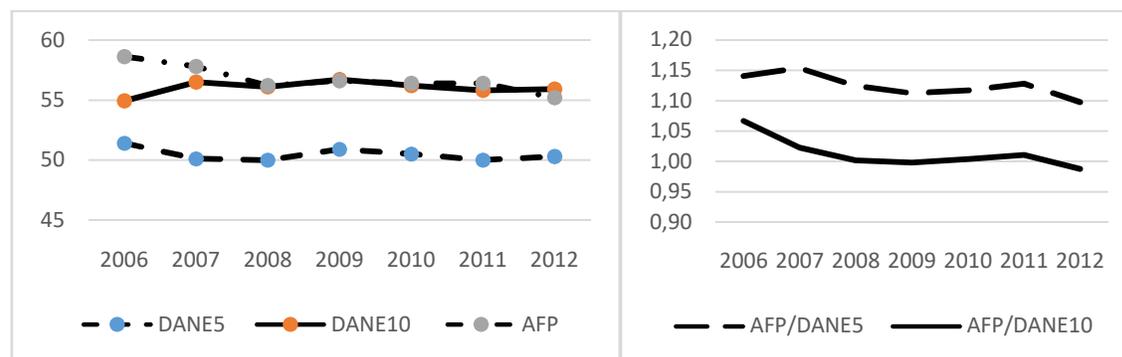
orden se preocupan por cumplir la ley. Para los institucionalistas, la informalidad es un fenómeno jurídico legal, pero se encuentra la pobreza en su camino”.

Un contraste final presentado por Jiménez (2012) consiste en incorporar la predicción de la informalidad (estructural e institucional) en la ecuación principal para cada estimación de la informalidad. Desde el punto de vista econométrico, deberá observarse que, si al incluir la proyección lineal de $IT_{it}^{Estructural}$ en la ecuación de $IT_{it}^{Institucional}$ se encuentra significancia estadística, lo que se está demostrando es que e_{it} y ω_{it} están correlacionados —lo cual es lógico en tanto que $IT_{it}^{Estructural}$ e $IT_{it}^{Institucional}$ están explicando un mismo fenómeno, “la informalidad laboral”— y no que sea viable estimar un modelo incluyendo variables de ambos enfoques teóricos tal y como lo afirma Jiménez (2012: p. 136).¹⁰

3.2. ¿Son diferentes las estimaciones de la informalidad laboral colombiana?

Ahora bien, si se me permite el supuesto de que las mediciones realizadas por el DANE, llamadas DANE5 (5 trabajadores) o DANE10 (10 trabajadores), son indicadores de la informalidad estructural mientras que la afiliación a pensión (AFP) es un indicador de la informalidad laboral, entonces se puede observar que las diferencias en términos de tasas parecen ir cayendo a lo largo del tiempo.

Gráfico 1. Tasas de informalidad para Colombia entre el 2006 y el 2012



Fuente: Datos tomados de Sánchez (2013) y García (2017). Cálculos propios.

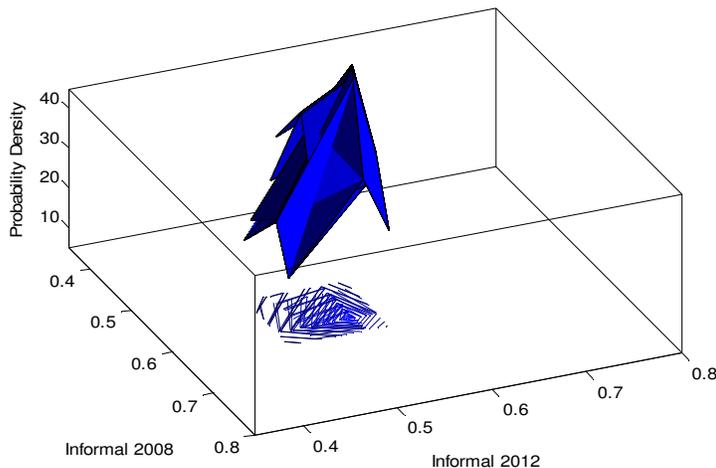
Si bien el Gráfico 1 muestra que la afiliación a la seguridad social y pensión y DANE10 son muy similares entre el 2008 y el 2012; mientras que la diferencia entre estas con respecto a DANE5 no supera los 4 puntos porcentuales en los últimos años. Es más, las diferencias de las mediciones

¹⁰ Aquí los problemas son mayores debido a que existirán problemas de endogeneidad y los estimadores no serán consistentes.

DANE5 y DANE10 con respecto a la AFP parecen estar disminuyendo en los últimos años ya que la relación entre estas ha disminuido (véase Gráfica 1, Panel b).

Por otro lado, cuando se analiza la evolución de la informalidad entre el 2008 y el 2006 utilizando las definiciones de informalidad dadas por DANE5, DANE10, Uribe *et al.* (2006a), Bernal (2009) y Guataqui *et al.* (2010) y calculadas por Sánchez (2013), a partir de considerar que éstas mediciones forman parte de un mismo fenómeno como es la informalidad laboral y establecer el supuesto de que las mismas siguen una distribución normal conjunta entre t y $t+1$, se puede ratificar la observación anterior; es decir, se puede observar que existe una convergencia entre las mediciones de informalidad como se puede observar en el Gráfico 2.

Gráfico 2. Informalidad de Colombia entre el 2008 y el 2012



Fuente: Cálculos propios a partir de Sánchez (2013). Cálculos propios.

Del Gráfico 2, tanto de la gráfica de densidad conjunta como de la gráfica de contorno, se puede observar que la distribución es uní-modal entre el 2008 y el 2012 y que no existen varias concentraciones de la masa de probabilidades.

4. Resultados sobre la segmentación laboral colombiana

El primer trabajo sobre segmentación laboral en Colombia fue realizado por Fields (1980). En ese artículo, se presentan resultados del contraste de Bourguignon (1979) para Bogotá en donde a la regresión de ingresos se le incluye una variable *dummy* para el empleo en el sector moderno de la economía utilizando el censo de 1973. La significancia estadística del sector moderno es tomada por

Bourguignon como “*evidencia de un grado de dualismo en el mercado laboral de Bogotá*” (Fields, 1980: p. 60).

Fields (1980: p. 61), utilizando también el censo de 1973 y a partir de un conjunto de regresiones entre el ingreso, la educación la edad y edad al cuadrado, el sector industrial y las ocupaciones, concluye que el mercado laboral es segmentado aunque la evidencia sea débil. Adicionalmente, Fields (1980: p. 74) concluye que el mercado laboral de Bogotá esta segmentado por sexo.

Nupia (1997), Jaramillo *et al.* (2001) y Galvis (2002) analizan la existencia de segmentación o integración en el mercado laboral colombiano utilizando series de tiempo. La discusión planteada por éstos autores parte de la existencia de cointegración o no de un vector de series de salarios laborales de las principales ciudades de Colombia. Nupia (1997) encuentra, para el periodo 1976-1995, que el mercado laboral de Barranquilla se encuentra segmentado solo en cuatro de las principales ciudades de Colombia. Por su parte, Jaramillo *et al.* (2001), para el periodo 1945 a 1998, encuentran dos mercados urbanos y siete mercados laborales rurales. Galvis (2002) encuentra una “integración segmentada” en el sentido de que la integración se presenta en el nivel educativo de secundaria y primaria, mientras que no encuentra integración en el nivel educativo superior (universitario); por lo cual, la mano de obra universitaria se encuentra segmentada (Galvis, 2002: p. 36). Cabe observar que Galvis (2002) critica a Jaramillo *et al.* (2001) por no incorporar cambios estructurales ocurridos entre 1945 y 1998 en su análisis. Sin embargo, Galvis (2002) tampoco discute la existencia de cambios estructurales en el mercado laboral colombiano en los noventa y cómo estos cambios habrían afectado la evolución de los salarios.

Uribe *et al.* (2008), utilizando datos del segundo trimestre de los años pares de la ENH del DANE entre el año 1988 y el 2000 y a partir de regresiones de corte transversal para cada año, encuentran que la segmentación del mercado laboral colombiano es resultado de economías de escala y, por lo tanto, que cuanto mayor sea el nivel de capital físico y humano de las empresas, mayor será el nivel de productividad y de los ingresos. De esta forma, los autores encuentran “*diferenciales significativos entre los ingresos de los sectores formal e informal, y que el tamaño de planta incide positiva y significativamente sobre los ingresos*” (Uribe *et al.*, 2008: p. 216).

Ortiz *et al.* (2009), utilizando regresiones de corte transversal, encuentran para el mercado laboral urbano (de 2001 a 2006) que las estimaciones son consistentes con la hipótesis de

segmentación laboral por efectos de escala (intrarregional) y por regiones (interregional); la remuneración laboral es significativamente mayor en las empresas formales grandes y en Bogotá. Además, los autores encuentran que la consideración simultánea de estas dos dimensiones de la segmentación mejora el modelo en términos estadísticos.

Pedraza (2011), siguiendo el trabajo de Uribe *et al.* (2008), encuentran, para el periodo de 2001 a 2006, evidencia de segmentación laboral a partir de construir un índice de calidad del empleo utilizando análisis de correspondencias múltiples. La autora define dos segmentos: el segmento primario contiene a los trabajadores de las empresas formales y los informales de las microempresas grandes y el segmento secundario reúne a aquellos de las microempresas pequeñas y a los informales unipersonales. Además, encuentra que la calidad del empleo varía de acuerdo con el segmento laboral al que se pertenezca *“siendo mayor en el segmento primario que en el secundario”* (Pedraza, 2011: p. 121). Los resultados de Pedraza también muestran que existen barreras a la movilidad del segmento secundario al primario, adicionales a las de capital humano y que a partir de los resultados *“se comprobó que la división dual trazada para el mercado de trabajo en Colombia va en correspondencia a una segmentación laboral en las trece principales áreas metropolitanas”* (Pedraza, 2011: p. 121).

Prada (2012) construye matrices de transición año a año entre 1988 y 2006, cuyos estados son asalariado formal, asalariado informal y cuenta propia informal; de tal forma que cada elemento de la matriz de transición representa la fracción de agentes que estaba en el estado i en el periodo t y transito al mismo estado i o a otro estado j en el periodo $t+1$. Los resultados muestran que los asalariados formales tienen una probabilidad por encima del 60% de seguir siendo formal en $t+1$; mientras que para los informales, ya sean asalariados o por cuenta propia, esta se reduce al 50%. Los modelos de probabilidad estimados por Prada (2012) le llevan a la conclusión de que hay *“evidencia que hubo un proceso de segmentación en el mercado laboral debido a la rigideces mencionadas. Para esto y con base en la perspectiva de ‘exclusión’, donde la falta de voluntad para ingresar en el sector informal fue un determinante clave, se comprobó que la segmentación efectivamente tuvo lugar y afecto principalmente a los trabajadores menos preparados”* (Prada, 2012: p. 103).

Peña (2013) considera que una forma de determinar cuando el mercado laboral está segmentado consiste en analizar el tamaño relativo y los rendimientos del sector formal e informal.

Como plantea Peña (2013: p. 10), “[s]i las series de tiempo se mueven en direcciones opuestas esto podría ser visto como un signo de que el mercado laboral está segmentado”. La razón de ello consiste en las restricciones a la movilidad entre los sectores y a transiciones involuntarias entre el sector formal e informal. Peña (2013) también considera que los trabajadores en el sector informal tienen una satisfacción más baja que los trabajadores en el sector formal. La satisfacción se mide como el porcentaje de trabajadores que desea cambiar de trabajo y Peña presenta las matrices de transición entre el sector formal e informal del 2001 al 2006 (Peña, 2013: Apéndice 2) y entre el 2001 y el 2012 (Peña, 2013: p. 22). De esta forma, el porcentaje de trabajadores del sector informal que desea cambiar de trabajo al sector formal está entre el 35% y el 40%, mientras que el porcentaje que desea cambiar de trabajo en el sector formal varía entre el 17% y el 23%, lo cual implica que los trabajadores en el sector formal están más satisfechos.

García (2017), a partir de la GEIH para el 2009 y utilizando regresiones cuantílicas, encuentra que existe heterogeneidad del sector informal en Colombia; es decir, que existen segmentos de trabajadores en el sector informal: por una lado, un conjunto de trabajadores con bajos salarios y en desventaja con respecto a trabajadores formales y que están racionados con respecto al sector formal y su única alternativa es el sector informal; y por el otro, existen individuos en el sector informal con ingresos altos que son competitivos y que reciben rentabilidades similares a las características del sector formal y que, aunque ganarían menos que en el sector formal, podrían preferir la informalidad debido a que el beneficio neto de ser formal no es atractivo. De esta forma, García (2017: p. 1009) encuentra que la informalidad podría ser tanto una elección como el resultado de la segmentación laboral.

Mora y Muro (2014) encuentran resultados similares a partir de la definición de informalidad utilizada por Mondragón-Vélez *et al.* (2010), quienes consideran a los informales como los “trabajadores cuenta propia”. De esta forma, se construyen las matrices de transición aparecidas en la Tabla 2, teniendo en cuenta la pregunta sobre la ocupación en el trabajo anterior:

Tabla 2. Matrices de transición

		2008				2009	
		Formal	Informal			Formal	Informal
2007	Formal	0.6944	0.3056	2008	Formal	0.6773	0.3227
	Informal	0.4744	0.5256		Informal	0.5043	0.4957
		2010					
		Formal	Informal				
2009	Formal	0.6873	0.3127				
	Informal	0.5224	0.4776				

Fuente: Mora y Muro (2014).

Como se puede observar en la Tabla 2, los trabajadores que son formales tienen una probabilidad de casi el 70% de seguir siendo formales; mientras que los trabajadores informales, una probabilidad de casi el 50% de cambiar de sector. Este resultado, al igual que el de Peña (2013), son fuertes indicios de segmentación por calidad del trabajo.

Siguiendo la idea de que la evolución de los salarios en el tiempo podría servir para analizar la segmentación laboral, a continuación se presentara un modelo de segmentación laboral que permita además incorporar la existencia de cambios estructurales.

Supongamos que los salarios de una ciudad pueden encontrarse en s diferentes estados y que se define π_{it} como la probabilidad de que los salarios de una ciudad se encuentren en el estado i en el momento t . Para cada periodo de tiempo t , el estado del modelo vendrá definido por:

$$\pi_t = [\pi_{1t}, \dots, \pi_{st}]' \quad (4)$$

Sea p_{ij} la probabilidad de que los salarios de una ciudad se encuentren en el estado j en el periodo t dado que estuvieron en el estado i en el periodo $t-1$. Entonces la matriz de transición de una cadena de Markov de primer orden viene dada por:

$$P = [p_{ij}] \quad (5)$$

De esta forma, a partir de (5), se define la transición entre el periodo t y el periodo $t-1$ como:

$$\pi_t' = \pi_{t-1}' P \quad (6)$$

Para cada j se define la relación entre los dos periodos como:

$$\pi_{jt} = \sum_{i=1}^s p_{ij} \pi_{i,t-1} \quad (7)$$

En particular, el estado inicial π_0 se puede encontrar a partir del estado π_t del modelo en el periodo t como:

$$\pi'_t = \pi'_{t-1} P = \dots = \pi'_0 P^t \quad (8)$$

Obsérvese que (8) se cumple, siempre y cuando exista

$$\pi^{*'}_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi'_t \quad (9)$$

y sea igual para todos los estados iniciales. El largo plazo se define a partir de la distribución ergódica. Los resultados posibles son múltiples: una distribución donde la masa probabilística se encuentre concentrada en un estado e incluso una distribución con la masa probabilística distribuida en los estados extremos de la distribución. Por otro lado, π^* es la distribución invariante o ergódica de la matriz de transición P y debe satisfacer la siguiente condición:

$$\pi^{*'}_t = \pi^{*'}_t P_t \quad (10)$$

La distribución invariante π^* en la ecuación (10) mostrará cuándo las transiciones de las ciudades llevan a una integración o segmentación en el mercado laboral de la siguiente forma:

“Sea un ζ un elemento en la distribución ergódica $\zeta \in \pi^$ tal que $\zeta_i > \zeta_{i+1}$ y $\zeta_i < \zeta_{i-1}$ entonces existirá integración, si y solo si, existe un único $\zeta \in \pi^*$. Observe que en el caso de que exista más de un $\zeta \in \pi^*$ que satisfaga la anterior condición existirá segmentación. La deducción es simple: Un único ζ implica una distribución ergódica unimodal lo cual es compatible con la integración del mercado laboral mientras que más de un ζ , por ejemplo dos, una distribución ergódica bimodal, lo cual significa segmentación en el mercado laboral” (Mora, 2006).*

¿Qué sucede si hay cambios estructurales? A continuación defínanse los salarios para N ciudades sobre T periodos y C clases o estados. Sea $i \in \{1, 2, \dots, C\}$, $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ y $t \in \{1, 2, \dots, T\}$. Para los salarios de cada ciudad n , se define δ_{nt} como 1 si los salarios de la ciudad n se encuentra en la clase i para el periodo t y cero en otro caso. Para los salarios de cada ciudad n y para cada periodo de tiempo t , sea $s_{nt} \in \{1, 2, \dots, C\}$ la clase de salario a la cual la ciudad pertenece. Sea

$S_{NT} = \{\{s_{nt} \mid N_n=1\}\}_{T_t=1}$ el conjunto de información en el periodo T . Defínase $K_{jo} = \sum_{n=1}^N \sum_{t=1}^T \delta_{ni(t-1)} \delta_{njt}$ como el número total de transiciones de la clase i en el periodo $t-1$ a la clase j en el periodo t . De esta forma, la matriz $K=[k_{ij}]$ será la matriz de transición. La función de verosimilitud para el modelo vendrá dada por:

$$p(S_{NT} \mid \pi_o, P) \propto \prod_{i=1}^C \pi_{i0}^{k_{i0}} \prod_{j=1}^C p_{ij}^{k_{ij}} \quad (11)$$

Se puede observar que (11) está conformada por el producto de dos distribuciones multivariadas e independientes Beta (Dirichlet). Las distribuciones *a priori* para π_o y P son también distribuciones independientes Beta (Dirichlet), que se definen como:

$$p(\pi_o) = \left[\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^c a_{i0}\right)}{\prod_{i=1}^c \Gamma(a_{i0})} \right] \prod_{i=1}^c \pi_{i0}^{(a_{i0}-1)} \quad (12)$$

$$p(P) = \prod_{i=1}^c \left[\frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^c a_{ij}\right)}{\prod_{j=1}^c \Gamma(a_{ij})} \right] \prod_{j=1}^c \pi_{ij}^{(a_{ij}-1)}$$

Cabe observar que en (12) las distribuciones *a priori* son parametrizadas por el vector $a_o = [a_{10}, \dots, a_{c0}]'$ y la matriz $A = [a_{ij}]$ (Geweke, 2005). De esta forma, las conjeturas tienen una interpretación nocional de la muestra. Asumiendo que las distribuciones *a priori* son independientes, entonces la distribución posterior será:

$$p(\pi_o, P \mid S_{NT}) \propto \left[\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^c a_{i0}\right)}{\prod_{i=1}^c \Gamma(a_{i0})} \right] \prod_{i=1}^c \pi_{i0}^{(k_{i0}+a_{i0}-1)} \prod_{i=1}^c \left\{ \left[\frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^c a_{ij}\right)}{\prod_{j=1}^c \Gamma(a_{ij})} \right] \right\} \prod_{j=1}^c \pi_{ij}^{(k_{ij}+a_{ij}-1)} \quad (13)$$

A partir de (13), las distribuciones posteriores pueden analizarse tanto para la distribución invariante como para las diferencias entre la distribución invariante y cualquier otro conjunto de distribuciones. De esta forma, es posible considerar distribuciones que impliquen integración o segmentación en el mercado laboral de acuerdo a la definición anterior. Con el fin de contrastar si

existe o no integración o segmentación laboral, se puede definir el modelo $M_j, j=1\dots J$ que describe un conjunto de observaciones S_{NT} en donde la verosimilitud marginal para el modelo j viene dada por:

$$p(S_{NT} | M_{jN}) = \int_{\rho} p(S_{NT} | \pi_0, P, M_j) p(\pi_0, P | M_j) d(\pi_0, P) \quad (14)$$

$$\rho = \left\{ (\pi_{j0}, p_{ij}) : 0 \leq \pi_{j0} \leq 1, 0 \leq p_{ij} \leq 1; \sum_{j=1}^C \pi_{j0} = 1, \sum_{j=1}^s p_{ij} = 1 \quad \forall i=1, \dots, C \right\}$$

En el caso de que existan dos matrices de transición independientes, en donde cada una ha sido construida para un periodo diferente, entonces la verosimilitud marginal de un modelo que incluya dos matrices de transición de este tipo será el producto de la verosimilitud marginal de los dos modelos con una transición (Landon-Lane y Quinn, 1999). Tradicionalmente, la forma de comparar estos modelos se realiza a través del factor de Bayes (Geweke, 2005) como la razón del modelo j a favor del modelo k :

$$B_{jk} = \frac{p(S_{NT} | M_{jN})}{p(S_{NT} | M_{kN})} \quad (15)$$

El factor de Bayes, que aparece en (15), muestra cuán probable es el modelo j en relación con el modelo k . Jeffreys (1961) plantea el criterio que aparece en la Tabla 3 con respecto al factor de Bayes:

Tabla 3. Interpretación del Factor de Bayes.

Factor de Bayes	Interpretación
$B_{jk} < 1/10$	Fuerte evidencia a favor de M_k
$1/10 < B_{jk} < 1/3$	Evidencia moderada a favor de M_k
$1/3 < B_{jk} < 1$	Evidencia débil a favor de M_k
$1 < B_{jk} < 3$	Evidencia débil a favor de M_j
$3 < B_{jk} < 10$	Evidencia moderada a favor de M_j
$B_{jk} > 10$	Fuerte evidencia a favor de M_j

Fuente: Tomado de Jeffreys (1961).

Para valores inferiores a 0,1 existe fuerte evidencia a favor de M_k mientras que para valores superiores a 10 existe fuerte evidencia a favor de M_j . Por su parte, Kass y Raftery (1995) plantean variaciones de las categorías propuestas por Jeffreys (1961) como el logaritmo en base 10 o tomar

dos veces el logaritmo natural del factor de Bayes para asimilarlo al contraste de la razón de verosimilitud.

Con el fin de calcular las matrices de transición de los salarios por ciudades, se discretizaron los salarios de cada ciudad con base en la media nacional para cada una de las ciudades y se consideraron tres estados, ya que éste es el valor mínimo que permite la aparición de segmentación en la distribución ergódica. Con el fin de presentar resultados acordes con los presentados por Núñez (2002) y Uribe *et al.* (2006a) se consideraron solo los salarios para profesionales en cada una de las siete principales ciudades. La discretización se realizó de tal forma que los salarios reales de cada ciudad toman el valor 1 si éstos se encuentran entre 0 y 0,9 de la media nacional, 2 si son mayores o iguales a 0,9 e inferiores a 1,01 y 3 si son superiores a 1,01 de la media nacional.¹¹

Los resultados de la matriz de transición fueron los mostrados en la Tabla 4.

Tabla 4. Cadena de Markov de primer orden

Universidad (1985-2000)			
Estados	1	2	3
1	0,5882	0,2942	0,1176
2	0,3	0,5333	0,1667
3	0,0732	0,122	0,8048
Ergódica	0,2871	0,2912	0,4217

Fuente: Mora (2006). Cálculos propios.

Como se puede observar de la Tabla 4, en el periodo analizado no existió segmentación en el mercado laboral de Colombia. Sin embargo, estos resultados no tienen en cuenta la posible existencia de cambios estructurales en la década de los noventas. Para Santamaría (2001), durante los noventas se produjo una mayor concentración del ingreso por aumentos de la demanda (neta de oferta) de trabajadores altamente calificados debido a un cambio técnico sesgado a favor de estos últimos. Por su parte Arango *et al.* (2004) consideran que durante los noventas existieron aumentos en los salarios relativos de los trabajadores más cualificados en comparación con los menos cualificados como efecto de un aumento de la demanda mayor que de su oferta y, además, que

¹¹ Mora y Núñez (2009) discuten los procesos de discretización por cuantiles y muestran como estos procesos pueden llevar a matrices biestocásticas.

dicho aumento pudo ser causado por un cambio técnico intensivo en trabajo cualificado. Por lo tanto, el cambio técnico ocurrido en la década de los noventa pudo haber producido un cambio estructural en la evolución de los salarios en Colombia.

Con el fin de contrastar la existencia de cambio estructural en los salarios se utilizará la razón de Bayes (Geweke, 1999; 2005) entre dos modelos: uno compuesto por una única matriz de transición entre 1985 y 2000 y otro compuesto por dos matrices de transición, una entre 1985 y 1992 y otra entre 1993 y 2000.

Tabla 5. Matrices de transición en universidad

Universidad (1985-1992)				Universidad (1993-2000)			
Estados	1	2	3	Estados	1	2	3
1	0,5385	0,3077	0,1538	1	0,5789	0,3158	0,1053
2	0,1764	0,6471	0,1765	2	0,4546	0,3636	0,1818
3	0,1053	0,1579	0,7368	3	0,0526	0,1053	0,8421
Ergódica	0,2331	0,3775	0,3894	Ergódica	0,305	0,2285	0,4665

Fuente: Mora (2006). Cálculos propios.

En la Tabla 5 se observa que en el primer periodo existe integración en el mercado laboral mientras que en el segundo periodo existe segmentación en el mercado laboral.¹²

A continuación, se procedió a calcular el factor de Bayes con 50.000 muestras extraídas independientemente y se contrastó la hipótesis de un solo modelo para todo el periodo versus dos modelos de transiciones, una entre 1985 y 1992 y otra entre 1993 y 2000. Los resultados fueron los mostrados en la Tabla 6.

Tabla 6. Factor de Bayes

$\frac{p(S_{NT} M_{2N})}{p(S_{NT} M_{1N})}$	Integración a S ₁	Integración a S ₂	Integración a S ₃
Universidad	34,5351106	34,2902844	34,1804633

Fuente: Mora (2006). Cálculos propios.

¹² La movilidad entre los estados para el periodo 1993-2000 es mayor que la movilidad en el periodo 1985-1992 —los indicadores de movilidad de Shorrocks (1976, 1978) M1 y M2 son de 0,53 y 0,79 para 1985-1992 y de 0,61 y 0,94 para 1993-2000, respectivamente—. Estos resultados muestran que el cambio estructural provocó una mayor dinámica de movimiento, lo cual podría ser acorde con un cambio técnico intensivo en el uso de trabajadores de mayor nivel educativo durante los noventa (Arango *et al.*, 2004).

La Tabla 6 muestra el resultado del cálculo del factor de Bayes con varios supuestos de integración: S_1 cuando hay integración al primer estado, S_2 cuando se presenta integración al segundo estado y S_3 cuando se presenta integración al tercer estado. Los resultados de la Tabla 6 muestran una fuerte evidencia a favor de un modelo con dos transiciones, que incluye cambios estructurales ocurridos en los noventa, versus un modelo con una transición.

De acuerdo a lo anterior, se puede afirmar que ha existido segmentación en el mercado laboral colombiano entre 1973 y 2010. Finalmente, al revisar todos los trabajos realizados hasta la fecha y sin importar la metodología, los resultados para Colombia muestran que el mercado laboral no es homogéneo. De esta forma, no solo existen diferencias en salarios que permanecen por regiones geográficas sino también por tipos de informalidad y estas diferencias se han mantenido a lo largo de los últimos 20 años.

5. Conclusiones y recomendaciones de política pública activa

En los últimos 10 años la informalidad laboral urbana en Colombia ha mostrado valores terriblemente altos, que incluso se han perpetuado después de la apertura económica. Es así como más de la mitad de los trabajadores colombianos trabajan en condiciones de informalidad; lo cual indudablemente lleva a sugerir ideas de cómo reducir las, más bajo un panorama de postconflicto que indudablemente afectará tanto a los mercados laborales urbanos como a los rurales

Gran parte de las estimaciones realizadas en Colombia han mezclado ambas definiciones con el fin de proveer una mejor explicación del fenómeno y, en términos empíricos, parece existir poca diferencia entre las mediciones de las mismas; aunque se puede observar que existe una diferencia de cerca de 5 puntos porcentuales que parecen reducirse en el tiempo y estas parecen converger a una misma distribución probabilística.

Reducir la informalidad no es tarea fácil; es necesario la implementación de políticas públicas activas cuando se presenta recesión en la economía con el fin de ayudar a contrarrestar los efectos de la informalidad debido al comportamiento anticíclico que tiene ésta. En periodos de recesión aumenta debido a los despidos del sector formal y aumentan los trabajadores por cuenta propia; mientras que, en periodos de auge, se reduce por el incremento en el sector formal. De esta forma, es posible pensar en la búsqueda por parte del gobierno de medidas anticíclicas parecidas a la regla fiscal para contrarrestar el efecto de los *shocks*. Por ejemplo, existen ciertas cotizaciones

que son fijas en los trabajadores, como la solidaridad pensional, que se podrían reducir en recesión y viceversa. En periodos de recesión también se pueden reducir los costos de búsqueda de los desempleados, como el pago de transporte público a través de descuentos en los pasajes de los transportes masivos (o gratis), vales para fotos de hv (cuando se exigen, etc.), entre otros. De igual forma, deben existir unas condiciones mínimas que permitan la jubilación de los trabajadores, y garantizar que, a la par de los beneficios económicos periódicos creados recientemente por el estado colombiano (Acto Legislativo 01 de 2005 y Ley 1328 de 2009), los trabajadores puedan acceder a una pensión vital como incentivo para estar en la formalidad.

Uno de los aspectos que ayuda a reducir la informalidad, al menos desde el punto de vista institucional, consiste en garantizar una afiliación a la seguridad social en pensión a los trabajadores y la flexibilización en las afiliaciones de ciertos trabajos como en el caso de conductores de taxis, teletrabajo etc. Esto, por supuesto, sin descuidar la discusión sobre la calidad del empleo (Farné, 2003, 2015), ni el trabajo decente y sin caer en el asistencialismo. Aunque parece un tema transversal a casi todas las políticas relacionadas con la generación de ingresos, una gran parte de los análisis han mostrado cómo la educación reduce no solo la probabilidad de estar en situaciones de informalidad, sino el número de periodos en los que se permanece en condiciones de informalidad. Por ejemplo, Mora y Muro (2014) encontraron que un año adicional de educación reduce en un 3% la probabilidad de entrar al sector informal.

Finalmente, es importante observar que la probabilidad de pasar a ser informal cuando se es formal es menor que la de seguir siendo informal cuando se es informal. Debido a esto, los incentivos pueden ayudar a moderar estas transiciones. Dos incentivos importantes que es necesario analizar son el seguro de desempleo y el salario mínimo. Con respecto al seguro de desempleo, se debe observar que un seguro real de desempleo incide en que los trabajadores despedidos no ingresen necesariamente al sector informal, por lo que se amplían los periodos de búsqueda en el sector formal de la economía al proveer a los desempleados de ingresos mínimos para continuar con esta, y se incide sobre el desempleo. Con respecto a éste, en algunos países es de un 80% del ingreso antes de estar desempleado durante los primeros 6 meses y de un 70% después hasta un periodo máximo de 10 meses. Esto debería considerarse en Colombia: tener un porcentaje fijo del ingreso antes de estar desempleado y un porcentaje variable dependiendo del ciclo económico. Con respecto al salario mínimo, el incremento de un 1% de la brecha entre el salario mínimo y los ingresos incrementa la probabilidad de entrar a la informalidad de un 7% y en un

38% la probabilidad de permanecer en situación de informalidad (es decir, permanecer más periodos en situación de informalidad) (Mora y Muro, 2017). Por lo tanto, la informalidad laboral debería ser uno de los elementos a considerar todos los años cuando se fija el salario mínimo en Colombia ya que claramente modifica los incentivos de permanecer más periodos en situaciones de informalidad laboral.

Referencias bibliográficas

- Almanza, C. (2006): "Informalidad y salarios relativos en Colombia, 1992-2004: factores de oferta y demanda". *Archivos de Economía*, 302, 48 pp. Recuperado de: <https://colaboracion.dnp.gov.co/CDT/Estudios%20Economicos/302.pdf>.
- Arango, L.E. y Hamann, F. (2012): "Prólogo". En L.E. Arango y F. Hamann (eds.): *El mercado de trabajo en Colombia: hechos, tendencias e instituciones*. Bogotá: Banco de la República, pp. XIII-XXXV.
- Arango, L.E.; Posada, C. y Uribe, J.D. (2004): "Cambios en la estructura de los salarios urbanos en Colombia (1984 - 2000)". *Borradores de Economía*, 297.
- Arroyo, J.S.; Pinzón, L.F.; Mora, J.J.; Gómez, D.A. y Cendales, A. (2016): "Afrocolombianos y segregación espacial de la calidad del empleo para Cali". *Cuadernos de Economía*, 35(69): 753-783.
- Bernal, R. (2009): "The informal labor market in Colombia: Identification and Characterization". *Desarrollo y Sociedad*, 63:145-208.
- Botero, J. (2011): "Desempleo e Informalidad en Colombia: Un modelo de equilibrio general computable". Trabajo presentado en el Seminario Semanal de Economía. Medellín, 12 de agosto. Recuperado de: <http://www.banrep.gov.co/es/node/14769>.
- Bourguignon, F. (1979): "Pobreza y dualismo en el sector urbano de las economías en desarrollo: el caso de Colombia". *Desarrollo y Sociedad*, 1: 39-72.
- Cardenas, M y Mejia, C. (2007): "Informalidad en Colombia: nueva evidencia". *Documentos de Trabajo Fedesarrollo*, 35. Recuperado de <http://www.repository.fedesarrollo.org.co/handle/11445/805>.

- Caro, B.L. (1995): *Evolución del sector informal en Colombia.*, Plan Nacional para la Microempresa, Bogotá: Corporación para el Desarrollo de la Microempresa, Ministerio de Desarrollo y, Departamento Nacional de Planeación.
- Castells, M y Portes, A. (1989): "World Underneath: The origins, Dynamics, and Effects of the Informal Economy". En A. Portes, M. Castells y L.A. Benton (eds.): *The Informal Economy: Studies in Advanced and Less Developed Countries*. Baltimore: Johns Hopkins University Press, pp. 11-37.
- Chen, M.A.; Vanek, J. y Carr, M. (2004): *Mainstreaming Informal Employment and Gender in Poverty Reduction: A Handbook for Policy-makers and other Stakeholders*. Ottawa: Commonwealth Secretariat.
- DANE (2009): *Metodología Informalidad Gran Encuesta Integrada de Hogares – GEIH*. Bogotá: Departamento Administrativo Nacional de Estadística. Recuperado de: http://www.dane.gov.co/files/investigaciones/boletines/ech/ech_informalidad/metodologia_informalidad.pdf.
- Davidson, R. y MacKinnon J.G. (1981): "Several tests for model specification in the presence of alternative hypotheses". *Econometrica*, 49: 781-793.
- De Soto, H. (1987): *El otro sendero. La revolución informal*. Lima: Instituto Libertad y Democracia.
- De Soto, H. (2000): *The Mystery of Capital: Why Capitalism Triumphs in the West and Fails Everywhere Else*. New York: Basic Books.
- Doeringer, P. y Piore, M. (1971): *Internal Labour Markets and Manpower Analysis*. Lexington: Lexington Books. Traducido al español en L. Tohaira (ed.): *El mercado de trabajo: teorías y aplicaciones*. Madrid: Alianza Universidad, 1983, pp. 341-368
- Fields, G. (1980): "How Segmented Is the Bogotá Labor Market?". *World Bank Staff Working Paper*, 434, 100 pp. Recuperado de: <http://documents.worldbank.org/curated/en/233421468771898543/pdf/multi0page.pdf>.
- Farné, S. (2003): "Estudio sobre la calidad del empleo en Colombia". En OIT (ed.): *Estudios de economía laboral en países andinos*. Vol. 5. Lima: Organización Internacional del Trabajo, pp. 1-36.

- Farné, S. (2015): *Acto de sustentación público para optar por el ascenso a la categoría de Profesora Asociada de Diana Marcela Jiménez*. Recuperado de: <https://www.youtube.com/watch?v=1JRYB2tumcg>.
- Flórez, C. (2002): "The function of the urban informal sector in employment. Evidence from Colombia 1984-2000". *Documentos CEDE*, 2002-4.
- Galvis, L.A. (2002): "Integración regional de los mercados laborales en Colombia, 1984-2000". *Documentos de Trabajo sobre Economía Regional*, 27.
- García, G.A. (2008): "Informalidad regional en Colombia. Evidencia y determinantes". *Desarrollo y Sociedad*, 61: 43-86.
- García, G.A. (2017): "Labor Informality: Choice or Sign of Segmentation? A Quantile Regression Approach at the Regional Level for Colombia". *Review of Development Economics*, 21(4): 985-1017.
- Geweke, J. (1999): "Using simulation methods for bayesian econometric models: inference, development, and communication". *Econometric Reviews*, 18(1): 1-73.
- Geweke, J. (2005): *Contemporary Bayesian Econometrics and Statistics*. Hoboken: John Wiley & Sons.
- Guataquí, J.; García, A. y Rodríguez, M. (2010): "El perfil de la informalidad en Colombia". *Perfil de Coyuntura Económica*, 16: 91-115.
- Harris, J.R. y Todaro, M.P. (1970): "Migration, Unemployment and Development: A Two-Sector Analysis". *The American Economic Review*, 60(1): 126-142.
- Hart, K. (1973): "Informal income opportunities and urban employment in Ghana". *The Journal of Modern African Studies*, 11(1): 61-89.
- Henoa, M.; Rojas, N. y Parra, A. (1999): "El mercado laboral urbano y la informalidad en Colombia: evolución reciente". *Revista Planeación y Desarrollo*, 30(2): 7-38.
- Hussmanns, R. (2004): "Measuring the informal economy: From employment in the informal sector to informal employment". *ILO Working Paper*, 53.

- Jaramillo, C.F.; Romero, C.A y Nupia, O.A. (2001): "Integración en el mercado laboral colombiano: 1945-1998". En A. Meisel (ed.): *Regiones, ciudades y crecimiento económico en Colombia*. Bogotá: Banco de la República, pp. 91-146.
- Jeffreys, H. (1961): *Theory of probability* (3rd ed.). Oxford: Oxford University Press.
- Jiménez, D.M. (2012): "La informalidad laboral en América Latina: ¿Explicación estructuralista o Institucionalista?". *Cuadernos de Economía*, 31(58): 113-143.
- Kass, R.E y Raftery, A. (1995): "Bayes Factors". *Journal of the American Statistical Association*, 90(430): 773-795.
- La Porta, R. y Shleifer, A. (2014): "Informality and Development". *Journal of Economic Perspectives*, 28(3), 109-126.
- Landon-Lane, J, y Quinn, J.A. (1999): "A Bayesian Exploration of Growth and Convergence". *University of New South Wales - School of Economics Working Papers*, 12.
- Levenson, A.R. y Maloney, W.F. (1998): "The Informal Sector, Firm Dynamics, and Institutional Participation". *World Bank Policy Research Working Papers*, 1988.
- Loayza, N. (1997): "The Economics an Increase in the Size of the Informal Sector Hurts Growth of the Informal Sector. A simple model and some empirical evidence from Latin America". *World Bank Policy Research Working Papers*, 1727.
- López, H. (1996): "Empleos formales e informales, asalariados e independientes: un balance de los cambios acaecidos entre los ochenta y los noventa". En H. López (ed.): *Ensayos sobre economía laboral colombiana*. Bogotá: Fonade.
- López, H.; Sierra, O. y Henao, M. (1987): "Sector informal: entronque económico y desconexión jurídico-política con la sociedad moderna". En: J.A. Ocampo y M. Ramírez (ed.): *El problema laboral colombiano: informe de la misión Chenery*. Tomo II. Bogotá: SENA, pp. 9-32.
- Maloney, W.F. (1998): "The structure of labor markets in developing countries: Time series evidence on competing views". *World Bank Policy Resarch Working Papers*, 1940.
- Maloney, W.F. (2003): "Informal self-employment: Poverty trap or decent alternative". En G. Fields y G. Pfeffermann (eds.): *Pathways out of poverty, private firms and economic mobility in developing countries*. Boston: Kluwer Academic Publishers, pp. 65-82.

- Mezzerà, J. (1987): "Abundancia como efecto de la escases: Oferta y Demanda en el Mercado Laboral Urbano". *Nueva Sociedad*, 90: 106-117.
- Mondragón-Vélez, C.; Peña, X. y Wills, D. (2010): "Labor Market Rigidities and Informality in Colombia". *Economía*, 11: 65-95.
- Mora, J.J. (2004): *El efecto de los títulos, la segmentación y el funcionamiento del mercado de trabajo*. Tesis doctoral. Universidad de Alcalá.
- Mora, J.J. y Muro, J. (2014): "Informality and minimum wage by cohort in Colombia". *Cuadernos de Economía*, 33(63): 469-486.
- Mora, J.J. and Muro, J. (2017): "Dynamic Effects of the Minimum Wage on Informality in Colombia", *Labor*, 31(1): 59-72.
- Mora, J.J. y Núñez, J. (2009): "Economic convergence of income distribution worldwide from 1986 to 2000". *Journal of Economic Studies*, 36(6): 675-691.
- Mora, J.J. y Pérez, M.L. (2015): "La calidad del empleo en la población afrodescendiente colombiana: una aproximación desde la ubicación geográfica de las comunas". *Revista de Economía del Rosario*, 17(2): 117-149.
- Mora, J.J. y Ulloa, M.P. (2011): "Calidad del empleo en las principales ciudades colombianas y endogeneidad de la educación". *Revista de Economía Institucional*, 13(25): 163-177.
- Moser, C.O.N. (1978): "Informal sector or petty commodity production: Dualism or dependence in urban development?". *World Development*, 6(9-10), 1041-1064.
- Núñez, J (2002): "Empleo informal y evasión fiscal en Colombia". *Archivos de Economía*, 210.
- Nupia, O.A. (1997): "La integración espacial de los mercados laborales: evidencias para las regiones colombianas". *Desarrollo y Sociedad*, 40: 83-131.
- OIT (1972): *Employment, Incomes and Equality: A Strategy for Increasing Productive Employment in Kenya*. Ginebra: Organización Internacional del Trabajo.
- OIT (1993): *Resolution concerning statistics of employment in the informal sector*. Adoptada por la XV Conferencia Internacional de Estadísticos del Trabajo (enero de 1993). Ginebra: Organización Internacional del Trabajo.

- OIT (2006): *Panorama Laboral 2006: América Latina y El Caribe*. Lima: Organización Internacional del Trabajo.
- Ortiz, C.; Uribe, J. y Badillo, E. (2009): "Segmentación Inter e Intra regional en el Mercado Laboral Urbano de Colombia, 2001-2006". *Ensayos sobre Política Económica*, 27: 196-230.
- Pedraza Avella, A.C. (2011): "Segmentación laboral en Colombia durante el período 2001- 2006". *Revista CIFE*, 18(13): 101-123.
- Peña, X. (2013): "The formal and informal sectors in Colombia Country case study on labour market Segmentation". *ILO Employment Working Papers*, 146.
- Pérez, J.P. (1991): *Informalidad Urbana en América Latina. Enfoques, problemáticas e interrogantes*. Guatemala: FLACSO.
- Perry, G.E.; Arias, O.S.; Fajnzylber, P.; Maloney, W.F.; Mason, A.D. y Saavedra Chanduvi, J. (2007): *Informalidad: escape y exclusión*. Washington: Banco Mundial.
- Piore, M. (1983): "Labor Market Segmentation: To What Paradigm Does It Belong?", *American Economic Review*, 73(2): 249-253.
- Portes, A. (1995): *En torno a la informalidad: ensayos sobre teoría y medición de la economía no regulada*. México: FLACSO.
- Portes, A.; Castells, M. y Benton, L.A. (1989): *The Informal Economy: Studies in Advanced and Less Developed Countries*. Baltimore: John Hopkins University Press.
- Portes, A. y Haller, W. (2004): "La economía informal". *CEPAL: Serie Políticas Sociales*, 100.
- Portes, A. y Schauffler, R. (1993): "Competing Perspectives on the Latin American Informal Sector". *Population and Development Review*, 19(1): 33-60.
- Prada, C.F. (2012) "Análisis de los flujos de trabajadores y la segmentación laboral en Colombia". *Ensayos sobre Política Económica*, 30(68): 72-113.
- PREALC (1978): *Sector informal. Funcionamiento y políticas*. Santiago de Chile: Organización Internacional del Trabajo.
- PREALC (1985): *Más allá de la crisis*. Santiago de Chile: Organización Internacional del Trabajo.

- Ribero, Rocio. (2003): "Gender dimensions of non-formal employment in Colombia". *CEDE Working Papers*,. 2003-04.
- Sánchez, R. (2013): "Enfoques, conceptos y metodologías de medición de la informalidad laboral en Colombia". *Lecturas de Economía*, 79: 9-43.
- Santamaría, M. (2001): "External trade, skill, technology and therecent increase of income inequality in Colombia". *Archivos de Economía*, 171.
- Shorrocks, A.F. (1976): "Income Mobility and the Markov Assumption". *The Economic Journal*, 86(343): 566-578.
- Shorrocks, A.F. (1978): "The Measurement of Mobility". *Econometrica*, 46(5): 1013-1024.
- Singer, P. (1980): *Economía política del trabajo*. México: Siglo Veintiuno.
- Toharia, L. (1983): *El mercado de trabajo: teorías y aplicaciones*. Madrid: Alianza Editorial.
- Tokman, V.E. (1978): "An exploration into the nature of informal-formal sector relationships". *World Development*, 6(9-10): 1065-1075.
- Tokman, V.E. (1982): "Desarrollo desigual y absorción de empleo: América Latina 1950-80". *Revista CEPAL*, 17: 129-141.
- Tokman, V.E. (2001): "Las relaciones entre los sectores formal e informal. Una exploración sobre su naturaleza". *Economía*, 24(48): 17-74.
- Tokman, V.E. (2011): "Informalidad en América Latina: balance y perspectivas de políticas". *Revista Internacional de Estadística y Geografía*, 2(3): 16-32.
- Tokman, V.E. y García, N.E. (1981): *Dinámica del Subempleo en América Latina*. Santiago de Chile: Organización Internacional del Trabajo.
- Uribe, J.I. y Ortiz, C.H. (2006): *Informalidad laboral en Colombia 1988-2000. Evolución, teorías y modelos*. Cali: Universidad del Valle.
- Uribe, J.I.; Ortiz, C.H y Castro, J.A. (2006a): "Una teoría general sobre la informalidad laboral: el caso colombiano". *Economía y Desarrollo*, 5(2): 213-273.
- Uribe, J.I.; Ortiz, C.H., Correa, J.B. (2006b): "¿Cómo deciden los individuos en el mercado laboral? Modelos y estimaciones para Colombia". *Lecturas de Economía*, 64: 59-89.

- Uribe, J.I., Ortiz, C.H. y García, G.A. (2008): "Informalidad y desempleo en Colombia: Dos caras de la misma moneda". *Cuadernos de Administración Bogotá (Colombia)*, 21(37): 211-241.
- Zylbersztajn, D y Graça, C. (2003): "Costos de formalización de las empresas: medición de los costos de transacción en Brasil". *Revista de Economía Institucional*, 5(9): 146-165.



Los objetivos económicos de la micro y pequeña empresa en México. Un análisis desde las elasticidades de factores productivos

MUNGARAY LAGARDA, ALEJANDRO

Facultad de Economía y Relaciones Internacionales
Universidad Autónoma de Baja California (México)
Correo electrónico: mungaray@uabc.edu.mx

AGUILAR BARCELÓ, JOSÉ G.

Facultad de Economía y Relaciones Internacionales
Universidad Autónoma de Baja California (México)
Correo electrónico: gaba@uabc.edu.mx

OSORIO NOVELA, GERMÁN

Facultad de Economía y Relaciones Internacionales
Universidad Autónoma de Baja California (México)
Correo electrónico: gosorio@uabc.edu.mx

RESUMEN

La literatura económica establece que el objetivo principal de toda empresa es la maximización de beneficios, suponiendo sustitución continua y unitaria de factores productivos. No obstante, las condiciones preponderantes de operación y desempeño de la micro y pequeña empresa obligan a revisar la validez de este supuesto y los objetivos en este sector. Con base en un estudio empírico para México, utilizando una función de producción translogarítmica y datos de sección cruzada para el año 2014, se encuentra que las relaciones entre los factores de la producción resultan no unitarias, y algunas de ellas se muestran incluso complementarias. Ello motiva a reflexionar acerca de que, más allá de la maximización de beneficios, la micro y pequeña empresa podría estar incluyendo otros objetivos, como el de optimizar la capacidad instalada.

Palabras claves: elasticidad; factores de producción; funciones de producción; funciones de costos; maximización.

Clasificación JEL: C31; C51; D20; D21.

MSC2010: 91G70; 93E24.

The Economic Objectives of the Micro and Small Businesses in Mexico. An Analysis of Elasticities of Productive Factors

ABSTRACT

A large body of economic literature has established that the primary purpose of business is profit maximization assuming unitary and constant elasticity of substitution of production factors. However, the prevailing operating conditions of micro and small enterprises raise concerns about the validity of this assumption and the objectives in this sector. Through an empirical study for Mexico and using the translog production function based on cross-sectional data by 2014, we find that the substitution elasticities between production factors are not unitary and even to some extent, they show complementarity. This forces us to consider that beyond seeking to maximize profits, micro and small enterprises might be including other objectives, such as to optimizing installed capacity.

Keywords: elasticity; production factors; production functions; cost functions; maximization.

JEL classification: C31; C51; D20; D21.

MSC2010: 91G70; 93E24.



1. INTRODUCCIÓN

Desde la perspectiva neoclásica, el objetivo de corto plazo de la empresa es maximizar el beneficio económico con base en la elección de un nivel de producción que amplíe al límite la diferencia entre el ingreso total y el costo total. En el largo plazo, la mira está puesta en la consecución de aquellos cambios estructurales que permitan a la empresa incrementar su cuota de mercado y asegurar beneficios futuros a través de la generación de ventajas competitivas (Tirole, 1990); este último enfoque se relaciona con el tipo de tecnología empleada y la productividad de los factores de la producción.

Esta visión de largo plazo de la empresa ha venido considerando la sustitución continua de los factores, y ha estado generalmente descrita, en términos empíricos, por una función de producción Cobb Douglas (Herrera, 2011). Los supuestos fundamentales de esta representación implican una economía perfectamente competitiva donde los factores de producción son variables y están al alcance de la empresa.

No obstante la amplia difusión con la que cuentan, los supuestos de la maximización del beneficio de largo plazo han venido siendo cuestionados debido a su dificultad para representar situaciones reales, sobre todo, en el caso de empresas de pequeña escala (Soloman, 2015). La literatura económica ha encontrado que la elasticidad de sustitución de factores a nivel agregado se asocia con la eficiencia del Estado en materia de regulación empresarial, así como con el apoyo institucional en actividades innovadoras (Aquilina *et al.*, 2006); es decir, con la flexibilidad del sistema productivo de un país para ofrecer el “menú de elección” a disposición de los empresarios para el cumplimiento de sus objetivos (Yuhn, 1991).

El contexto de los países en vías de desarrollo, con debilidades institucionales y una ineficiente regulación empresarial, caracteriza las condiciones en las que se desenvuelve la micro y pequeña empresa (MyPE)¹. Las limitaciones en materia de acceso a fuentes de financiamiento y capacitación, trámites simplificados de apertura y adquisición de equipo de producción, provocan que los promotores de estos emprendimientos se vean impedidos de variar las dotaciones de factores, siendo orillados a modificar sus objetivos y conducta con relación a lo predicho por la teoría.

En México, las micro y pequeñas empresas constituyen el 99% de las unidades económicas. Solo las microempresas representan el 95,4% de las firmas, mientras que las pequeñas abarcan el 3,6%. De igual forma, la micro y pequeña empresa es el sector más importante en generación de empleo: el 55% del personal ocupado del país se emplea en la MyPE. Las microempresas agrupan al 39,8% mientras que las pequeñas, el 15,2%; el resto lo ocupan las medianas y grandes empresas (INEGI, 2015).

De acuerdo con los resultados de la Encuesta Nacional de Micronegocios (ENAMIN) de México (INEGI, 2014), el 66% de las microempresas son de autoempleo (trabajo por cuenta propia), en el 31% laboran de dos a cuatro empleados incluyendo al

¹ Para efectos de este trabajo, se entenderá a la MyPE como aquella unidad económica con un máximo de 50 empleados para todas las ramas económicas, a excepción del comercio, donde se consideran empresas de hasta 30 trabajadores. Lo anterior, de conformidad con lo dispuesto en los acuerdos por los que se estratifican las empresas (para el caso de México, Diario Oficial de la Federación, 30/06/2009; para el caso de Europa, Diario Oficial de la Unión Europea, Reglamento 651/2014).

dueño y sólo el 3% tiene más de cinco empleados. Lo anterior sugiere que este subsector empresarial ha sido una socorrida alternativa de sustento en la economía mexicana de las últimas décadas.

Si se considera el tamaño del negocio, se puede observar una correlación positiva entre este y la posibilidad de tener un local dedicado a la producción y venta, ya que de las empresas de autoempleo, sólo 30% cuenta con local, mientras que más del 50% de las empresas de entre dos y cuatro trabajadores, y más del 60% de las empresas con más de cinco empleados, cuentan con local (INEGI, 2014).

Datos de la ENAMIN indican que el 85% de las empresas de pequeña escala en México necesita financiamiento para iniciar operaciones. Sin embargo, de estas, el 60% sólo ha podido recurrir a ahorros personales o familiares debido a la falta de acceso al crédito de la banca comercial y de desarrollo. El apoyo gubernamental, por medio de programas asistenciales para financiar la apertura de negocios, ha beneficiado a menos del 1% de los microempresarios. Después de la puesta en marcha del negocio, tan solo el 15% busca algún tipo de financiamiento para la operación y el crecimiento.

De acuerdo con la opinión de los dueños –la cual es constante en las encuestas desde el año 1992 (Sánchez, 2007)–, sus principales problemas son: las bajas ganancias, la competencia excesiva y los problemas de gestión y adopción de tecnología. Algunos de estos problemas pueden ser detonados o agravados por la ausencia de elasticidad de sustitución unitaria entre factores. La restricción de sustituir el factor trabajo por capital físico o trabajo calificado (capital humano), suele tener un alto impacto en el desempeño empresarial. Por ejemplo, las limitaciones de gestión y adopción de tecnología, restringen las combinaciones en el uso de recursos productivos que permitan ampliar la gama y valor agregado a los bienes y servicios que la micro y pequeña empresa ofrecen, quedando con ello impedida para acceder a mercados más rentables. Incluso diversos problemas en las condiciones de trabajo, como la alta proporción de trabajadores con escasa calificación, podrían tener impacto significativo en las posibilidades de sustitución de los factores productivos, derivados de un alto porcentaje de merma y una baja tasa de innovación en los procesos de producción.

El principal motivo para iniciar el negocio se asocia con la posibilidad de complementar el ingreso familiar, la obtención de un mayor ingreso en comparación con el conseguido como empleado –cuando aplica– o con el hecho de no haber encontrado empleo después de haberlo buscado durante cierto tiempo. Cabe destacar que en el año 2012, el 46% de las empresas de pequeña escala estaban representadas por personas que antes no figuraban en el sector productivo del país, a diferencia del 32% que se daba en 2008. En promedio, el 56% de las microempresas tiene más de cinco años de antigüedad y el 75% cuenta con al menos dos años² (INEGI, 2014). Sin embargo, el número de nuevas micro y pequeñas empresas se ha venido incrementando ligeramente; pues mientras que en 2002, sólo el 7% de estas unidades comerciales tenían menos de un año, ese valor fue del orden del 11% en 2012. A la vez, en los últimos tres lustros, se ha venido consolidando el grupo de micro y pequeñas empresas con más de 20 años.

² Este dato no debe ser interpretado como el porcentaje de empresas que sobrevive un determinado tiempo.

En los últimos años se ha constatado la baja productividad de la MyPE en México y América Latina respecto a la de países desarrollados. Estudios recientes de la Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL) y la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE), señalan que las empresas pequeñas de países en vías de desarrollo tienen el 26% de la productividad de las empresas grandes, mientras que las de países desarrollados alcanzan el 69% (CEPAL y OCDE, 2012). Mientras que las microempresas solamente generan el 14,2% de los ingresos totales del país, las grandes empresas, que representan el 0,2% de los establecimientos, generan el 49,4% de estos (Méndez, 2015). Lo anterior se refleja en las asimetrías en la generación de ingreso y permite establecer que una de las causas principales de la baja productividad de las unidades económicas de pequeña escala, es la capacidad instalada, fija y limitada que presentan.

La evolución reciente de la MyPE evidencia que buena parte de estos negocios –sobre todo en lo que corresponde a los micronegocios– opera como una alternativa de autoempleo y como opción de “segundo mejor”, más allá de perseguir la maximización de beneficios. Lo anterior abre la posibilidad de que estos emprendimientos sean analizados de forma diferenciada con respecto a otros tipos de unidades económicas (Mungaray *et al.*, 2015) y genera la necesidad de revisar la aplicabilidad de las funciones de producción que suponen sustitución continua y unitaria de los factores productivos en un contexto de objetivos empresariales no convencionales.

En este trabajo se prueba la hipótesis de que la condición de sustitución de factores productivos en el caso de las MyPE mexicanas no es unitaria, lo cual constituye una inconsistencia entre la evidencia empírica y el tratamiento teórico neoclásico. Lo anterior hace posible la consideración de escenarios donde las empresas de pequeña escala, más allá de buscar la maximización del beneficio mediante la óptima combinación de factores, busquen objetivos como el de aprovechar la capacidad instalada o el de la supervivencia económica.

En la sección 2, se revisa el estado del debate teórico sobre los objetivos empresariales de pequeña escala. Algunas alternativas de funciones de producción para el análisis empresarial se describen en la sección 3, partiendo de sus supuestos fundamentales y formas funcionales. En la sección 4, correspondiente a la metodología, se presenta un modelo econométrico con datos de corte transversal y un sistema de ecuaciones bajo la estimación de Mínimos Cuadrados Ponderados Iterativos (MCPI), para determinar la elasticidad de sustitución de factores. En la sección 5, se exponen los resultados y, en la sección 6, los alcances e implicaciones de la investigación.

2. LA MYPE EN EL DEBATE TEÓRICO SOBRE LOS OBJETIVOS EMPRESARIALES

La teoría clásica del estudio de la empresa y sus objetivos tuvo en Marshall (1890), y su concepto de maximización del beneficio, a uno de sus autores seminales³. El enfoque de esta visión marginalista se centró en las características generales de la empresa

³ No obstante, dicho concepto encuentra su fundamento en los estudios empresariales de Cournot realizados en 1838 (Crossan, 2005).

promedio en la forma de una “empresa representativa”. A partir de entonces, surgieron una serie de estudios que soportaron y complementaron la idea marshalliana; los cuales, enmarcados en la doctrina neoclásica, consideraron que las características operacionales y conductuales de la empresa eran comunes a todas ellas en la búsqueda de la premisa de la maximización de beneficios.

A mediados del siglo XX, surge una línea alternativa en el análisis teórico de la empresa, que abrió el debate acerca de la eficacia de la metodología de la corriente marshalliana. Esta perspectiva, desarrollada por Lester (1947), criticaba el análisis marginalista, la maximización del beneficio y el tratamiento abstracto como teoría general del comportamiento de las unidades económicas. Específicamente, cuestionaba la simplificación de investigaciones previas respecto al tratamiento de la empresa, argumentando que otros factores podían influir en las decisiones y comportamiento del individuo en el entorno de su proyecto empresarial, más allá de los conceptos de ingreso y costo marginal.

En esta lógica están los trabajos de Baumol (1959), Williamson (1964) y Marris (1964), quienes, a partir de la visualización de nuevas estructuras de organización empresarial (como, por ejemplo, las sociedades anónimas), plantearon que la figura gerencial de las empresas podría tener, en algunos casos, objetivos diferentes a la maximización de beneficios, tales como la búsqueda del incremento en ventas, la minimización de costos (Ruíz-Durán, 1995) o el aprovechamiento de su capacidad instalada, aunque ello supusiera producir a un nivel distintos al del equilibrio neoclásico del mercado.

A partir de estas aportaciones, empieza a tomar forma la teoría del capitalismo gerencial que encuentra impulso en diversos estudios empíricos como el de Skinner (1970), quien afirma que, en la práctica, las empresas suelen fijar precios con base en costos, lo cual tiene un impacto en la utilidad potencial que puede llevar a resultados distintos del sugerido por la maximización de beneficios. Por su parte, Jobber y Hooley (1987) encontraron una relación estadísticamente significativa entre el tamaño de las empresas y los objetivos que estas persiguen. Entretanto, Hornby (1995) halló que las empresas que eran gestionadas en todas sus áreas por el propio dueño presentaban particularidades como la de manejar un mínimo tolerable de beneficios.

Por otro lado, en un análisis enfocado en el comportamiento de los emprendedores, Anderson (2013) va más allá de cuestionar la simplicidad del modelo empresarial neoclásico, aseverando que los agentes que inician un negocio, si bien trabajan por la adquisición de ganancias, no lo hacen buscando la maximización de beneficios en todo momento del tiempo. De acuerdo con el citado autor, un emprendedor que lleva poco tiempo con su empresa (hasta 2 años, aproximadamente), probablemente encontraría que, siguiendo objetivos de maximizar beneficios, lo óptimo es producir cero unidades o cerrar su negocio. Los planteamientos anteriores constituyen evidencias, de que la conducta de este tipo de agentes podría obedecer a un enfoque distinto al propuesto por la teoría convencional.

De esta forma, sostener la idea de la maximización de beneficios en empresas de escala suficientemente pequeña no puede ser axiomático, pues dicha comprobación requiere el análisis simultáneo de diversas variables con interacciones aún desconocidas. Derivado de lo anterior, no es posible descartar que las pequeñas

empresas busquen, más allá de soluciones óptimas, soluciones aceptables (Soloman, 2015). En este sentido, Perlman (1992) sostiene que algunas empresas se ven imposibilitadas de maximizar beneficios, pues esto requiere un nivel de control incompatible con la falta de información completa y con los intereses a corto plazo de los empresarios (por ejemplo, los asociados a las necesidades de flujo de efectivo para el gasto corriente de la familia), lo que podrían orillar a estos a caer en errores económicos no deliberados.

En un trabajo empírico para economías en vías de desarrollo, Mungaray *et al.* (2015) analizan la naturaleza de los emprendimientos, identificando dos razones para su surgimiento: una asociada a la dinámica de crecimiento y oportunidades de mercado, y otra relacionada con problemas en los mercados de trabajo debido a contracciones económicas, que tienden a elevar el desempleo y la precariedad de los salarios. Esto último provocaría que algunos individuos desplazados de sus puestos de trabajo terminen incorporándose a la empresariedad a través de unidades económicas de subsistencia que difícilmente alcanzarán los objetivos empresariales en términos teóricos. En este sentido, Aguilar y Barrón (2006) cuestionan el que la empresa de pequeña escala, especialmente aquella surgida en entornos de alta marginación⁴, pueda ser descrita por el enfoque teórico neoclásico. Argumentan que esta microempresa parece más bien ajustarse al comportamiento resultante de la maximización de algún tipo de nivel de subsistencia vinculado al entorno personal, familiar o social de su promotor (Yunus, 2010), por el cual se cubren apenas ciertas necesidades básicas de alimentación, vivienda, transporte, educación y salud.

Debido a que diversos análisis destacan de la micro y pequeña empresa su vertiente como unidad de producción familiar y, en muchos casos, su naturaleza de subsistencia (Mungaray *et al.*, 2015), sumado a que estas suelen enfrentar altos costos y escasez de financiamiento y asistencia técnica (Ramírez *et al.*, 2010), resulta legítimo sospechar que la elasticidad de sustitución perfecta en los factores productivos, más que una generalidad, se trate de una excepción.

3. LOS SUPUESTOS EN LAS PRINCIPALES FUNCIONES DE ANÁLISIS EMPRESARIAL

La función de producción neoclásica Cobb Douglas establece el supuesto de una perfecta sustitución entre los factores de producción, capital (K) y trabajo (L), con relación al nivel de producción total (Q). Aunque es factible incluir otros factores o subdividir tanto el trabajo como el capital en varias clases, la forma tradicional de la función Cobb Douglas es:

$$Q(K, L) = K^\alpha L^\beta \quad [1]$$

Mientras que las productividades marginales de capital y trabajo son positivas (es decir, $\partial Q/\partial K > 0$ y $\partial Q/\partial L > 0$), la productividad marginal decrece en la forma $\partial^2 Q/\partial K^2 < 0$ y $\partial^2 Q/\partial L^2 < 0$. Típicamente se supone que esta función es homogénea de grado uno; esto es, muestra rendimientos constantes a escala y un

⁴ Estas conforman alrededor del 90% de la estructura empresarial en países en desarrollo.

aumento en la producción que es proporcional al incremento de los factores variables que intervienen. Definiendo g como la tasa de crecimiento del producto respecto al tiempo t —es decir $g(r_K, n_L) = (1/Q)(\partial Q/\partial t)$ —, se tiene que:

$$g(r_K, n_L) = \alpha r_K + \beta n_L + R \quad [2]$$

donde r_K y n_L son las participaciones de capital y trabajo, respectivamente. Si se interpretan α y β como las elasticidades del producto con respecto a pequeños cambios en K y L , respectivamente (Rasmussen, 2011), entonces cumplen:

$$\alpha = \frac{K}{Q} \frac{\partial Q}{\partial K}, \quad \beta = \frac{L}{Q} \frac{\partial Q}{\partial L} \quad [3]$$

Esta función de producción está sujeta a la condición de igualdad entre la inversión y el ahorro y a la condición de pleno empleo.

Leontief simplificó el modelo de la función de producción Cobb Douglas para darle una forma que se prestara a verificación empírica mediante los siguientes supuestos: (1) cada producto es suministrado por un sólo sector productivo y no hay sustitución entre los bienes de sectores diferentes; (2) los insumos utilizados por cada sector son una función lineal del nivel de producción de ese sector; y (3) las funciones de producción son homogéneas de grado uno y elasticidad cero.

Particularmente, la función de producción generalizada de Leontief toma la forma:

$$Q = \min \left\{ \frac{K}{a}, \frac{L}{b} \right\} \quad [4]$$

donde a y b son las cantidades respectivas de los factores asociadas a la producción de una unidad de producto. Las condiciones que deben cumplirse para la consistencia lógica de este modelo son que $K \geq aQ$ y $L \geq bQ$. Como no hay sustitución entre los insumos o factores de producción, el nivel de producción depende de la disponibilidad del insumo más escaso. Esta falta de sustitución puede explicarse por la naturaleza de la tecnología o por la estabilidad de los precios relativos de los insumos, de tal suerte que no existan motivos para alterar las proporciones en que estos se emplean.

Mientras el modelo Cobb Douglas busca la maximización del beneficio con la combinación de factores de capital y trabajo (K, L) bajo sustitución perfecta o unitaria, la función generalizada de Leontief busca la maximización de la capacidad instalada con nula elasticidad de sustitución entre insumos (Kozikowski, 1988).

Por otro lado, Arrow *et al.* (1961) desarrollaron una función de producción generalizada que llamaron “función de producción de elasticidad de sustitución constante” (CES), la cual, a diferencia de la Cobb Douglas, no necesariamente mantenía una elasticidad de sustitución igual a uno. Considerando la nomenclatura de Suárez (2012), la función CES viene expresada como:

$$Q = A[\delta K^{-\tau} + (1 - \delta)L^{-\tau}]^{-\frac{\mu}{\tau}} \quad [5]$$

donde A se refiere al parámetro de eficiencia, δ representa la distribución de los factores de producción (con $0 < \delta < 1$), μ es el parámetro de escala y τ es el parámetro de sustitución.

Con base en este planteamiento, la elasticidad de sustitución (θ) dependerá del parámetro de sustitución (τ), dando lugar a tres situaciones posibles: si $\tau = -1$, entonces $\theta = \infty$ y la isocuanta asume su forma tradicional; si $\tau = 0$, entonces $\theta = 1$ y la isocuanta asume la forma de línea recta al tratarse de factores sustitutivos perfectos (caso de Cobb Douglas); y finalmente, si $\tau = \infty$, se tiene que $\theta = 0$, al tratarse de factores complementarios perfectos (caso de generalizada de Leontief), por lo que la isocuanta forma un ángulo en forma de L (Suárez, 2012).

4. METODOLOGÍA Y DATOS

Las funciones de producción descritas en la sección anterior tienen la particularidad de definir *a priori* el valor de las elasticidades de sustitución de los factores. No obstante, la función translogarítmica permite que las proporciones de costos totales en los insumos varíen a través de una representación cuadrática en los logaritmos de los factores productivos empleados. Esto da como resultado una gran variedad de patrones de sustitución entre los factores productivos apegados al contexto de la empresa, a diferencia del conseguido a través de las funciones Cobb Douglas, CES o Leontief (Ibarra y García, 2013).

Una explicación sintetizada de la estructura de esta función ha sido obtenida por Greene (2008). Suponiendo que existe una función de producción de forma $Q = F(x)$ y que la solución de minimización de costos para obtener un nivel determinado de producción está dada por la demanda de factores $x_i = (Q, p)$, los costos de producción total estarán dados por la función:

$$C(Q, p) = \sum_{i=1}^Z p_i x_i(Q, p) \quad [6]$$

donde Z es el número total de factores.

Si se cumple la condición de rendimientos constantes a escala, la función de costos medios está dada por $C/Q = c(p)$, mientras que la demanda de factores se obtiene por la condición de Shephard, que establece que para una función de costos de producción $C(Q, p)$, la demanda de factores que minimiza los costos resulta de:

$$x_i = \frac{\partial \ln C(Q, p)}{\partial \ln p_i} = Q \frac{\partial c(p)}{\partial p_i} \quad [7]$$

Alternativamente, por diferenciación logarítmica se puede obtener la participación de costos de cada factor, que toman la forma:

$$S_i = \frac{\partial \ln c(p)}{\partial \ln p_i} = \frac{p_i x_i}{C(Q, p)} \quad [8]$$

El objetivo de utilizar la especificación translogarítmica (o translog) es encontrar las elasticidades de sustitución de factores (θ_{ij}) y la elasticidad precio de la demanda (n_{ii}), dadas por:

$$\theta_{ij} = \frac{c(p)[\partial^2 c(p)/(\partial p_i \partial p_j)]}{(\partial c(p)/\partial p_i)(\partial c(p)/\partial p_j)} \quad [9]$$

$$n_{ii} = S_i \theta_{ii} \quad [10]$$

Aunque estas elasticidades de sustitución diferirán en cada punto de la función, es común tomar como referencia el resultado de su cálculo en algún punto central, tal como la media de los datos. Expandiendo $\ln c(p)$ en una serie de Taylor de segundo orden sobre el punto $\ln p = 0$, se obtiene:

$$\ln c(p) \approx \sum_{i=1}^Z \left(\frac{\partial \ln c(p)}{\partial \ln p_i} \right) \ln p_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^Z \sum_{j=1}^Z \left(\frac{\partial^2 \ln c(p)}{\partial \ln p_i \partial \ln p_j} \right) \ln p_i \ln p_j \quad [11]$$

Si se toman estas derivadas como coeficientes, entonces la función de costos se convierte en:

$$\begin{aligned} \ln c(p) = & \beta_0 + \beta_1 \ln p_1 + \dots + \beta_M \ln p_M + \delta_{11} \left(\frac{1}{2} \ln^2 p_1 \right) + \delta_{12} \ln p_1 \ln p_2 \\ & + \delta_{22} \left(\frac{1}{2} \ln^2 p_2 \right) + \dots + \delta_{MM} \left(\frac{1}{2} \ln^2 p_M \right) \end{aligned} \quad [12]$$

Esta última ecuación es la función de costos translog. Debido a que, en las funciones de producción, las elasticidades de sustitución de factores se consideran constantes, en este trabajo se utiliza una función de costos para la determinación de las elasticidades de sustitución, partiendo de la idea de que el nivel de minimización de costos es el mismo que el de la demanda óptima de factores a la que se llegaría con una función de producción⁵.

El análisis empírico a través de la función translogarítmica permite contrastar la hipótesis de que las empresas de pequeña escala no presentan elasticidad de sustitución unitaria de factores productivos (Greene, 2008). En esta investigación se consideran cuatro factores de producción: capital, K ; trabajo, L ; energía, E , y materiales, M .

Los datos, que servirán para construir los *stocks* de los factores productivos, fueron tomados del Censo Económico del INEGI (2015). Para la determinación de la muestra, se tomaron en cuenta sólo aquellas empresas con un máximo de 50 empleados para todas las actividades económicas, a excepción del comercio, donde se consideraron empresas de hasta 30 trabajadores. Esto permitió considerar las micros y pequeñas empresas de las 19 actividades económicas que estratifica el INEGI, dejando solo de

⁵ La diferencia radica en que, en las funciones de demanda de factores resultantes de la minimización de costos (llamadas demandas condicionadas), la elección de los factores se relaciona con sus precios a un nivel de producción dado, mientras que las funciones de demanda de factores maximizadoras del beneficio muestran la elección de los factores correspondiente a un precio dado del producto.

lado la actividad relacionada con labores legislativas, gubernamentales y de impartición de justicia.

La variable “capital” se conforma de la suma de las compras totales de activos fijos y de los pagos por alquiler de bienes muebles e inmuebles. La variable “trabajo” agrega los pagos por suministro de personal, servicios profesionales y comisiones sin sueldo base. La variable “energía” está formada por el total de gastos en combustibles y el consumo de energía eléctrica. Por otro lado, la variable “materiales” es la suma de los gastos por consumo de bienes y servicios, los insumos utilizados para la prestación de servicios y las materias primas que se integran físicamente a los bienes producidos. La variable “producción” se obtiene a partir de la producción bruta total⁶. Para obtener los precios de dichos insumos, el monto de cada insumo se dividió por la variación total de existencias, a excepción del insumo “trabajo” que se dividió por el personal remunerado.

El modelo econométrico a estimar está representado por la siguiente función:

$$\begin{aligned} \ln CT = & \ln \alpha_0 + \alpha_K \ln p_K + \alpha_L \ln p_L + \alpha_E \ln p_E + \alpha_M \ln p_M + \gamma_{KL} \ln p_K \ln p_L + \gamma_{KE} \ln p_K \ln p_E \\ & + \gamma_{KM} \ln p_K \ln p_M + \gamma_{LE} \ln p_L \ln p_E + \gamma_{LM} \ln p_L \ln p_M + \gamma_{EM} \ln p_E \ln p_M \\ & + \frac{1}{2} \gamma_{KK} (\ln p_K)^2 + \frac{1}{2} \gamma_{LL} (\ln p_L)^2 + \frac{1}{2} \gamma_{EE} (\ln p_E)^2 + \frac{1}{2} \gamma_{MM} (\ln p_M)^2 + \alpha_Q \ln Q \\ & + \frac{1}{2} \gamma_{QQ} (\ln Q)^2 + \gamma_{KQ} \ln p_K \ln Q + \gamma_{LQ} \ln p_L \ln Q + \gamma_{EQ} \ln p_E \ln Q \\ & + \gamma_{MQ} \ln p_M \ln Q \end{aligned} \quad [13]$$

donde CT es el costo total; mientras que p_K , p_L , p_E y p_M son, respectivamente, los precios del capital, del trabajo, de la energía y de los materiales. Tal como ya se ha definido, el prefijo Q representa el nivel de producción. A todas las variables del modelo se les aplica logaritmo natural para simplificar la interpretación en términos de elasticidades.

En las ecuaciones translog de grandes cantidades de coeficientes –por ejemplo, aquellas derivadas de una expansión de Taylor de segundo orden–, la estimación por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) arroja coeficientes consistentes e insesgados pero no eficientes. Para ganar en eficiencia, la estimación del modelo se realiza a través de Mínimos Cuadrados Ponderados Iterativos (MCPI) (Pérez, 2003), para lo cual fue necesaria la construcción de un sistema de ecuaciones de demanda de factores (S) con base en sus participaciones, tal que:

$$\begin{aligned} S_K &= \alpha_K + \gamma_{KK} \ln p_K + \gamma_{KL} \ln p_L + \gamma_{KE} \ln p_E + \gamma_{KM} \ln p_M + \gamma_{KQ} \ln Q \\ S_L &= \alpha_L + \gamma_{LK} \ln p_K + \gamma_{LL} \ln p_L + \gamma_{LE} \ln p_E + \gamma_{LM} \ln p_M + \gamma_{LQ} \ln Q \\ S_E &= \alpha_E + \gamma_{EK} \ln p_K + \gamma_{EL} \ln p_L + \gamma_{EE} \ln p_E + \gamma_{EM} \ln p_M + \gamma_{EQ} \ln Q \\ S_M &= \alpha_M + \gamma_{MK} \ln p_K + \gamma_{ML} \ln p_L + \gamma_{ME} \ln p_E + \gamma_{MM} \ln p_M + \gamma_{MQ} \ln Q \end{aligned} \quad [14]$$

En la búsqueda de una solución para el sistema, las funciones de costos deben poseer algunas cualidades. La primera es la condición de homogeneidad de grado 1, lo que implica que para un nivel fijo de producción, el costo total debe ajustarse proporcionalmente a la variación del precio de los factores. En consecuencia, la suma de

⁶ Todas las variables utilizadas son continuas.

las participaciones de los factores en el sistema de ecuaciones debe ser igual a 1 y la suma de sus derivadas cruzadas igual a cero. La segunda cualidad es la restricción de simetría; dado que la función de costos es continua y diferenciable, sus derivadas cruzadas deben ser iguales, es decir: $\gamma_{KL} = \gamma_{LK}$, $\gamma_{KE} = \gamma_{EK}$, $\gamma_{KM} = \gamma_{MK}$, $\gamma_{LE} = \gamma_{EL}$, $\gamma_{LM} = \gamma_{ML}$ y $\gamma_{ME} = \gamma_{EM}$.

Con el propósito de ganar eficiencia en la estimación (Caves *et al.*, 1980), se simplifica el sistema de ecuaciones mediante la incorporación de las condiciones de homogeneidad y simetría, lo cual permite reducir el número de parámetros. En consecuencia, las funciones en [14] se transforman en el siguiente sistema de ecuaciones de 12 incógnitas que se puede estimar eficientemente mediante MCPI.

$$\begin{aligned} S_K &= \alpha_k + \gamma_{KK} \ln\left(\frac{p_K}{p_M}\right) + \gamma_{KL} \ln\left(\frac{p_L}{p_M}\right) + \gamma_{KE} \ln\left(\frac{p_E}{p_M}\right) + \gamma_{KQ} \ln Q \\ S_L &= \alpha_L + \gamma_{KL} \ln\left(\frac{p_K}{p_M}\right) + \gamma_{LL} \ln\left(\frac{p_L}{p_M}\right) + \gamma_{LE} \ln\left(\frac{p_E}{p_M}\right) + \gamma_{LQ} \ln Q \\ S_E &= \alpha_E + \gamma_{KE} \ln\left(\frac{p_K}{p_M}\right) + \gamma_{LE} \ln\left(\frac{p_L}{p_M}\right) + \gamma_{EE} \ln\left(\frac{p_E}{p_M}\right) + \gamma_{EQ} \ln Q \end{aligned} \quad [15]$$

donde se ha considerado como numerario el insumo materiales (M).

5. RESULTADOS

Los resultados de la estimación se presentan en el Cuadro 1, donde se observa que todos los coeficientes son estadísticamente significativos al 95%, a excepción de γ_{KL} y γ_{EQ} , que representan las derivadas cruzadas relativas, respectivamente, al capital-trabajo y energía-producción.

Cuadro 1. Estimación del sistema de ecuaciones por MCPI

	Coefficiente	E. E.	Probabilidad
α_k	0,2484	0,0239	0,0000
γ_{KK}	0,0664	0,0030	0,0000
γ_{KL}	0,0001	0,0010	0,1653
γ_{KE}	-0,0175	0,0019	0,0000
γ_{KQ}	-0,0038	0,0017	0,0233
α_L	0,3959	0,0872	0,0000
γ_{LL}	-0,0113	0,0037	0,0021
γ_{LE}	0,0043	0,0011	0,0001
γ_{LQ}	-0,0156	0,0054	0,0039
α_E	0,1852	0,0267	0,0000
γ_{EE}	0,0740	0,0026	0,0000
γ_{EQ}	0,0035	0,0019	0,0598

Fuente: Elaboración propia. E.E.: Error estándar.

Resulta destacable el hecho de que solo un coeficiente haya sido no significativo al 90%. Para Behrman (1972) particularmente la elasticidad entre capital y trabajo (en términos sectoriales) es un componente del grado de flexibilidad de la economía en

respuesta a los cambios en el mercado. El autor encuentra que las economías en desarrollo suelen ser menos flexibles y, por tanto, presentan más problemas para aprovechar su potencial para el desarrollo de ventajas comparativas.

Para comprobar que el sistema cumple con la condición de homogeneidad, se contrastó la restricción con el test de Wald, donde la hipótesis nula señala que la suma de coeficientes asignados a las participaciones debe ser igual a 1 ($\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$). Los resultados confirman que la hipótesis nula de homogeneidad no se puede rechazar, por lo que se cumple con la restricción. Los parámetros de la ecuación de la demanda de materiales (S_M), surgen de las restricciones de homogeneidad de grado 1 en precios, quedando como:

$$\begin{aligned}\alpha_M &= [1 - (\alpha_k + \alpha_L + \alpha_E)] = && 0,1705 \\ \gamma_{MK} &= -(\gamma_{KK} + \gamma_{KL} + \gamma_{KE}) = && -0,0502 \\ \gamma_{ML} &= -(\gamma_{KL} + \gamma_{LL} + \gamma_{LE}) = && 0,0057 \\ \gamma_{ME} &= -(\gamma_{KE} + \gamma_{LE} + \gamma_{EE}) = && -0,0607 \\ \gamma_{MQ} &= -(\gamma_{KQ} + \gamma_{LQ} + \gamma_{EQ}) = && 0,0158 \\ \gamma_{MM} &= -(\gamma_{MK} + \gamma_{ML} + \gamma_{ME}) = && 0,1053\end{aligned}$$

Una vez obtenidos los coeficientes de los insumos, es posible calcular las elasticidades de sustitución parcial de factores (Greene, 2008) a través de las expresiones:

$$\theta_{ij} = \frac{\gamma_{ij} + \mu(S_i S_j)}{\mu(S_i S_j)} \quad [16]$$

$$\theta_{ii} = \frac{\gamma_{ij} + \mu[(S_i - 1)]}{\mu(S_i S_i)} \quad [17]$$

donde θ_{ij} es la elasticidad de sustitución del factor i por el factor j , θ_{ii} es la elasticidad propia del factor i , la media de las participaciones de los factores i y j está representada por $\mu(S_i S_j)$ y $\mu(S_i S_i)$ es la media de la participación del factor i . El término $\mu[(S_i - 1)]$ representa la media de la participación del factor i menos la demanda de este factor. Para calcular las elasticidades se estimaron las medias de las participaciones de los insumos, las cuales se muestran en el Cuadro 2, junto con otros estadísticos básicos.

Cuadro 2. Medidas de tendencia central de las participaciones de los insumos

	S_K	S_L	S_E	S_M
Media	0,0740	0,1566	0,0629	0,7065
Mediana	0,0622	0,1366	0,0328	0,6939
Máximo	0,3375	0,4218	0,4233	0,9351
Mínimo	0,0121	0,0249	0,0047	0,4243
D.S.	0,0488	0,0913	0,0735	0,1347

Fuente: Elaboración propia. D.S.: Desviación estándar.

Utilizando los estadísticos que aparecen en el Cuadro 2, se calculan las elasticidades de sustitución parciales de los factores de producción, que se muestran en el Cuadro 3; donde, dadas las condiciones de simetría, sólo es necesario hacer el cálculo para una sola mitad diagonal de la matriz. Las relaciones entre factores que exhiben elasticidad de sustitución con signo positivo son: capital-trabajo, capital-materiales, trabajo-materiales y trabajo-energía. Es interesante destacar que el factor trabajo es el único que tiene elasticidades cruzadas positivas con el resto de factores.

Cuadro 3. Elasticidad de sustitución parcial de factores para la micro y pequeña empresa

θ_{ij}	<i>K</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>E</i>
<i>K</i>	-0,3961	1,1169	0,0394	-2,7593
<i>L</i>		-5,8439	1,0513	1,4319
<i>M</i>			-0,2046	-0,3670
<i>E</i>				3,8049

Fuente: Elaboración propia.

En el Cuadro 3 se observa que la elasticidad de sustitución capital-materiales es relativamente baja, con apenas 0,0394, lo que significa que si el precio del capital aumenta en 1%, la demanda del factor materiales se incrementa en 0,04%. Una mayor sensibilidad muestra la relación de insumos trabajo-materiales, pues ante el aumento de 1% en el precio del trabajo, la demanda de materiales se incrementa en 1,05%.

La relación de insumos trabajo-energía es la elasticidad de sustitución de factores que presenta la mayor sensibilidad, dando como resultado que la demanda de energía se incrementa en 1,43% cada vez que aumenta en 1% el precio del trabajo. La elasticidad de sustitución de factores entre capital y trabajo es de 1,12%. Una elasticidad de sustitución alta sugiere la posibilidad de expansión de oportunidades a través de la adecuada manipulación de los precios relativos de los factores y una mayor capacidad de respuesta a cambios externos (Kim, 1984).

Por otro lado, ante un aumento en 1% del precio del capital, la demanda de energía disminuye hasta en 2,76%; cabe subrayar que esta es la más alta de las elasticidades cruzadas, la cual resulta complementaria. De manera similar, un incremento en 1% del precio de materiales reduce la demanda de energía en 0,37%. Estas evidencias son congruentes con la lógica económica, pues al incrementarse el precio de factores como el capital y los materiales, se disminuye su demanda, lo cual es equivalente a contar con menos insumos para procesar y por tanto, menos energía que demandar.

Son de resaltar dos hechos. El primero de ellos es la alta sensibilidad del factor trabajo y su elasticidad propia, pues cuando aumenta en 1% su precio, la demanda por este factor se reduce 5,84%; lo anterior podría estar asociado a la existencia de un alto número de ayudantes sin pago o con pago no estable en el entorno de la micro y pequeña empresa. El segundo de estos resultados se refiere al signo positivo que presenta la elasticidad propia de la demanda de energía, pudiendo interpretarse como que, aunque el costo de oportunidad del insumo aumenta con su consumo, la micro y pequeña empresa no tienen alternativas de sustitución para este factor, sumado a un efecto renta importante. Cabe destacar que todos los resultados son altamente

consistentes con los obtenidos por los datos del censo económico previo al utilizado para este trabajo, es decir, el correspondiente al año 2009.

6. CONCLUSIONES

Una vez analizados los principales supuestos de las funciones de producción utilizadas para el estudio formal de la empresa y los sectores económicos, la presente investigación empírica comprueba la hipótesis de que no todas las relaciones entre los principales factores de producción en la micro y pequeña empresa mexicana (capital, trabajo, materiales y energía) presentan condiciones de sustitución entre insumos, y que la magnitud de aquellas en las que se aprecia dicha condición, medida por la elasticidad de sustitución, no suele ser unitaria.

La baja magnitud encontrada en las elasticidades cruzadas refleja que en la mayoría de los casos no se presentan variaciones importantes en la demanda de los mismos ante modificaciones en los precios. Fue solo en el caso de la relación entre los factores capital y trabajo donde se observó una elasticidad de sustitución aproximadamente unitaria. El resto de las relaciones resultó no proporcional, mostrando complementariedades: específicamente las relaciones de capital-energía y de materiales-energía. De esta forma, los cambios en el precio de algunos insumos, generan presiones para que las cantidades empleadas de otros factores varíen, en algunos casos operando como sustitutos y otras, como complementarios.

Se advierte entonces que el estudio oportuno y formal de la MyPE en México –y probablemente en muchos países de América Latina– debe considerar la caracterización propia de estas unidades económicas, que en muchos casos es distinta de la asumida en la investigación económica de la empresa. Lo anterior se concreta en tres conclusiones. En primera instancia, aunque el resultado podría no ser privativo de la micro y pequeña empresa, el hecho de que la elasticidad de sustitución de la MyPE no sea cercana a la unidad en la mayoría de las relaciones entre factores exige que la aplicación de la función de producción Cobb Douglas incorpore los matices técnicos derivados de ello.

En segundo lugar, el trabajo representa una invitación a repensar la idea de que la generalidad de las empresas se orienta, irrefutablemente, por el objetivo de la maximización de beneficios. Dado que esto último requiere de sustitución óptima y libre entre factores productivos, los resultados comprueban que, dadas las limitaciones operativas de la MyPE, las unidades económicas de pequeña escala se vinculan más sólidamente con el objetivo de optimización de la capacidad instalada.

En tercer lugar, el limitado acceso que tiene la micro y pequeña empresa a los factores tangibles de producción hace pensar que ciertos factores de tipo intangible –como el soporte de la familia– están siendo una alternativa de desarrollo en emprendimientos de pequeña escala (Fuentes *et al.*, 2016). Así, para fortalecer la competitividad empresarial y coadyuvar a la optimización de la capacidad instalada de la MyPE, la política pública debe enfocarse en flexibilizar las limitaciones de estas unidades comerciales para hacerse de factores tangibles, pero también en impulsar el desarrollo de aquellos de tipo intangible.

Finalmente, cabe señalar que, dado que este análisis se realizó bajo un corte de sección cruzada de carácter nacional, un área de oportunidad para futuras investigaciones consiste en soportar la discusión en el cálculo de las elasticidades de sustitución de factores con datos de series de tiempo o, aún mejor, con datos de panel y por sectores regionales. Hacerlo de esta forma podría hacer más precisos los resultados al considerar el heterogéneo contexto regional prevaleciente a lo largo del territorio nacional.

REFERENCIAS

- Aguilar, J. y Barrón, K. (2006): “Poder de mercado y marginación de las microempresas: estudio de caso de Baja California”. *Comercio Exterior*, 56(10), 843–853.
- Anderson, P. (2013): *The Economics of Business Valuation: Towards a Value Functional Approach*. Palo Alto: Stanford University Press.
- Aquilina, M.; Klump, R. y Pietrobelli, C. (2006): “Factor substitution, Average Firm Size and Economic Growth”. *Small Business Economics* 26, 203–214.
- Arrow, K.J.; Chenery, H.B.; Minhas, B.S. y Solow, R.M. (1961): “Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency”. *The Review of Economics and Statistics*, 43, 225–250.
- Baumol, W.J. (1959). *Business Behaviour, Value and Growth*. Londres: Macmillan.
- Behrman, J. (1972): “Sectoral Elasticities of Substitution between Capital and Labor in a Developing Economy: Times Series Analysis in the Case of Postwar Chile”. *Econometrica*, 40, 311–328.
- Caves, D.W.; Christensen, L.R. y Tretheway, M.W. (1980): “Flexible cost functions for multi product firms”. *The Review of Economics and Statistics*, 62, 477–481.
- CEPAL y OCDE (2012): *Perspectivas económicas de América Latina 2013. Políticas de PYMES para el cambio estructural*. París: Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL) y Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE).
- Crossan, K. (2005): “The Theory of the Firm and Alternative Theories of firm Behaviour: A Critique”. *International Journal of Applied Institutional Governance*, 1(1), 13pp.
- Fuentes, N.; Osorio, G. y Mungaray, A. (2016): “Capacidades intangibles para la competitividad microempresarial en México”. *Revista Problemas del Desarrollo*, 186(47), 83–106
- Greene, W. H. (2008): *Econometric Analysis*. 6th Ed. New Jersey: Prentice-Hall.

- Herrera, R. (2011): “A Critique of Mainstream Growth Theory: Ways out of the Neoclassical Science(-Fiction) and Toward Marxism”. En P. Zarembka y R. Desai (eds.): *Revitalizing Marxist Theory for Today's Capitalism*. Bingley: Emerald Group Publishing, pp. 3–63.
- Hornby, W. (1995): “Economics and Business, The theory of the Firm revisited: A Scottish Perspective”. *Managerial and Decision Economics*, 33(1), 33–41.
- Ibarra, J.A. y García, F. (2013): “Elasticidades de sustitución y separabilidad de los factores productivos de la industria maquiladora”. *Estudios Fronterizos*, 14(28), 155–185.
- INEGI. (2014): *Encuesta Nacional de Micronegocios (ENAMIN) 2002, 2008, 2010 y 2012*. Aguascalientes: Instituto Nacional de Estadística y Geografía. Recuperado de: <http://www.beta.inegi.org.mx/proyectos/enchogares/modulos/enamin/2012/default.html>.
- INEGI. (2015): *Censos Económicos 2014: Micro, pequeña, mediana y gran empresa*. Aguascalientes: Instituto Nacional de Estadística y Geografía. Recuperado de: www.inegi.org.mx/est/contenidos/Proyectos/ce/ce2014/doc/minimonografias/m_pymes_ce2014.pdf.
- Jobber, D. y Hooley, G. (1987): “Pricing Behaviour in UK Manufacturing and Services Industries”. *Managerial and Decision Economics*, 8, 167–171.
- Kozikowski, Z. (1988): *Técnicas de Planificación Macroeconómica*. México, D.F.: Trillas.
- Kim, J.W. (1984): “CES Production Functions in Manufacturing and Problems of Industrialization in LDCs: Evidence from Korea”. *Economic Development and Cultural Change*, 33(1), 143–165.
- Lester, R.A. (1947): “Marginalism, Minimum Wages, and Labour Markets”. *American Economic Review*, 37(1), 135–148.
- Marris, R. (1964): *The Economic Theory of Managerial Capitalism*. Londres: Macmillan.
- Marshall, A. (1890): *Principles of Economics*. Londres: Macmillan.
- Méndez, J.S. (2015): “Panorama empresarial en México 2009-2014”. *Emprendedores*, 153, 55–59.
- Mungaray, A.; Osuna, J.G.; Ramírez, M.; Ramírez, N. y Escamilla, A. (2015): “Emprendimiento de micro y pequeñas empresas mexicanas en un escenario local de crisis económica: El caso de Baja California, 2008-2011”. *Frontera Norte*, 27(53), 115–146.

- Perlman, M. (1992): “Harvey Leibenstein”. En W. Samuels (ed.): *New Horizons in Economic Thought*. Londres: Edward Elgar, pp. 184–201.
- Pérez, J.V. (2003): *Modelo SURE. Funciones Traslog de costes. Apuntes/Prácticas Curso 2002/2003*. Las Palmas: Universidad de las Palmas de Gran Canarias. Recuperado de: https://www2.ulpgc.es/hege/almacen/download/5/5839/Practica_8_Modelos_SURE_Funciones_traslog.pdf.
- Rasmussen, S. (2011): *Production Economics: The Basic Theory of Production Optimisation*. Berlín: Springer–Verlag.
- Ramírez, N.; Mungaray, A.; Ramírez, M. y Taxis, M. (2010): “Economías de escala y rendimientos crecientes: Una aplicación en microempresas mexicanas”. *Economía Mexicana, Nueva Época*, 19(2), 213–230.
- Ruíz-Durán, C. (1995): *Economía de la Pequeña Empresa*. México, D.F: Ariel.
- Sánchez, G. (2007): *Perspectivas de las micro y pequeñas empresas como factores del desarrollo económico de México*. Recuperado de: <http://www.economia.unam.mx/profesor/barajas/perspec.pdf>.
- Skinner, R.C. (1970): “The Determination of Selling Prices”. *Journal of Industrial Economics*, 52(5), 423–433.
- Soloman, M.B. (2015): *Investment Decisions in Small Business*. Lexington: University of Kentucky Press.
- Suárez, A.J. (2012): *Función de elasticidad de sustitución constante en el contexto de la teoría de la producción y los costos*. Recuperado de: <http://alijaviersuarez.files.wordpress.com/2012/10/funcic3b3n-de-elasticidad-de-sustitucic3b3n-constante.pdf>
- Tirole, J. (1990): *La Teoría de la Organización Industrial*. Barcelona: Ariel.
- Williamson, O.E. (1964): *The Economics of Discretionary Behaviour, Managerial Objectives in a Theory of the Firm*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Yuhn, K. (1991): “Economic Growth, Technical Change Biases, and the Elasticity of Substitution: A Test of the de La Grandville Hypothesis”. *Review of Economics and Statistics*, 73(2), 340–346.
- Yunus, M. (2010): *Building Social Business: The New Kind of Capitalism that Serves Humanity's Most Pressing Needs*. New York: Public Affairs.



Plan maestro de producción basado en programación lineal entera para una empresa de productos químicos

REYES ZOTELO, YUNUEM

Sección de Estudios de Posgrado e Investigación
Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y
Administrativas, Instituto Politécnico Nacional (México)
Correo electrónico: yreyesz1400@alumno.ipn.mx

MULA, JOSEFA

Centro de Investigación en Gestión e Ingeniería de Producción
Universitat Politècnica de València (España)
Correo electrónico: fmula@cigip.upv.es

DÍAZ-MADROÑERO, MANUEL

Centro de Investigación en Gestión e Ingeniería de Producción
Universitat Politècnica de València (España)
Correo electrónico: fcodiama@cigip.upv.es

GUTIÉRREZ GONZÁLEZ, EDUARDO

Sección de Estudios de Posgrado e Investigación
Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y
Administrativas, Instituto Politécnico Nacional (México)
Correo-e: egutierrezg@ipn.mx

RESUMEN

En este trabajo se propone un modelo de programación lineal entera para planificar la producción de un conjunto de artículos finales con demanda independiente. El modelo para la planificación maestra de producción (PMP) está diseñado considerando los costes de producción e inventario, así como las restricciones definidas por el mismo proceso productivo en cuanto a instalaciones y tiempos de producción. El objetivo del modelo propuesto es la minimización de los costes implicados; concretamente, el tiempo ocioso y extra de los recursos, así como la consideración de un nivel mínimo de servicio ligado a la demanda diferida. La validación del modelo considera datos pertenecientes a la demanda de cada producto en un horizonte de 12 semanas y compara cinco escenarios en los que se modifican algunos aspectos del sistema y diferentes niveles de servicio. Por último, los resultados obtenidos para cada uno de los escenarios exponen la mejora obtenida por el modelo propuesto respecto al procedimiento actual en la empresa objeto de estudio.

Palabras claves: planificación de la producción; plan maestro de producción (PMP); programación lineal entera; industria química.

Clasificación JEL: C61; L00.

MSC2010: 90C11; 90C90.

Artículo recibido el 13 de septiembre de 2016 y aceptado el 13 de enero de 2017.

Master Production Scheduling Based on Integer Linear Programming for a Chemical Company

ABSTRACT

In this work, we propose an integer linear programming model for production scheduling of a group of finished products with independent demand. The model for the master production scheduling (MPS) is designed by considering production and inventory costs, as well as the productive process constraints regarding installations and production times. The aim of the proposed model is the minimization of the costs involved; specifically, undertime and overtime costs of resources, as well as the consideration of a minimum service level related to the deferred demand. The validation of the model considers data belonging to the demand of each product in a 12-week planning horizon and compares five scenarios in which some characteristics of the system and different service levels are modified. Finally, the results obtained for each one of the scenarios expose the improvement obtained by the proposed model with regard to the current procedure in the studied company.

Keywords: production planning; master production scheduling (MPS); integer linear programming; chemical industry.

JEL classification: C61; L00.

MSC2010: 90C11; 90C90.



1. Introducción

La planificación de la producción es un proceso continuo y complejo que consiste en determinar anticipadamente decisiones que permitan optimizar el uso de los recursos productivos. Si se conoce a intervalos regulares de tiempo la cantidad de producción que será demandada, es posible desarrollar programas para la producción, distribución del trabajo y compra de materiales, logrando que la compañía alcance el rendimiento pleno, sin que sea necesario el almacenamiento de grandes *stocks* por un tiempo excesivo, economizando el capital e interés de la empresa (Boiteux *et al.*, 2007).

La planificación de la producción en la industria química suele ser compleja a consecuencia de las características propias de sus procesos. En esta industria, la mayoría de los procesos son operados en instalaciones versátiles, con agrupación de lotes para procesos idénticos y la planificación debe hacerse como una elección entre estos recursos. Cabe destacar el trabajo de los siguientes autores al respecto: Hax y Meal (1975), Grunow *et al.* (2002), Till *et al.* (2007), Brandenburg y Tölle (2009) y Moniz *et al.* (2014). Brandenburg y Tölle (2009), por ejemplo, describen un método de optimización multicriterio para incluir estas características en un modelo de planificación, basado en un modelo de programación lineal entera mixta. Grunow *et al.* (2002), por su parte, introducen el concepto de planificación por campañas que considera la producción por lotes en instalaciones multipropósito, con amplios tiempos de arranque, en procesos secuenciales.

El objetivo de este trabajo es proponer un modelo para la planificación de la producción en una empresa de la industria química mexicana dedicada a la fabricación y envasado de productos de limpieza y cuidado personal, la cual, por su número de empleados, pertenece al grupo de la pequeña y mediana empresa (PYME). Durante el desarrollo del trabajo se hace énfasis en el concepto de plan maestro de producción (PMP), destacando algunos de los métodos y modelos más utilizados, específicamente, para la industria química. Se describe, además, la importancia de los inventarios, y un análisis de los costes implicados en el modelo de planificación, incluyendo además el concepto de nivel de servicio. Por último, se valida el modelo propuesto con datos reales de la empresa objeto de estudio y comparando diferentes escenarios posibles. Las contribuciones principales de este trabajo son: (1) introducir un modelo de programación lineal entera mixta para la planificación de producción multiproducto y multiperiodo en una empresa química dedicada a la fabricación en lotes; (2) desarrollar un modelo flexible que sirva como apoyo para la toma de decisiones en la empresa del caso de estudio u otras del mismo ramo; y (3) aplicar el modelo propuesto para determinar la producción periódica de los productos seleccionados, considerando restricciones del sistema y un nivel de servicio específico definido por la demanda diferida permitida.

El artículo se estructura de la siguiente forma. En la Sección 2, se presenta una revisión de la literatura relacionada con la planificación de producción en la industria química y la elaboración de un PMP con modelos de programación lineal entera. Posteriormente, en la Sección 3, se describe el problema de planificación de la

producción en la empresa objeto de estudio. En la Sección 4, se describe la metodología de trabajo y la aplicación de los diferentes enfoques para la planificación revisados en la Sección 2. En la Sección 5, se propone el modelo PMP utilizando programación lineal entera. Seguidamente, en la Sección 6, se evalúan los resultados obtenidos por los diferentes escenarios, derivados de la modificación de algunas características del sistema, lo cual es posible debido a la flexibilidad del modelo. Finalmente, se presentan las conclusiones y las líneas futuras de investigación en la Sección 7.

2. Revisión de la literatura

De manera jerárquica, la planificación de producción abarca desde las instalaciones de producción, incluyendo estrategias de localización de plantas y sus capacidades, métodos de pronósticos, hasta llegar al nivel de planta donde los temas incluyen planificación táctica y operativa, planificación de materiales y gestión de inventarios.

Diversos autores han abordado el estudio de la planificación de la producción, empleando diferentes enfoques; como, por ejemplo, Hax y Meal (1975), Mula *et al.* (2006b), Portela (2007), Osorio y Motoa (2008) y Díaz-Madroñero *et al.* (2014), entre otros. Por ejemplo, Mula *et al.* (2006b) recopilan información de diferentes modelos utilizados para la planificación de producción en entornos de incertidumbre, entre los que destacan: conceptuales, aquellos basados en inteligencia artificial, analíticos y de simulación. Entre los modelos analíticos, se incluyen los de programación matemática (lineal, lineal entera mixta, no lineal, dinámica y multiobjetivo) para resolver problemas de planificación jerárquica, de planificación de necesidades de materiales (MRP), de planificación de capacidad y recursos, de gestión de inventarios y de cadena de suministro. Por otro lado, Díaz-Madroñero *et al.* (2014) indican que el área de planificación de la producción más popular es el PMP con periodos de tiempo amplios en el que se consideran, en mayor instancia, los recursos limitados de producción que la capacidad de inventario, destacando la aplicación de modelos lineales, enteros y de programación lineal entera mixta resueltos con algoritmos exactos en *solvers* comerciales, así como el uso de CPLEX, C o Lindo/Lingo como herramientas más populares entre *solvers*, lenguajes de programación y modelado, respectivamente. Sin embargo, se destaca que aún existe solo un pequeño número de trabajos en el que los modelos fueron validados con información real de compañías industriales, lo cual representa una de las aportaciones de este artículo.

La literatura acerca de los modelos analíticos utilizados para el desarrollo de un PMP mono-objetivo es amplia. Lasdon y Terjung (1971) proponen un modelo de programación multiproducto con restricciones de capacidad, en el que existe un límite inferior en la optimización de costes, además de considerar el problema de tamaño de lotes, costes de puesta en marcha, inventario y escasez. Mangiameli (1979) incluye el concepto de desagregación de un plan agregado para la formulación de un PMP utilizando un modelo de programación lineal entera mixta. Venkataraman y Nathan (1994), por otro lado, proponen la aplicación de un PMP multiobjetivo con horizonte rodante y demanda determinista bajo un sistema de múltiples líneas de producción,

considerando restricciones para la producción mínima de acuerdo a un tamaño de lote para la industria dedicada a la fabricación de pinturas.

En la industria química específicamente, la planificación de producción es compleja a consecuencia de la naturaleza de los procesos y la versatilidad de sus instalaciones, donde muchas veces existe agrupación de maquinaria para procesos idénticos, secuenciación, y restricciones respecto al tamaño de lote para la fabricación. Esta problemática la abordan de manera genérica Dzielinski y Gomory (1965) utilizando un modelo de programación lineal entera mixta resuelto con FORTRAN, mientras que Brandenburg y Tölle (2009) describen un método de optimización multicriterio con estas mismas características.

De manera más específica, Grunow *et al.* (2002) realizan una planificación en la cual existe un número determinado de lotes del mismo tipo procesados en secuencia. El modelo toma en cuenta la disponibilidad del equipo, haciendo un balance de inventario de productos intermedios y de productos terminados, el cual podría ser aplicado a una amplia variedad de procesos por lotes en la industria química. En cuanto a problemas de tamaño de lote, destacan aquellos relacionados con el dimensionamiento dinámico con restricciones de capacidad al mismo tiempo que se consideran los tiempos de cambio de partida, la secuenciación y el uso de maquinaria en paralelo (Quadt y Kuhn, 2008; Buschkühl *et al.*, 2010).

Siguiendo el enfoque de jerarquización de la planificación de la producción, existen numerosos trabajos que abordan el requerimiento de materiales en base al PMP o que lo desarrollan al mismo tiempo. Mula *et al.* (2006a) proponen un modelo de programación lineal para la planificación de producción a medio plazo en un contexto de MRP con capacidad limitada, multiproducto, multinivel y multiperiodo. Este modelo es transformado en tres modelos difusos con flexibilidad en la función objetivo, en la demanda del mercado y la capacidad disponible de recursos, en el contexto de la industria del automóvil. Siguiendo esta línea, Mula *et al.* (2014) diseñan un modelo de programación lineal entera para la sincronización de una cadena de suministro multietapa en base a los tiempos de espera, con la finalidad de reducir el efecto látigo.

Así pues, puede destacarse la necesidad de crear un modelo PMP mononivel al tratarse únicamente de productos terminados, que en un ambiente multiproducto permita a la empresa caso de estudio tomar decisiones respecto a su producción, a un mínimo coste, considerando la naturaleza de sus procesos y cuya información sea de utilidad para el diseño posterior de un MRP.

3. Descripción del problema

El escenario actual de la industria química para las PYME en México, específicamente para aquellas dedicadas a la fabricación de productos de limpieza y cuidado personal, tiene muy en cuenta la innovación y mejora continua de productos y procesos, la reducción de costes, la mejora en el nivel de servicio y la confiabilidad en sus sistemas de producción e inventarios como objetivos empresariales.

Actualmente, el sistema reactivo de producción en la empresa objeto de estudio está basado en cubrir los límites de inventario preestablecidos de forma empírica como mínimos y máximos; estos niveles establecen, además, el espacio en almacén para cada producto. A través de un informe de existencias generado por el sistema ERP, se observa que, cuando las reservas son iguales o menores al mínimo, se genera una orden de producción por la cantidad necesaria para alcanzar el nivel máximo. Esto ha generado un conflicto, principalmente, respecto a la optimización de los recursos y el nivel de servicio, al realizar pedidos por lotes incompletos, rebasar por mucho el espacio de almacén o desabastecerse de un momento a otro.

Esta situación también ha generado conflictos internos, entre los que destacan la desconfianza de los trabajadores, dados los cambios súbitos en la planificación diaria para cubrir el desabastecimiento de productos, situación que implica en algunos casos el pago de tiempo extra; y, por otro lado, la incertidumbre a la que se enfrenta el área de compras al no contar con información confiable en la cual basar sus negociaciones de compra de materia prima con los proveedores.

4. Metodología de trabajo

Para el diseño del modelo propuesto, se tomaron como base diferentes trabajos descritos en la literatura, específicamente aquellos relacionados con la programación lineal entera, MRP, PMP y cadena de suministro; adecuándolo a un modelo mononivel con demanda discreta (Mula *et al.*, 2006a, 2006b; Mula *et al.*, 2014; Venkataraman y Nathan, 1994). En Mula *et al.* (2006a, 2006b), los autores proponen un modelo de programación lineal a medio plazo con restricciones de capacidad en un entorno multiproducto, multiperiodo y multinivel para determinar el PMP y, con ello, los niveles de inventario, la demanda diferida y los niveles de capacidad utilizada en un horizonte específico de planificación. Estos objetivos son compartidos con el modelo propuesto, sin considerar la información referente a las materias primas, que es tomada en cuenta para la formulación del MRP, pero que no aplican en este trabajo; por lo que únicamente se consideran conceptos como la minimización de costes por tiempo ocioso, tiempo extra y los relacionados con la producción, el almacenamiento y la demanda diferida de los artículos. Del modelo de Mula *et al.* (2014) se rescata la sincronización de la información de la demanda a través de las múltiples etapas de la cadena de suministro, concretamente en cuanto a los límites de inventario de cada una de ellas. El modelo considera niveles iniciales de inventario, *stock* de seguridad y tamaños de lotes predeterminados, introduciendo además la política de demanda diferida nula. Por su parte, Venkataraman y Nathan (1994), a través del desarrollo de un PMP multiobjetivo utilizando un horizonte rodante en un entorno de demanda determinista y múltiples líneas de producción para una industria química dedicada a la fabricación de pinturas, aporta al modelo propuesto el concepto de “tamaño de lote mínimo”, holgura respecto a los niveles de producción e inventario en comparación a un nivel deseado, exceso de inventario, tiempo ocioso y tiempo extra.

En este contexto, la elaboración de un PMP especificará las cantidades de producción de artículos finales para periodos de tiempo específicos en un horizonte de

planificación (Venkataraman y Nathan, 1994). La propuesta presentada está diseñada en base a la demanda en el almacén de producto terminado, que funciona a su vez como centro de distribución, y está limitada por los recursos y tiempos implicados para la producción. Los resultados del modelo brindarán información valiosa para el requerimiento de materiales y la programación detallada, con la posibilidad de ampliarse para considerar tiempos de entrega al consumidor final en tienda (véase Figura 1).

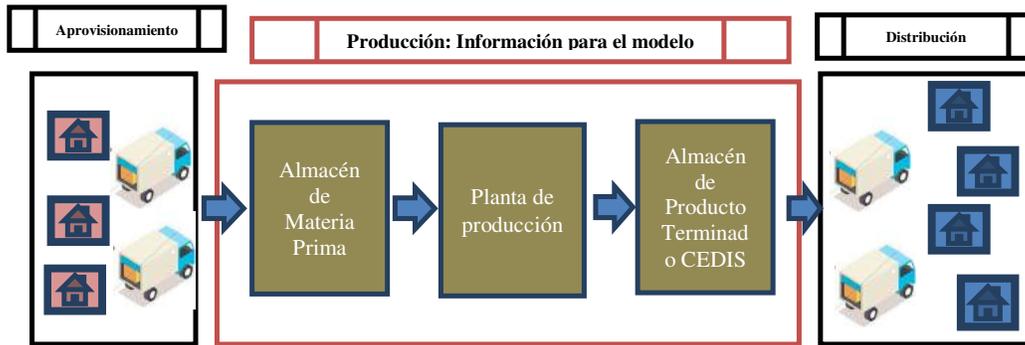


Figura 1. Cadena de suministro considerada.

Para realizar el modelo, se requirió información del proceso, los productos y los recursos implicados. Por tanto, el modelo se define así:

Dados:

- Datos de productos: demanda, tiempo de espera para la entrega, tamaño de lote de pedido, tanque utilizado, demanda diferida inicial, inventario inicial, inventario mínimo y máximo permitido en almacén, coste de producción, inventario y demanda diferida por periodo.
- Datos de los recursos productivos: tiempo requerido del recurso para la producción, capacidad disponible, coste del tiempo extra y ocioso de cada recurso.
- Datos para la planificación: número de periodos temporales en el horizonte de planificación.

Determinar:

- La cantidad a producir y el número de lotes de cada producto.
- Inventario del producto al final de cada periodo.
- Demanda diferida por producto.
- Desviación con respecto al mínimo y máximo establecido en almacén.
- Tiempo ocioso y extra en cada recurso por periodo.

Para cumplir los objetivos principales:

- Minimizar los costes de producción, inventario y demanda diferida.
- Minimizar el tiempo ocioso y extra de cada recurso productivo.

- Minimizar la desviación con respecto a los límites establecidos en inventario.

Asumiendo que:

- Solo se puede realizar la fabricación de lotes completos.
- El coste por demanda diferida es significativamente alto.
- Se elaborarán modificaciones al modelo según el nivel de servicio requerido por la empresa para los productos seleccionados.

5. Formulación y resolución del modelo

A fin de mejorar el sistema de planificación actual utilizando un fundamento teórico, se diseña un modelo de programación lineal entera que busca definir la producción semanal para el conjunto de productos seleccionados considerando sus restricciones de capacidad de producción y almacenamiento. El objetivo de este modelo se centra en la minimización de costes y tiempo extra y ocioso, así como evitar la desviación de los niveles preestablecidos como máximos y mínimos en almacén. Se asume que los retrasos no afectan al precio de venta y se impone que el retraso al final del horizonte es 0, por lo que los ingresos se consideran constantes. La nomenclatura empleada en el modelo propuesto, compuesta por índices, parámetros y variables de decisión, se detalla en la Tabla 1.

Tabla 1. Nomenclatura del modelo propuesto

Índices		
I	Número de productos ($i=1, 2, \dots, I$)	
T	Periodos de tiempo en el horizonte de planificación ($t=1, 2, \dots, T$)	
R	Número de recursos ($r=1, 2, \dots, R$)	
Parámetros		Dimensiones
d_{it}	Demanda del mercado del producto i en el periodo t	Unidades de producto
TS_i	Tiempo de espera para la entrega del producto i desde el área de producción hasta el almacén de producto terminado	Semanas
$InvMin_i$	Nivel mínimo de inventario para el producto i	Unidades de producto
$InvMax_i$	Nivel máximo de inventario para el producto i	Unidades de producto
lot_i	Tamaño de lote para la producción de i	Unidades de producto
ns_{it}	Proporción de demanda del producto i en el periodo t que debe ser satisfecha en el mismo período	Porcentaje
Coeficientes para la función objetivo		
cp_i	Coste de producción por unidad del producto i	MX(\$ peso mexicano
ci_{it}	Coste de inventario por unidad del producto i en el periodo t	MX(\$ peso mexicano
crd_{it}	Coste de demanda diferida por unidad del producto i en el periodo t	MX(\$ peso mexicano
$ctoc_r$	Coste del tiempo ocioso del recurso r	MX(\$ peso mexicano
$ctex_i$	Coste del tiempo extra del recurso r	MX(\$ peso mexicano
$cimnl_i$	Coste de desviación del inventario mínimo objetivo por producto i	MX(\$ peso mexicano
$cimxh_i$	Coste de desviación del inventario máximo objetivo por producto i	MX(\$ peso mexicano
Coeficientes tecnológicos		
AR_{ir}	Tiempo requerido del recurso r para la producción de una unidad del producto i	Semanas/unidades de producto
CAP_{rt}	Capacidad disponible del recurso r en el periodo t	Semanas
Variables de decisión		
INV_{it}	Inventario del producto i al final del periodo t	Unidades de producto
Rd_{it}	Demanda diferida del producto i al final del periodo t	Unidades de producto
k_{it}	Número de lotes a producir del producto i en el periodo t	Unidades de lotes
P_{it}	Cantidad a producir del producto i en el periodo t sin tomar en cuenta la multiplicidad del tamaño de lote	Unidades de producto
$Imnl_{it}$	Inventario inferior al nivel objetivo mínimo para el producto i en el periodo t	Unidades de producto
$Imxh_{it}$	Inventario superior al nivel objetivo máximo para el producto i en el periodo t	Unidades de producto
Toc_{rt}	Tiempo ocioso del recurso r en el periodo t	Semanas
Tex_{rt}	Tiempo extra del recurso r en el periodo t	Semanas

La formulación del modelo de programación lineal entera es la siguiente:

Función objetivo:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T (cp_i + ci_{it}INV_{it} + crd_{it}Rd_{it}) \\
 & + \sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^T (ctoc_rToc_{rt} + ctext_rTex_{rt}) \\
 & + \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T (cimnl_iImnl_{it} + cimxh_iImxh_{it})
 \end{aligned} \tag{1}$$

Restricciones:

a) Balance de inventario:

$$INV_{it} = INV_{i,t-1} + k_{i,t-TS_i}lot_i - d_{it} - Rd_{i,t-1} + Rd_{it} \quad \forall i, t \tag{2}$$

$$Imnl_{it} \geq InvMin_i - INV_{it} \quad \forall i, t \tag{3}$$

$$Imxh_{it} \geq INV_{it} - InvMax_i \quad \forall i, t \tag{4}$$

$$Rd_{iT} = 0 \quad \forall i \tag{5}$$

b) Balance de capacidad:

$$\sum_{i=1}^I AR_{ir}k_{it}lot_i + Toc_{rt} - Tex_{rt} = CAP_{rt} \quad \forall r, t \tag{6}$$

c) No negatividad:

$$INV_{it}, k_{it}, Imnl_{it}, Imxh_{it} \geq 0 \tag{7}$$

d) Variables enteras:

$$k_{it}, INV_{it}, Rd_{it}, Imnl_{it}, Imxh_{it} \in \mathbb{Z} \tag{8}$$

En cuanto a las restricciones por balance de inventario, la ecuación (2) se define en base a las entradas y salidas del almacén, mientras que las restantes, (3) y (4), tienen como objetivo el cumplir con los parámetros preestablecidos por la empresa como los límites máximos y mínimos que obedecen por un lado a la capacidad del almacén y, por otro, a un nivel de servicio calculado de forma empírica. Por su parte, la ecuación (5) evita la demanda diferida en el último período del horizonte de planificación considerado. La ecuación (6) establece la capacidad de los recursos productivos o tanques de proceso, considerando el tiempo de elaboración de los productos en lotes completos y los tiempos extra y ociosos en caso que existan. En el caso de la empresa química objeto de la aplicación de este trabajo, el coste del tiempo ocioso existe por desviarse de una producción continua a pesar de que el recurso esté en condiciones de

ser utilizado. Las ecuaciones (7) y (8) establecen que, dadas las características del problema, las variables de decisión deberán ser enteras y positivas.

Adicionalmente, en caso de realizar modificaciones a la política de demanda diferida nula, se incluiría la ecuación (9) para establecer un nivel de servicio, de forma que la decisión sea tomada de acuerdo a la demanda diferida permitida y costes implicados; es decir, que la cantidad disponible para satisfacer la demanda d_{it} sea al menos la proporción deseada ns_{it} .

$$INV_{i,t-1} + k_{i,t-TS_i} lot_i - Rd_{i,t-1} \geq ns_{it} d_{it} \quad (9)$$

Para el proceso de resolución, se propone un procedimiento flexible a fin de que la empresa pueda comparar las implicaciones de costes generadas por las decisiones y modificaciones consideradas para la gestión de inventarios y producción, y así el decisor pueda realizar ajustes a las variables señaladas y encontrar así una solución satisfactoria. El procedimiento de solución se compone de las siguientes fases:

1. Recolección y tratamiento de datos.
2. Formulación del modelo.
3. Adaptación del modelo original considerando diferentes escenarios obtenidos mediante la modificación de las políticas de producción y demanda diferida.
4. Resolver el modelo mediante el uso del *solver* Gurobi de MPL.
5. Comparar costes y realizar un análisis de las variables: tiempo ocioso y extra, costes implicados y desviación de los límites impuestos.

El modelo ha sido implementado utilizando un lenguaje de alto nivel para modelos de programación matemática, MPL V5.0; el cual fue alimentado a través de la base de datos relacional de Microsoft Access para, posteriormente, ser resuelto por el *solver* Gurobi 6.0, cuya solución es, finalmente, importada en la base de datos.

5.1 Descripción de los escenarios

Con la finalidad de analizar el desempeño del modelo propuesto, se propone comparar cinco escenarios diferentes en los que se modifican algunos aspectos del sistema de producción, como los límites de capacidad de inventario y los tiempos de entrega de producto, así como los diferentes niveles de servicio. Esto permitirá analizar el impacto económico de estas variables y brindará opciones al gestor de producción para que esta se realice de forma eficiente.

Escenario 1: lotes fijos y niveles de inventario mínimo y máximo flexibles, sin demanda diferida.

En este primer escenario se considera que la producción deberá realizarse, obligatoriamente, en lotes completos y que los niveles mínimos y máximos

preestablecidos para el inventario, de acuerdo a la capacidad del almacén, pueden desviarse del valor establecido, pero esta desviación será minimizada por la función objetivo. En este caso, la formulación del modelo a utilizar es la misma que la del modelo inicial, expresado en las ecuaciones (1) a (8).

Pueden destacarse cuatro casos en este escenario en función de dos aspectos: la desviación del límite de inventario y el tiempo de entrega. En el primer caso, es posible minimizar esta desviación en base al coste o a unidades de producto, mientras que el tiempo de entrega puede considerarse como cero, o tan largo que deba tomarse como 1. En los casos B1 y C1, el coste por unidad inferior al valor mínimo del inventario será el coste por demanda diferida, mientras que el de desviación del máximo del inventario será el coste de inventario.

Tabla 2. Casos destacados del escenario 1

	Desviación del límite de inventario con base en:		Tiempos de entrega de producto	
	Número	Coste	= 0	> 0
A1	•		•	
B1		•	•	
C1		•		•
D1	•			•

Escenario 2: lotes fijos sin niveles de inventario mínimo y máximo, sin demanda diferida.

En este caso, se considera que la producción deberá realizarse, obligatoriamente, en lotes completos, pero no existe una capacidad limitada en el almacén para los productos; por lo que sus existencias dependerán, únicamente, de los costes implicados. Aquí, destaca el caso específico en el que los tiempos de entrega sean mayores a cero. La formulación del modelo se vería modificada respecto al modelo inicial formulado de la siguiente forma:

Función objetivo:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } & \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T (cp_i k_{it} lot_i + ci_{it} INV_{it} + crd_{it} Rd_{it}) \\
 & + \sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^T (ctoc_r Toc_{rt} + ctext_r Tex_{rt})
 \end{aligned} \tag{10}$$

Restricciones:

- a) Balance de inventario:
Ecuaciones (2) y (5).
- b) Balance de capacidad:
Ecuación (6).

c) No negatividad:

$$INV_{it}, k_{it} \geq 0 \quad (11)$$

d) Variables enteras:

$$k_{it}, INV_{it}, Rd_{it} \in Z \quad (12)$$

Tabla 3. Casos destacados del escenario 2

	Tiempos de entrega de producto	
	= 0	> 0
A2	•	
B2		•

Escenario 3: niveles de inventario mínimo y máximo flexibles sin lotes fijos, sin demanda diferida.

En este escenario se considera que la producción se podrá realizar en lotes incompletos y los niveles de inventario podrán tener una desviación respecto a lo establecido, pero estará limitada por la función objetivo. Al igual que el escenario 1, destacan 4 casos. La formulación del modelo se vería modificada respecto al modelo inicial formulado de la siguiente forma:

Función objetivo:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T (cp_i P_{it} + ci_{it} INV_{it} + crd_{it} Rd_{it}) \\
 & + \sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^T (ctoc_r Toc_{rt} + ctext_r Tex_{rt}) \\
 & + \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T (cimnl_i Imnl_{it} + cimxh_i Imxh_{it})
 \end{aligned} \quad (13)$$

Restricciones:

a) Balance de inventario:

$$INV_{it} = INV_{i,t-1} + P_{i,t-TS_i} - d_{it} - Rd_{i,t-1} + Rd_{it} \quad \forall i, t \quad (14)$$

Ecuaciones (3) a (5).

b) Balance de capacidad:

$$\sum_{i=1}^I AR_{ir} P_{it} + Toc_{rt} - Tex_{rt} = CAP_{rt} \quad i, \forall r, \forall t \quad (15)$$

c) No negatividad:

$$INV_{it}, P_{it}, Imnl_{it}, Imxh_{it} \geq 0 \quad (16)$$

d) Variables enteras:

$$INV, Rd_{it}, Imnl_{it}, Imxh_{it} \in Z \quad (17)$$

donde P_{it} corresponde a la cantidad a producir del producto i en el periodo t sin tener en cuenta la multiplicidad de tamaño de lote.

Tabla 4. Casos destacados del escenario 3

	Desviación del límite de inventario con base en:		Tiempos de entrega de producto	
	Número	Coste	= 0	> 0
A3	•		•	
B3		•	•	
C3		•		•
D3	•			•

Escenario 4: sin lotes fijos ni niveles de inventario mínimo y máximo, sin demanda diferida

En este caso, se considera que se puede producir exactamente lo requerido por la demanda o inventariar sin las restricciones de lotes o almacenamiento. Aquí, como en el escenario 2, destaca el caso específico en el que los tiempos de entrega sean mayores a cero. La formulación del modelo se vería modificada respecto al modelo inicial formulado de la siguiente forma:

Función objetivo:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T (cp_i P_{it} + ci_{it} INV_{it} + crd_{it} Rd_{it}) \\ & + \sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^T (ctoc_r Toc_{rt} + ctext_r Tex_{rt}) \end{aligned} \quad (18)$$

Restricciones:

a) Balance de inventario:

Ecuación (14).

b) Balance de capacidad:

Ecuación (15).

c) No negatividad:

Ecuación (16).

d) Variables enteras:

Ecuación (17).

Tabla 5. Casos destacados del escenario 4

	Tiempos de entrega de producto	
	= 0	> 0
A4	•	
B4		•

Escenario 5: lotes fijos y niveles de inventario mínimo y máximo flexibles con un nivel de servicio preestablecido.

En este escenario, a diferencia de la política original de demanda diferida nula, se propone admitir un porcentaje predeterminado de la misma, al mismo tiempo que se produce en lotes completos y se cumplen los límites de capacidad impuestos para el inventario. En este caso, habría que incluir la ecuación (9) al modelo inicial dado por las ecuaciones (1) a (8). Se destacan 7 casos.

Tabla 6. Casos destacados del escenario 5

	Desviación del límite de inventario con base en:		Tiempos de entrega de producto		Proporción de demanda satisfecha
	Número	Coste	= 0	> 0	
A5	•		•		95%
B5		•	•		95%
C5		•		•	95%
D5		•	•		90%
E5		•		•	90%
F5		•	•		79%
G5		•		•	79%

En este escenario, el coste por demanda diferida no se incluye en el modelo ya que, en la práctica, no siempre se cuenta con este dato exacto o su estimación no es sencilla, por lo que se ha preferido ajustar la tasa de demanda diferida de acuerdo a una proporción de demanda satisfecha (Escobar *et al.*, 2012).

6. Aplicación a la empresa caso de estudio

El modelo propuesto ha sido evaluado con los datos de demanda y producción de los productos terminados seleccionados en una PYME mexicana dedicada a la fabricación y el envasado de productos de limpieza y cuidado personal. Asimismo, se realiza una evaluación de los resultados obtenidos para los diferentes escenarios propuestos, empleando diferentes enfoques a partir de los datos asociados al problema descrito. Estos cambios incluirán, principalmente, la variación en la política de lotes completos, la holgura en los límites de inventario y la inclusión de tiempos de entrega mayores o iguales a 0; esto último implica considerar que algunos productos necesitan un envasado especial, o tiempo de reposo, lo cual amplía el tiempo de espera para la entrega del mismo en el almacén de producto terminado.

6.1. Origen, recolección y tratamiento de datos

La información relativa a la demanda de los productos fue recopilada a través de los informes generados por el sistema ERP (*enterprise resource planning* o planificación de recursos empresariales) implementado en la empresa. A partir de ello fue posible

realizar una clasificación de los productos de mayor impacto utilizando el método de matriz de criterios conjuntos (Flores y Whybark, 1986), utilizado para la clasificación ABC multicriterio. Tras realizar dicha clasificación de los productos más significativos para la empresa en cuanto a importancia económica e incidencia de faltantes, fue posible seleccionar 48 de ellos, utilizando la regla 80-20. Se observó que, a pesar de que la empresa maneja una política de demanda diferida nula, el nivel de servicio era en promedio del 75%, lo que implica altos costes de tiempo extra para poder cumplir esta política.

La información fue complementada con las características de producción de los mismos, principalmente, aquellos referentes a la maquinaria utilizada, los tiempos de producción, los tiempos de espera y la capacidad de producción en planta; así como la referente al inventario, como el *stock* de seguridad y la capacidad máxima de almacén, sin olvidar los costes implicados.

El *stock* de seguridad fue propuesto en base a un estudio de distribución probabilista de la demanda, mediante el ajuste de curva a una distribución conocida y el cálculo correspondiente de sus parámetros (Ul Hassan y Stockhammar, 2016) y, de esta forma, sustentar de forma teórica los límites impuestos por la empresa en el almacén de producto terminado, ajustando al percentil 60 el *stock* de seguridad y al percentil 95 el límite máximo, considerando este último como la capacidad máxima destinada para el producto en el almacén. Estos, junto con los costes implicados, completan la información que alimenta al modelo y que se encuentran para cada producto o recurso, según corresponda, en la base de datos creada en Microsoft Access.

6.2. Discusión de los resultados

La Tabla 7 muestra los resultados de la optimización para una política de demanda diferida nula. Cabe destacar que, aunque se incluye el valor de la función objeto y el coste total como un referente para los lectores, dichos valores no son comparables de unos casos a otros puesto que no todos los escenarios tienen los mismos elementos. Tomando como base el caso A para cada escenario, para la variable tiempo de espera, se observa que cuando este valor es cercano a una semana, existe una reducción en los costes de producción y tiempo extra en comparación con una producción continua, donde el proceso depende únicamente de los tiempos de producción y traslado, por lo es considerado como 0. Es importante señalar, además, que el incremento en el coste de inventario y tiempo ocioso está relacionado también con esta variable.

Es posible asegurar también, que la restricción que sugiere la producción por lotes completos es la que encarece el sistema productivo, ya que al comparar los costes implicados entre el escenario 1-2 y 3-4, la diferencia de coste es en promedio 36% menor.

Tabla 7. Resultados de la optimización para los escenarios propuestos en una política de demanda diferida nula

100% nivel de servicio					
		ESCENARIO 1			
		<i>Lotes fijos y niveles de inventario mínimo y máximo flexibles</i>			
		A1	B1	C1	D1
Valor objetivo	z=	22.240.226,44	27.605.231,91	24.938.055,97	20.027.610,38
Coste total		<i>MXN\$ 22.207.863,45</i>	<i>MX\$ 27.605.231,91</i>	<i>MXN\$ 24.938.055,96</i>	<i>MXN\$ 20.004.18,,38</i>
Coste de producción	cpt=	MXN\$ 16.391.333,70	+ 3,19%	- 3,24%	- 6,73%
Coste de inventario	cit=	MXN\$ 5.791.608,00	+ 23,67%	+ 8,71%	- 18,96%
Coste de demanda diferida	crdt=	MXN\$ 0,00	0%	0%	0%
Coste por tiempo ocioso	ctoct=	MXN\$ 954,02	- 34,66%	- 1,47%	+ 20,99%
Coste por tiempo extra	ctext=	MXN\$ 23.967,73	- 1,56%	- 4,98%	- 9,91%
Inventario < mínimo	itnl=	4.972	N/A	N/A	- 0,70%
Inventario > máximo	itxh=	27.391	N/A	N/A	- 32,49%
		ESCENARIO 3			
		<i>Niveles de inventario mínimo y máximo flexibles sin lotes fijos</i>			
		A3	B3	C3	D3
Valor objetivo	z=	13.839.014,34	17.127.941,35	16.121.144,31	13.025.384,87
Coste total		<i>MXN\$ 13.818.331,34</i>	<i>MXN\$ 17.127.941,35</i>	<i>MXN\$ 16.121.144,31</i>	<i>MXN\$ 13.006.357,87</i>
Coste de producción:	cpt=	MXN\$ 13.777.618,44	+ 6,04%	- 1,26%	- 7,30%
Coste de inventario	cit=	MXN\$ 22.845,00	+ 10838,52%	+ 10838,52%	+ 852,83%
Coste de demanda diferida	crdt=	MXN\$ 0,00	0%	0%	0%
Coste por tiempo ocioso.	ctoct=	MXN\$ 562,63	- 51,31%	+ 21,40%	+ 72,23%
Coste por tiempo extra	ctext=	MXN\$ 17.305,27	+ 7,21%	- 0,61%	- 7,84%
Inventario < mínimo	itnl=	20.683	N/A	N/A	- 8,01%
Inventario > máximo	itxh=	0	N/A	N/A	+ 100,00%
		ESCENARIO 2		ESCENARIO 4	
		<i>Lotes fijos sin límites en inventario</i>		<i>Sin lotes fijos ni límites de inventario</i>	
		A2	B2	A4	B4
Valor objetivo	z=	21.801.601,19	- 8,15%	13.818.331,34	- 5,88%
Coste total		<i>MXN\$ 21.801.601,19</i>	- 8,15%	<i>MXN\$ 13.818.331,35</i>	- 5,88%
Coste de producción	cpt=	MXN\$ 16.457.904,06	- 7,56%	MXN\$ 13.777.618,44	- 7,30%
Coste de inventario	cit=	MXN\$ 5.319.108,00	- 9,97%	MXN\$ 22.845,00	+ 852,83%
Coste de demanda diferida	crdt=	MXN\$ 0,00	0%	0%	0%
Coste por tiempo ocioso	ctoct=	MXN\$ 1.007,91	+ 15,78%	MXN\$ 562,64	+ 72,23%
Coste por tiempo extra	ctext=	MXN\$ 23.581,22	- 7,48%	MXN\$ 17.305,27	- 7,84%
Inventario < mínimo	itnl=	-	-	-	-
Inventario > máximo	itxh=	-	-	-	-

Uno de los resultados arrojados por el modelo es el tiempo ocioso y extra por recurso (véanse Tablas 8 y 13), lo cual funciona como una herramienta para equilibrar el uso de las instalaciones y evitar cuellos de botella. La Tabla 8 muestra, por ejemplo, el tiempo ocioso y extra para el recurso 4 dedicado a la fabricación de tres productos en el escenario A1. Los elevados tiempos extra en algunos periodos temporales sugieren que debería considerarse la producción utilizando otros recursos, principalmente, durante los períodos 2, 7, y 12.

Tabla 8. Tiempo ocioso y extra para el recurso 4 en el escenario A1

Recurso	Periodo	Tiempo Ocioso	Tiempo Extra
4	1	0	2,74
4	2	0	13,97
4	3	0	2,74
4	4	0	2,74
4	5	0	2,74
4	6	0	4,62
4	7	0	12,10
4	8	0	2,74
4	9	0	4,62
4	10	0	2,74
4	11	0	2,74
4	12	0	12,10

Los productos fabricados en el recurso 4 son el 7, 12 y 34. El modelo brinda al decisor (en el caso del escenario A1) información acerca del número de lotes a producir, las existencias en inventario al final de cada periodo y la holgura respecto a los niveles de almacenamiento (véase Tabla 9). Es importante observar que, para este caso, se observa siempre una demanda diferida nula, considerando que se asignó un valor máximo al coste por demanda diferida, el cual es minimizado.

Tabla 9. Variables a considerar para la planificación de producción según el escenario A1

Producto	Periodos	Lotes	Producción	Inventario	Demanda diferida	< Mínimo	> Máximo
7	1	1	40	16	0	12	0
7	2	2	80	37	0	0	0
7	3	1	40	16	0	12	0
7	4	1	40	17	0	11	0
7	5	1	40	8	0	20	0
7	6	2	80	37	0	0	0
7	7	1	40	21	0	7	0
7	8	1	40	20	0	8	0
7	9	2	80	36	0	0	0
7	10	1	40	33	0	0	0
7	11	1	40	18	0	10	0
7	12	1	40	17	0	11	0
12	1	1	40	39	0	0	0
12	2	0	0	11	0	17	0
12	3	1	40	12	0	16	0
12	4	1	40	25	0	3	0
12	5	1	40	33	0	0	0
12	6	1	40	27	0	1	0
12	7	0	0	7	0	21	0
12	8	1	40	24	0	4	0
12	9	1	40	28	0	0	0
12	10	1	40	29	0	0	0
12	11	1	40	38	0	0	0
12	12	0	0	1	0	27	0
34	1	0	0	11	0	37	0
34	2	1	240	196	0	0	118
34	3	0	0	148	0	0	70
34	4	0	0	114	0	0	36
34	5	0	0	59	0	0	0
34	6	0	0	13	0	35	0
34	7	1	240	220	0	0	142
34	8	0	0	176	0	0	98
34	9	0	0	121	0	0	43
34	10	0	0	77	0	0	0
34	11	0	0	24	0	24	0
34	12	1	240	223	0	0	145

El escenario 5, por su parte, brinda a la empresa la opción de elegir la proporción de demanda que está dispuesta a satisfacer de acuerdo al coste, mientras que la desviación respecto a los niveles de inventario se optimizará en base al coste de las unidades almacenadas. En la Tabla 10 se observan los resultados en costes para la optimización del escenario 5 en los casos señalados en la Tabla 6. Para los escenarios B5, D5 y F5, la única variable que cambia es la proporción satisfecha de demanda teniendo como premisa un tiempo de suministro nulo. Es posible observar que la diferencia en los costes entre un 95 y 90% de proporción satisfecha es mínima, aunque un 8% mayor en cuanto a tiempo ocioso. En cambio, comparando el 95% con el 80%, se observa una reducción de costes, no siendo así para tiempo ocioso y tiempo extra, que aumentan en un 13,7% y un 0,22% en comparación con el primer caso. En estas condiciones, es mucho mejor inclinarse por un 80% en la proporción de demanda satisfecha que por un 90%. Este comportamiento se observa también en los casos donde $TS > 0$, como lo señala la Tabla 11.

Tabla 10. Resultados de la optimización para una política con demanda diferida

Demanda diferida de acuerdo a la proporción que la empresa está dispuesta a satisfacer				
ESCENARIO 5				
<i>Lotes fijos y niveles de inventario mínimo y máximo flexibles</i>				
		A5 (95%)	B5 (95%)	C5 (95%)
Valor objetivo	z=	21.207.417,69	22.460.133,29	23.709.535,00
Coste total		<i>MXN\$ 21.172.285,69</i>	<i>MXN\$ 22.460.133,29</i>	<i>MXN\$ 23.709.535,00</i>
Coste de producción	cpt=	MXN\$ 14.720.551,00	MXN\$ 14.767.613,73	MXN\$ 15.003.386,92
Coste de inventario	cit=	MXN\$ 6.428.883,00	MXN\$ 5.574.411,00	MXN\$ 6.161.961,00
Coste por demanda diferida	crdt=	-	-	-
Coste por tiempo ocioso	ctoc=	MXN\$ 1.688,45	MXN\$ 1.429,72	MXN\$ 1.316,56
Coste por tiempo extra	ctex=	MXN\$ 21.163,24	MXN\$ 20.653,84	MXN\$ 20.695,52
Inventario < mínimo	itnl=	4.027	MXN\$ 0,00	MXN\$ 0,00
Inventario > máximo	itxh=	31.105	MXN\$ 2.096.025,00	MXN\$ 2.522.175,00
		D5 (90%)	E5 (90%)	F5 (80%)
Valor objetivo	z=	22.697.033,15	22.904.506,23	21.917.484,33
Coste total		<i>MXN\$ 22.697.033,15</i>	<i>MXN\$ 22.904.506,23</i>	<i>MXN\$ 21.917.484,33</i>
Coste de producción	cpt=	MXN\$ 14.728.142,42	MXN\$ 14.728.142,42	MXN\$ 146.565.871,35
Coste de inventario	cit=	MXN\$ 5.742.096,00	MXN\$ 5.873.721,00	MXN\$ 5.337.609,00
Coste por demanda diferida	crdt=	-	-	-
Coste por tiempo ocioso	ctoc=	MXN\$ 1.544,01	MXN\$ 1.330,55	MXN\$ 1.625,66
Coste por tiempo extra	ctex=	MXN\$ 20.790,71	MXN\$ 20.577,26	MXN\$ 20.698,31
Inventario < mínimo	itnl=	MXN\$ 0,00	MXN\$ 0,00	MXN\$ 0,00
Inventario > máximo	itxh=	MXN\$ 2.204.460,00	MXN\$ 2.280.735,00	MXN\$ 1.900.680,00
		G5 (80%)		
Valor objetivo	z=	22.968.593,14		
Coste total		<i>MXN\$ 22.968.593,14</i>		
Coste de producción	cpt=	MXN\$ 14.837.831,47		
Coste de inventario	cit=	MXN\$ 5.834.766,00		
Coste por demanda diferida	crdt=	-		
Coste por tiempo ocioso	ctoc=	MXN\$ 1.197,32		
Coste por tiempo extra	ctex=	MXN\$ 20.543,35		
Inventario < mínimo	itnl=	MXN\$ 0,00		
Inventario > máximo	itxh=	MXN\$ 2.274.255,00		

Para este escenario, también se observa naturalmente la demanda diferida para cada periodo temporal y demás variables establecidas igualmente para los escenarios anteriores (véase Tabla 12). De igual manera, será posible obtener información de

tiempos ociosos y tiempos extra para los recursos implicados (véase Tabla 13). A partir del análisis de los resultados, la empresa podrá tomar la mejor decisión en base a sus intereses.

Tabla 11. Desviación de las diferentes proporciones de demanda satisfecha respecto al 95%

		TS=0				TS>0			
		B5 (95%)	D5 (90%)	F5 (80%)	70%	C5 (95%)	E5 (90%)	G5 (80%)	70%
Valor objetivo	z=	22.460.133,29	1,05%	-2,42%	-7,35%	23.709.535,00	3,51%	-3,13%	-6,93%
Coste total		MXN\$ 22.460.133,29	1,05%	-2,42%	-7,35%	MXN\$ 23.709.535,00	3,51%	-3,13%	-6,93%
Coste de producción	cpt=	MXN\$ 14.767.613,73	-0,27%	-0,75%	-2,18%	MX\$ 15.003.386,92	1,87%	-1,10%	-2,02%
Coste de inventario	cit=	MXN\$ 5.574.411	3,01%	-4,25%	-13,87%	MXN\$ 6.161.961,00	4,91%	-5,31%	-13,39%
Coste por demanda diferida	crdt=	-	-	-	-	-	-	-	-
Coste por tiempo ocioso	ctoc=	MXN\$ 1.429,72	7,99%	13,70%	5,36%	MXN\$ 1.316,56	-1,05%	-9,06%	-9,31%
Coste por tiempo extra	ctex=	MXN\$ 20.653,84	0,66%	0,22%	-1,80%	MXN\$ 20.695,52	0,57%	-0,74%	-1,87%
Inventario < mínimo	itnl=	MXN\$ 0,00	0,00%	0,00%	0,00%	MXN\$ 0,00	0,00%	0,00%	0,00%
Inventario > máximo	itxh=	MXN\$ 2.096.025,00	5,17%	-9,32%	-26,52%	MXN\$ 2.522.175,00	10,59%	-9,83%	-24,41%

Tabla 12. Variables a considerar para la planificación de producción según el escenario F5.

Producto	Periodos	Lotes	Producción	Inventario	Demanda diferida	< Mínimo	> Máximo
7	1	1	40	122	54	0	70
7	2	0	0	48	39	0	0
7	3	1	40	49	61	0	0
7	4	1	40	32	43	0	0
7	5	1	40	40	60	0	0
7	6	3	120	49	0	0	0
7	7	1	40	45	12	0	0
7	8	1	40	33	1	0	0
7	9	2	80	52	4	0	0
7	10	2	80	85	0	0	33
7	11	1	40	70	0	0	18
7	12	1	40	69	0	0	17
12	1	0	0	0	81	0	41
12	2	0	0	11	28	0	0
12	3	1	40	12	32	0	0
12	4	2	80	65	54	0	14
12	5	0	0	73	28	0	0
12	6	1	40	27	37	0	0
12	7	1	40	47	36	0	0
12	8	0	0	24	28	0	0
12	9	1	40	0	29	0	0
12	10	1	40	0	32	0	0
12	11	1	40	0	28	0	0
12	12	1	40	1	30	0	0
34	1	0	0	115	67	0	37
34	2	0	0	48	55	0	0
34	3	0	0	48	103	0	0
34	4	0	0	48	137	0	0
34	5	0	0	48	192	0	0
34	6	0	0	48	238	0	0
34	7	2	480	257	0	0	179
34	8	0	0	213	0	0	135
34	9	0	0	158	0	0	80
34	10	0	0	114	0	0	36
34	11	0	0	61	0	0	0
34	12	1	240	260	0	0	182

En el caso A5, el resultado de la función objetivo indica desviación absoluta, en cuanto a unidades producidas, sin incluir costes.

Tabla 13. Tiempo ocioso y extra para el recurso 4 en el escenario F5

Recurso	Periodo	Tiempo Ocioso	Tiempo Extra
4	1	0	0,87
4	2	1	0
4	3	0	2,74
4	4	0	4,61
4	5	0	0,87
4	6	0	6,49
4	7	0	25,20
4	8	0	0,87
4	9	0	4,61
4	10	0	4,61
4	11	0	2,74
4	12	0	13,97

7. Conclusiones

Esta investigación ha presentado un modelo cuantitativo para la planificación de producción como herramienta para la toma de decisiones en una empresa de la industria química mexicana. Este modelo se ha construido a través del seguimiento de una metodología desarrollada de acuerdo a diferentes conceptos y métodos teóricos que, apoyados de otros modelos (que incluyen conceptos como PMP, MRP y planificación táctica), tienen como objetivo definir las cantidades a producir, los niveles de inventario, la demanda diferida y los costes derivados. El fundamento teórico del modelo ha sido generar una mayor confianza en la toma de decisiones por parte de la gerencia de producción y constituirá una herramienta para la mejora continua, principalmente, en cuanto al nivel de servicio se refiere. Siguiendo la metodología de trabajo, se ha realizado una selección de productos y, con el ajuste de la demanda a una distribución teórica, han definido nuevos niveles de inventario para incluirlos en el modelo de planificación como unos límites mínimos y máximos: el primero como un *stock* de seguridad y el segundo obedeciendo a un límite de capacidad en el almacén.

El modelo de programación lineal entera, a través de sus diferentes escenarios, brinda unas opciones que la empresa podrá tener en cuenta para seleccionar aquel que se adecue a sus intereses financieros, garantizando unos costes de producción e inventarios óptimos, así como un mejor uso de las instalaciones en la planta. También, se ofrece flexibilidad en cuanto a la proporción de demanda satisfecha; de forma que, sin poner en riesgo las operaciones de la empresa, se pueda llevar a cabo una mejor gestión del flujo de efectivo, considerando las implicaciones derivadas de la aplicación de una política de este tipo. Por tanto, con la información que brinda el modelo de planificación, se podrán conocer los costes por penalización en el incumplimiento de entregas, reducir los niveles de inventario de productos terminados e incrementar el nivel de servicio de los productos seleccionados.

La limitación principal de este trabajo es que la metodología no incluye un método de pronósticos o de horizonte rodante que pueda retroalimentar el sistema y fue

probado con datos históricos de demanda, por lo que en trabajos futuros se propone incluir estos métodos y, además, la posibilidad de incorporar a este modelo un MRP agregando información respecto a las materias primas y los envases y embalajes.

Referencias

- Boiteux, O.D.; Corominas, A. y Lusa, A. (2007): “Estado del arte sobre planificación agregada de la producción”. *Enginyeria d’Organització i Logística Industrial*, 4(2), 1–39.
- Brandenburg, M. y Tölle, F.J. (2009): “MILP-based campaign scheduling in a speciality chemicals plant: a case study”. *OR Spectrum*, 31, 141–166.
- Buschkühl, L.; Sahling, F.; Helber, S. y Tempelmeier, H. (2010): “Dynamic capacitated lot-sizing problems: A classification and review of solution approaches”. *OR Spectrum*, 32, 231–261.
- Díaz-Madroño, M.; Mula, J. y Peidro, D. (2014): “A review of discrete-time optimization models for tactical production planning”. *International Journal of Production Research*, 52(17), 5171–5205.
- Dzielinski, B.P. y Gomory, R.E. (1965): “Optimal programming of lot sizes, inventory and labor allocations”. *Management Science*, 11(9), 874–890.
- Escobar, P.; Giraldo, J.A. y Cárdenas, D.M. (2012): “Programación de sistemas de producción híbridos, para inventario/bajo pedido, mediante un proceso analítico jerárquico de ordenación grupal (GAHPO) ”. *Información Tecnológica*, 23(5), 33–46.
- Flores, B.E. y Whybark, D.C. (1986): “Multiple criteria ABC analysis”. *International Journal of Operations and Production Management*, 6(3), 38–46.
- Grunow, M.; Günther, H. O. y Lehmann, M. (2002): “Campaign planning for multi-stage batch processes in the chemical industry”. *OR Spectrum*, 24, 281–314.
- Hax, A.C. y Meal, H.C. (1975): “Hierarchical integration of production planning and scheduling”. En M.A. Geisler (ed.): *TIMS Studies in Management Sciences, Volume 1: Logistics*. Nueva York: North Holland/American Elsevier, pp. 53–69.
- Lasdon, L.S. y Terjung, R.C. (1971): “An efficient algorithm for multi-item scheduling”. *Operations Research*, 19, 946–969.
- Mangiameli, P.M. (1979): *The effects of managerial policies on aggregate plans, the master production schedule, and departmental plans*. Tesis doctoral, Ohio: Ohio State University.

- Moniz, S.; Barbosa-Póvoa, A.P. y de Sousa, J.P. (2014): “Simultaneous regular and non-regular production scheduling of multipurpose batch plants: A real chemical-pharmaceutical case study”. *Computers and Chemical Engineering*, 67, 83–102.
- Mula, J.; Lyons, A.C.; Hernández, J.E. y Poler, R. (2014): “An integer linear programming model to support customer-driven material planning in synchronised, multi-tier supply chains”. *International Journal of Production Research*, 52(14), 4267–4278.
- Mula, J.; Poler, R. y García, J.P. (2006a): “MRP with flexible constraints: A fuzzy mathematical programming approach”. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(1), 74–97.
- Mula, J.; Poler, R.; García-Sabater, G.S. y Lario, F.C. (2006b): “Models for production planning under uncertainty: A review”. *International Journal of Production Economics*, 103(1), 271–285.
- Osorio, J.C. y Mota, T.G. (2008): “Planificación jerárquica de la producción en un *job shop* flexible”. *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquía*, 44, 158–171.
- Portela, R.V. (2007): “La planeación y programación de la producción en la pyme”. *AVANCES. Investigación en Ingeniería*, 6(6), 40–57.
- Quadt, D. y Kuhn, H. (2008): “Capacitated lot-sizing with extensions: A review”. *4OR*, 6(1), 61–83.
- Till, J.; Sand, G.; Urselmann, M. y Engell, S. (2007): “A hybrid evolutionary algorithm for solving two-stage stochastic integer programs in chemical batch scheduling”. *Computers and Chemical Engineering*, 31(5-6), 630–647.
- Ul Hassan, M. y Stockhammar, P. (2016): “Fitting probability distributions to economic growth: a maximum likelihood approach”. *Journal of Applied Statistics*, 43(9), 1583–1603.
- Venkataraman, R. y Nathan, J. (1994): “Master Production Scheduling for a Process Industry Environment: A Case Study”. *International Journal of Operations and Production Management*, 14(10), 44–53.



UNIVERSIDAD
PABLO DE
OLAVIDE
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA
ECONOMÍA Y LA EMPRESA (24). Páginas 169–189.
Diciembre de 2017. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
www.upo.es/revistas/index.php/RevMetCuant/article/view/2886

Métodos cuantitativos para un modelo de regresión lineal con multicolinealidad. Aplicación a rendimientos de letras del tesoro

SALMERÓN GÓMEZ, ROMÁN

Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa
Universidad de Granada (España)

Correo electrónico: romansg@ugr.es

RODRÍGUEZ MARTÍNEZ, EDUARDO

Máster en Técnicas Cuantitativas en Gestión Empresarial
Universidad de Granada (España)

Correo electrónico: edurodr@correo.ugr.es

RESUMEN

Es conocido que, cuando en el modelo de regresión lineal existe un alto grado de multicolinealidad, los resultados obtenidos a partir del método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) son inestables. Como solución a esta situación, en este trabajo se presentan los métodos de alzado, cresta y variables ortogonales como alternativa a la estimación por MCO. También se muestra que la regresión con variables ortogonales tiene sentido independientemente de la existencia de multicolinealidad grave, ya que permite dar respuesta a cuestiones no accesibles con el modelo original. Dichas metodologías se aplican a un conjunto de datos de rendimientos de letras del tesoro.

Palabras claves: modelos de regresión; multicolinealidad; regresión alzada; regresión cresta; regresión con variables ortogonales.

Clasificación JEL: C13; C21.

MSC2010: 62J05; 62J07; 62P25.

Quantitative Methods for a Linear Regression Model with Multicollinearity. Application to Yields of Treasury Bills

ABSTRACT

It is known that, when in the linear regression model there is a high degree of multicollinearity, the results obtained by using the Ordinary Least Squares (OLS) method are unstable. As a solution to this situation, in this paper we present the raised method, the ridge method and the orthogonal variables method as an alternative to the estimate by OLS. It is also shown that regression with orthogonal variables makes sense regardless of the existence of serious multicollinearity because it allows to answer questions which are not accessible when using the original model. These methodologies are applied to a data set of yields of treasury bills.

Keywords: regression models; multicollinearity; raised regression; ridge regression; regression with orthogonal variables.

JEL classification: C13; C21.

MSC2010: 62J05; 62J07; 62P25.



1. Introducción

La regresión lineal es una herramienta estadística ampliamente usada para analizar cómo influyen (si es que lo hacen) un conjunto de variables (independientes o explicativas) en otra (dependiente o explicada), permitiendo la estimación numérica de los signos y magnitudes de los coeficientes en una relación lineal previamente establecida. Una de las características de las variables económicas es la posible correlación entre ellas debido a la existencia de determinantes comunes, por lo que la multicolinealidad entre variables explicativas en una regresión múltiple debe considerarse una situación habitual.

Multicolinealidad. Según Novales [7], “la presencia de multicolinealidad en un modelo lineal puede revestir dos formas: la que se conoce como multicolinealidad exacta, que ocurre cuando una de las variables explicativas es combinación lineal determinista de todas las demás (o de algunas de ellas), y la multicolinealidad aproximada, que ocurre cuando una de las variables es aproximadamente igual a una combinación lineal de las restantes”; es decir, dado el siguiente modelo de regresión lineal con n observaciones y p variables:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad (1)$$

donde \mathbf{u} representa la perturbación (que se presupone esférica) y se asume la independencia lineal entre las variables independientes presentes en \mathbf{X} ; cuando esta condición no se verifica se dice que en el modelo hay multicolinealidad. Por tanto, la multicolinealidad describe la situación de ausencia de ortogonalidad entre las variables independientes del modelo de regresión.

En el primer caso (multicolinealidad perfecta), el modelo no satisface la condición de rango completo y conduce a infinitas estimaciones de los coeficientes del modelo de regresión, mientras que en el segundo caso (multicolinealidad aproximada¹), aunque dicha condición es satisfecha, la estimación será inestable ya que se pueden presentar los siguientes problemas:

- Coeficientes estimados sensibles a pequeños cambios en los datos;
- Varianzas elevadas de los estimadores;
- Tendencia a no rechazar la hipótesis nula al efectuar los contrastes de significación individual; y
- Un coeficiente de determinación elevado y, por tanto, tendencia a rechazar la hipótesis nula en el contraste de significación conjunta.

El segundo caso es el problemático ya que pone en entredicho las conclusiones obtenidas en el análisis realizado. Por tanto, la existencia de un alto grado de multicolinealidad no es una cuestión baladí cuando se estima el modelo de regresión por el método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO); de ahí la importancia de detectarla y tratarla de forma adecuada.

¹De aquí en adelante, cuando se haga referencia al término de multicolinealidad se ha de sobreentender que se hace referencia a la multicolinealidad aproximada.

Causas. Las causas que producen multicolinealidad en un modelo son diversas; sin embargo, podrían dividirse en los dos siguientes bloques (ver Spanos y McGuirk [11]):

Multicolinealidad sistemática: debida a un problema estructural; es decir, a la alta correlación lineal de las variables explicativas consideradas.

Multicolinealidad errática: debida a un problema puramente numérico; es decir, a un mal condicionamiento de los datos considerados por escasa variabilidad de las observaciones y/o reducido tamaño de la muestra.

Detección. Por lo comentado anteriormente, estar ante un modelo donde los coeficientes no son significativamente distintos de cero, si lo es el modelo conjuntamente, y con un coeficiente de determinación alto, son síntomas que hacen pensar en la existencia de multicolinealidad grave. Sin embargo, basarse únicamente en dichos síntomas no es adecuado, por lo que se hace necesario disponer de otras herramientas. Las medidas más usadas para detectar el grado de multicolinealidad presente en un modelo de regresión son el factor de inflación de la varianza (FIV) y el número de condición (NC). Por desgracia, estas herramientas no son un contraste estadístico aplicado a la detección de la multicolinealidad, sino una regla práctica que trata de analizar la existencia de multicolinealidad aproximada en el modelo y determinar las variables implicadas en la misma.

El FIV es una de las medidas más usadas para detectar si el grado de multicolinealidad presente en el modelo es preocupante. Para cada una de las variables explicativas del modelo (1), se obtiene a partir de la expresión:

$$FIV(i) = \frac{\text{var}(\hat{\beta}_i)}{\text{var}(\hat{\beta}_i^o)} = \frac{1}{1 - R_i^2}, \quad i = 2, \dots, p, \quad (2)$$

siendo $\hat{\beta}$ el estimador por MCO del modelo (1), $\hat{\beta}^o$ el estimador por MCO del modelo (1) suponiendo que las variables explicativas son ortogonales, y R_i^2 el coeficiente de determinación de la regresión auxiliar:

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_{-i}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{w},$$

donde \mathbf{X}_{-i} es igual a la matriz \mathbf{X} tras eliminar la variable \mathbf{X}_i para $i = 2, \dots, p$. Como $0 \leq R_i^2 \leq 1$, se verifica que $FIV(i) \geq 1$ para $i = 2, \dots, p$.

Puesto que el FIV se obtiene como el cociente entre la varianza observada y la varianza que se hubiera obtenido en el caso de que \mathbf{X}_i estuviese incorrelada con el resto de variables explicativas del modelo, entonces muestra en qué medida se agranda la varianza del estimador como consecuencia de la relación lineal existente entre los regresores.

Es comúnmente aceptado que valores del FIV superiores a 10 indicarían que el grado de multicolinealidad presente en el modelo es preocupante ya que implicaría un coeficiente de determinación auxiliar superior a 0,9.

Por otro lado, dado el modelo de regresión lineal múltiple (1), el NC se define como:

$$K(\mathbf{X}) = \frac{\mu_{max}}{\mu_{min}}, \quad (3)$$

donde μ_{max} y μ_{min} son, respectivamente, los valores singulares máximo y mínimo de la matriz \mathbf{X} .

Puesto que la descomposición en valores singulares de \mathbf{X} corresponde a $\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^t$, donde $\mathbf{U}^t\mathbf{U} = \mathbf{I}$, $\mathbf{V}^t\mathbf{V} = \mathbf{I}$ siendo \mathbf{I} la matriz identidad (de dimensiones adecuadas en cada caso) y $\mathbf{D} = \text{diag}(\mu_1 \dots \mu_p)$, con μ_i , $i = 1, \dots, p$, los valores singulares de la matriz \mathbf{X} , se tiene que:

$$\mathbf{X}^t\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{U}^t\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^t = \mathbf{V}\mathbf{D}^2\mathbf{V}^t.$$

En tal caso se verifica que los autovalores de la matriz $\mathbf{X}^t\mathbf{X}$ coinciden con el cuadrado de los valores singulares de \mathbf{X} ; es decir, $\xi_i = \mu_i^2$ para $i = 1, \dots, p$. Entonces, la expresión (3) es equivalente a:

$$K(\mathbf{X}) = \sqrt{\frac{\xi_{max}}{\xi_{min}}}, \quad (4)$$

donde ξ_{max} y ξ_{min} son, respectivamente, los autovalores máximo y mínimo de la matriz $\mathbf{X}^t\mathbf{X}$.

Según Belsley [1], valores de $K(\mathbf{X})$ entre 20 y 30 suponen multicolinealidad moderada y valores superiores a 30, multicolinealidad grave. Además, los datos deben tener longitud unidad; es decir, han de ser divididos por la raíz cuadrada de la sumatoria de cada uno de sus elementos elevados al cuadrado.

Soluciones. Entre las diversas soluciones que se suelen barajar, se tienen aquellas relacionadas con los datos de los que se dispone (como, por ejemplo, mejora del diseño muestral, incorporar más observaciones a la muestra o el uso de información *a priori*), la aplicación de técnicas de estimación alternativas a MCO (como, por ejemplo, regresión cresta, regresión alzada, regresión de componentes principales, regresión con variables ortogonales, regresión LASSO o máxima entropía) o incluso la eliminación del modelo de las variables que se consideran que provocan el problema.

Por desgracia, mejorar la calidad de los datos disponibles no siempre es posible; por lo que antes de eliminar variables del modelo (es conocido que esta elección podría conducir a la aparición de otros problemas como la heterocedasticidad y autocorrelación), sería aconsejable intentar usar alguna técnica alternativa a MCO para la estimación del modelo. En este sentido, el presente trabajo se centra en la aplicación de los métodos de alzado, de cresta y de variables ortogonales a modelos donde la presencia de multicolinealidad es grave.

Estructura del trabajo. En la sección 2, se obtienen las estimaciones por MCO del modelo (1) así como las expresiones referentes a la significación individual y conjunta (véase Novales *et al.* [8]). En la sección 3, se presentan los métodos de alzado, de cresta y de variables ortogonales. Esta sección no es más que una recopilación bibliográfica de los contenidos presentes en los trabajos de Salmerón *et al.* [10] y Novales *et al.* [8]. Adviértase que para obtener expresiones explícitas se ha considerado el caso en el que $p = 2$ y los datos están estandarizados, es decir, se les resta su media y, posteriormente, se divide entre \sqrt{n} veces la desviación típica. En la sección 4, se aplican los resultados mostrados en la sección anterior a un conjunto de datos reales correspondiente a tipos de interés medios de letras del tesoro. Finalmente, en la sección 5, se destacan los principales resultados obtenidos.

2. Preliminares

En el presente apartado se realiza un resumen de las principales características que se obtienen al estimar por MCO el siguiente modelo de regresión lineal con 2 variables estandarizadas y n observaciones:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} = \beta_1\mathbf{x}_1 + \beta_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}, \quad (5)$$

donde \mathbf{y} representa a un vector $n \times 1$ que contiene las observaciones de la variable explicada, $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2]$ es una matriz $n \times 2$ que contiene las observaciones de las variables explicativas, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1 \ \beta_2)'$ es un vector 2×1 que contiene los coeficientes de las variables explicativas y \mathbf{u} es un vector $n \times 1$ de perturbaciones aleatorias. Se supone que la perturbación aleatoria está centrada y es esférica. Además, por estar las variables estandarizadas, se tiene:

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

donde ρ corresponde a la correlación entre las variables \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 y γ_i a la correlación entre \mathbf{x}_i e \mathbf{y} , para $i = 1, 2$.

Estimación y bondad de ajuste. En tal caso, se verifica que la estimación por mínimos cuadrados ordinarios (MCO) de los coeficientes de los regresores del modelo (5) será:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1 - \rho\gamma_2}{1 - \rho^2} \\ \frac{\gamma_2 - \rho\gamma_1}{1 - \rho^2} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

cuya matriz de varianzas covarianzas estimada es:

$$\widehat{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \widehat{\sigma}^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \widehat{\sigma}^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - \rho^2} & -\frac{\rho}{1 - \rho^2} \\ -\frac{\rho}{1 - \rho^2} & \frac{1}{1 - \rho^2} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

donde:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{SCR}{n - 2} = \frac{1}{n - 2} \cdot \frac{1 - \rho^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 + 2\rho\gamma_1\gamma_2}{1 - \rho^2}.$$

Ya que $SCT = 1$ (al estar el modelo estandarizado) y $SCE = \widehat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}' \mathbf{y} = \gamma_1 \widehat{\beta}_1 + \gamma_2 \widehat{\beta}_2 = \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 2\rho\gamma_1\gamma_2}{1 - \rho^2}$,² se tiene que:

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 2\rho\gamma_1\gamma_2}{1 - \rho^2}.$$

Inferencia individual y conjunta. A partir de la expresión (8), los intervalos de confianza al nivel $1 - \alpha$ correspondientes a los coeficientes de los regresores son:

$$\widehat{\beta}_i \pm t_{n-2} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \widehat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{1 - \rho^2}}, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

² SCR denota la suma de cuadrados de los residuos, SCT la suma de cuadrados totales y SCE la suma de cuadrados explicada.

donde $t_{n-2} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ corresponde al punto de una t-Student con $n - 2$ grados de libertad que deja a la izquierda una probabilidad $1 - \frac{\alpha}{2}$.

Mientras que las regiones de rechazo de los contrastes de significación individual (aquellos que tienen como hipótesis nula $H_0 : \beta_i = 0$ y alternativa $H_1 : \beta_i \neq 0$ para $i = 1, 2$) serán:

$$t_{exp} = \left| \frac{\hat{\beta}_i}{\hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{1-\rho^2}}} \right| > t_{n-2} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \quad i = 1, 2,$$

la región de rechazo del contraste de significación conjunta (aquel que tiene como hipótesis nula $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ frente a la alternativa $H_1 : \exists i$ tal que $\beta_i \neq 0$ con $i = 1, 2$) será:

$$F_{exp} = \frac{SCE}{\hat{\sigma}^2} = (n - 2) \cdot \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 2\rho\gamma_1\gamma_2}{1 - \rho^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 + 2\rho\gamma_1\gamma_2} > F_{2, n-2}(1 - \alpha),$$

donde $F_{2, n-2}(1 - \alpha)$ es el punto de una F de Snedecor con 2 y $n - 2$ grados de libertad que deja a su izquierda una probabilidad $1 - \alpha$.

Detección de la multicolinealidad. Finalmente, el FIV asociado al modelo (5) se obtiene, por ejemplo, a partir del coeficiente de determinación de la regresión auxiliar $\mathbf{x}_1 = \alpha\mathbf{x}_2 + \mathbf{v}$. Puesto que en la regresión simple el coeficiente de determinación coincide con el cuadrado del coeficiente de correlación de las variables, se obtiene que:

$$FIV = \frac{1}{1 - \rho^2}. \quad (10)$$

Por otro lado, el número de condición se obtendrá a partir de los autovalores de la matriz $\mathbf{X}'\mathbf{X}$.

3. Técnicas de estimación bajo multicolinealidad

Como se ha comentado, en presencia de multicolinealidad grave en el modelo de regresión, el análisis por MCO de la sección anterior queda en entredicho por lo que podrían aplicarse técnicas alternativas a los MCO como la estimación por componentes principales, la regresión LASSO, la estimación alzada, la cresta, con variables ortogonales, etc. Este apartado se centra en éstas tres últimas. Para más detalles, véanse los trabajos de Salmerón *et al.* [10] y Novales *et al.* [8].

3.1. Método de regresión alzada

Dado el modelo (5), la regresión alzada trata el problema de la multicolinealidad desde un punto de vista geométrico.

La colinealidad surge porque el vector \mathbf{x}_1 y el vector \mathbf{x}_2 están muy cerca geoméricamente; es decir, el ángulo θ_1 que determinan ambos vectores es muy pequeño (véase Figura 1). Para corregir este problema antes de proceder a la estimación, vamos a separarlos a través de la siguiente regresión:

$$\mathbf{x}_1 = \alpha\mathbf{x}_2 + \boldsymbol{\epsilon}, \quad (11)$$

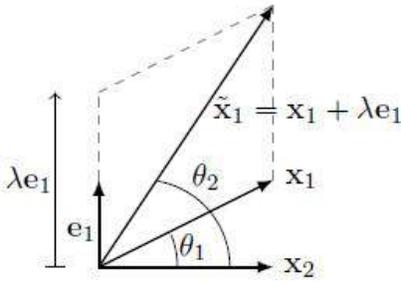


Figura 1: Representación del método alzado para dos variables independientes

cuya estimación por MCO es $\hat{\alpha} = (\mathbf{x}'_2 \mathbf{x}_2)^{-1} \mathbf{x}'_2 \mathbf{x}_1$, de forma que se verifica que $\hat{\alpha} = \rho$ (ya que los datos están estandarizados). En tal caso, se tiene que $\mathbf{x}_1 = \rho \mathbf{x}_2 + \mathbf{e}_1$ con $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{x}_2$ donde \mathbf{e}_1 es el residuo obtenido de la regresión (11). Luego, el vector alzado se define como:

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_1 + \lambda \mathbf{e}_1. \quad (12)$$

De la Figura 1, se evidencia que el ángulo θ_2 entre $\tilde{\mathbf{x}}_1$ y \mathbf{x}_2 será mayor que el ángulo θ_1 . Por lo tanto, sustituyendo el vector \mathbf{x}_1 por el vector alzado $\tilde{\mathbf{x}}_1$ en el modelo (5), la correlación entre ambos vectores será menor y el problema de la multicolinealidad disminuirá. Cuanto mayor sea el parámetro λ , mayor será el ángulo entre los vectores y menor será la correlación.

Estimación. Por tanto, el nuevo modelo viene dado por:

$$\mathbf{y} = \beta_1(\lambda) \tilde{\mathbf{x}}_1 + \beta_2(\lambda) \mathbf{x}_2 + \mathbf{w}. \quad (13)$$

Mediante el uso de la estimación MCO en el modelo (13), podemos obtener los siguientes estimadores:

$$\hat{\beta}(\lambda) = (\tilde{\mathbf{X}}' \tilde{\mathbf{X}})^{-1} \tilde{\mathbf{X}}' \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1 - \rho \gamma_2}{(1+\lambda)(1-\rho^2)} \\ \frac{(1+\lambda)\gamma_2 - \rho\gamma_1 - \rho^2\gamma_2\lambda}{(1+\lambda)(1-\rho^2)} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

donde $\tilde{\mathbf{X}} = [\tilde{\mathbf{x}}_1 \mathbf{x}_2]$.

Bondad de ajuste e inferencia. Las sumas de los cuadrados en la regresión alzada coinciden con los de la estimación por MCO (véase Salmerón *et al.* [10]). Por esta razón, el coeficiente de determinación, la estimación de la varianza de la perturbación aleatoria y la F experimental serán las mismas para los modelos MCO y alzado:

$$R^2(\lambda) = R^2, \quad \hat{\sigma}^2(\lambda) = \hat{\sigma}^2, \quad F_{exp}(\lambda) = F_{exp}.$$

Las expresiones de las t experimentales son:

$$t_{exp}(\beta_1(\lambda)) = \frac{\gamma_1 - \rho \gamma_2}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(1 - \rho^2)}}, \quad t_{exp}(\beta_2(\lambda)) = \frac{(1 + \lambda)\gamma_2 - \rho\gamma_1 - \rho^2\gamma_2\lambda}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(1 - \rho^2)[(1 + \lambda)^2 - \rho^2(2\lambda + \lambda^2)]}}. \quad (15)$$

Podemos ver que la correspondiente t experimental de la variable alzada, $t_{exp}(\beta_1(\lambda))$, no depende de λ . Por lo tanto se mantiene constante, mientras que $t_{exp}(\beta_2(\lambda))$ depende de λ y variará ante incrementos de esta.

Debemos recordar que uno de los síntomas de la multicolinealidad grave son los modelos significativos globalmente pero no de forma individual. Aplicando la regresión alzada, la condición inicial de significación conjunta se respeta y la de no significación individual puede variar de forma beneficiosa.

Factor de inflación de la varianza. Una vez aplicado el procedimiento alternativo a los MCO, es necesario comprobar si es efectivo; lo que consiste, por ejemplo, en calcular el FIV.

El FIV asociado a la regresión alzada viene dado por:

$$\text{FIV}(\lambda) = \frac{1}{1 - \frac{\rho^2}{(1+\lambda)^2 - (\lambda^2 + 2\lambda)\rho^2}} = \frac{(1+\lambda)^2(1-\rho^2) + \rho^2}{(1+\lambda)^2(1-\rho^2)} = 1 + \frac{\rho^2}{(1+\lambda)^2(1-\rho^2)}, \quad (16)$$

de forma que, para un λ concreto, se puede comprobar si la multicolinealidad se ha mitigado o no.

A partir de (16) es claro que el $\text{FIV}(\lambda)$ es siempre mayor o igual a 1, es decreciente en λ y continuo en $\lambda = 0$ (coincidiendo con el obtenido para el modelo (5)). Para más detalles, véase Salmerón *et al.* [10].

3.2. Método de regresión cresta

La regresión cresta trata la multicolinealidad desde un punto de vista sistemático (es decir, puramente numérico), introduciendo una cantidad positiva en la diagonal principal de la matriz $\mathbf{X}'\mathbf{X}$.

Estimación. El estimador cresta $\hat{\beta}(k)$, con $k \geq 0$, se expresa de la siguiente forma:

$$\hat{\beta}(k) = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{(1+k)\gamma_1 - \rho\gamma_2}{(1+k)^2 - \rho^2} \\ \frac{(1+k)\gamma_2 - \rho\gamma_1}{(1+k)^2 - \rho^2} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

con matriz de varianzas covarianzas:

$$\text{var}(\hat{\beta}(k)) = \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1}. \quad (18)$$

Marquardt [5] muestra que la estimación dada en (17) se puede obtener estimando por MCO el modelo aumentado:

$$\mathbf{y}_A = \mathbf{X}_A\beta + \mathbf{u}_A, \quad (19)$$

donde:

$$\mathbf{y}_A = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{p \times 1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_A = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{n \times p} \\ \sqrt{k}\mathbf{I}_{p \times p} \end{pmatrix}.$$

Test de significación individual. Los valores t experimentales para el test de significación individual de los estimadores cresta se pueden obtener, para $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$, mediante:

$$t_{exp}(\beta_i(k)) = \frac{\hat{\beta}_i(k)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(k)b_{i,i}}} = \frac{(1+k)\gamma_i - \rho\gamma_j}{\hat{\sigma}(k)\sqrt{(1+k)^2 - 2(1+k)\rho^2 + \rho^2}}, \quad (20)$$

donde $b_{i,i}$ es el elemento (i, i) de la matriz $(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1}$ y la estimación de la varianza de la perturbación aleatoria se puede obtener a partir de:

$$\hat{\sigma}^2(k) = \frac{SCR(k)}{n-2} = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}(k))'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}(k))}{n-2}.$$

Se puede apreciar que ambas t experimentales dependen del parámetro k , por lo que variarán conforme cambie éste parámetro.

Bondad de ajuste y test de significación global. McDonald [6] obtuvo la siguiente expresión para calcular el coeficiente de determinación del estimador cresta:

$$R^2(k) = \frac{(\hat{\boldsymbol{\beta}}(k)' \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}(k) + k \hat{\boldsymbol{\beta}}(k)' \hat{\boldsymbol{\beta}}(k))^2}{\hat{\boldsymbol{\beta}}(k)' \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}(k)}, \quad (21)$$

demostrando que es decreciente en k . A partir de esta expresión, es posible obtener el valor experimental para el test de significación global:

$$F_{exp}(k) = \frac{R^2(k)}{\frac{1-R^2(k)}{n-2}}, \quad (22)$$

que de igual forma, también es decreciente en k .

Por tanto, aumentando el valor de k , se tiene que decrecen el coeficiente de determinación y el valor experimental de la significación global. Es decir, puede ocurrir que, para un valor de k dado, se haya mitigado el problema de la multicolinealidad pero que el modelo no sea válido globalmente.

Factor de inflación de la varianza. Siguiendo a Marquardt [5], el elemento de la diagonal principal de la matriz $(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1}$ son los factores de inflación de la varianza³, es decir:

$$FIV(k) = \frac{(1+k)^2 - 2(1+k)\rho^2 + \rho^2}{[(1+k)^2 - \rho^2]^2}. \quad (23)$$

Para $k = 0$, FIV(k) coincide con el FIV del modelo (5) y con el FIV de la regresión alzada para $\lambda = 0$. García y otros [2] mostraron que esta expresión presenta algunas anomalías, como por ejemplo, que toma valores inferiores a 1, que hacen desaconejable su aplicación. En García *et al.* [4] se muestra cómo ha de calcularse el FIV de forma adecuada en la regresión cresta.

³Siempre y cuando los datos estén estandarizados.

3.3. Método de regresión con variables ortogonales

En la regresión con variables ortogonales se sustituye una de las variables explicativas del modelo (5) por el componente de la misma que no está relacionado con la otra. Este componente se obtiene de la estimación de la regresión de la variable elegida sobre las demás variables explicativas; más concretamente, el residuo de dicha regresión es el componente que buscamos.

De esta forma, supongamos que en el modelo (5) queremos orthogonalizar la variable \mathbf{x}_2 , en tal caso se plantea la siguiente regresión auxiliar:

$$\mathbf{x}_2 = \alpha \mathbf{x}_1 + \mathbf{w}. \quad (24)$$

A continuación sustituimos en el modelo (5) la variable \mathbf{x}_2 por los residuos obtenidos en la regresión auxiliar:

$$\mathbf{y} = \beta_1 \mathbf{x}_1 + \beta_2 \mathbf{e} + \mathbf{u}. \quad (25)$$

Ahora las variables explicativas del modelo son ortogonales entre sí, por lo que el problema de multicolinealidad aproximada se habría resuelto (el FIV es igual a 1). En el caso de tener un modelo con más variables, la multicolinealidad habría descendido; si no fuera suficiente, se procedería a orthogonalizar otra variable.

Si bien, en la estimación alzada y cresta, la interpretación de los coeficientes estimados no cambia, en este caso sí que lo hace ya que el residuo \mathbf{e} es la parte de \mathbf{x}_2 que no está relacionada con \mathbf{x}_1 . Entonces, β_2 se interpreta como el efecto que sufre la variable explicada debido a la parte de \mathbf{x}_2 que no está relacionada con \mathbf{x}_1 . Esta interpretación abre la puerta a nuevas investigaciones; por lo que la regresión ortogonal, además de mitigar el problema de multicolinealidad, nos brinda otra visión e interpretación de los modelos que puede resultar muy útil a los investigadores.

Estimación. Si llamamos $\mathbf{X}_O = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{e}]$, se tiene que la estimación de los coeficientes por MCO del modelo (25) será:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_O = (\mathbf{X}_O^t \mathbf{X}_O)^{-1} \mathbf{X}_O^t \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \rho^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 - \rho \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \frac{\gamma_2 - \rho \gamma_1}{1 - \rho^2} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Bondad de ajuste e inferencia. La matriz de varianzas covarianzas estimada es:

$$\widehat{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_O) = \hat{\sigma}_O^2 (\mathbf{X}_O^t \mathbf{X}_O)^{-1} = \hat{\sigma}_O^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \rho^2} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

donde $\hat{\sigma}_O^2 = \hat{\sigma}^2$ ya que $SCR_O = SCR$ (véase Novales *et al.* [8]). Además, se verifica que $SCT_O = 1$ y $SCE_O = SCE$ (ver Novales *et al.* [8]), por lo que se tiene que $R_O^2 = R^2$ y que las regiones de rechazo del contraste de significación conjunta coincidirán ($F_{exp,O} = F_{exp}$).

Test de significación individual. A partir de la expresión (27), los intervalos de confianza al nivel $1 - \alpha$ correspondientes a los coeficientes de los regresores son:

$$\hat{\beta}_{1O} \pm t_{n-2} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \hat{\sigma}, \quad \hat{\beta}_2 \pm t_{n-2} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{1 - \rho^2}}, \quad (28)$$

y las regiones de rechazo de los contrastes de significación individual serán:

$$t_{exp} = \left| \frac{\widehat{\beta}_{1O}}{\widehat{\sigma}} \right| > t_{n-2} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right), \quad t_{exp} = \left| \frac{\widehat{\beta}_2}{\widehat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{1-\rho^2}}} \right| > t_{n-2} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right).$$

Se observa que las únicas diferencias entre el análisis de los modelos (5) y (25) las encontramos en la estimación del primer coeficiente y de su correspondiente intervalo de confianza y contraste de significación individual; todo lo demás permanece intacto.

4. Aplicación práctica

El objetivo del siguiente ejemplo es poner en práctica los resultados obtenidos en el apartado anterior sobre los métodos de estimación alternativos a los MCO cuando en el modelo de regresión existe un grado de multicolinealidad grave.

Destacar que en estos modelos se deben comprobar también las hipótesis básicas de homocedasticidad e incorrelación, aunque no se ha hecho debido a que no es el objetivo del presente trabajo y no deseamos alejarnos de lo que constituye la principal aportación del mismo, que no es más que la aplicación de las distintas metodologías estudiadas.

Finalmente, indicar que, aunque los resultados anteriores se han obtenido tras estandarizar las variables, estos siguen siendo válidos sin haber realizado transformación alguna. Así, en el siguiente ejemplo se usan los datos originales.

4.1. Rendimientos de letras del tesoro

En este modelo se analizan los tipos de interés medio de las letras del tesoro. Se utiliza para ello tres series temporales mensuales que abarcan desde febrero de 2013 hasta febrero de 2016; es decir, se cuentan con 37 observaciones de los tipos de interés medio de las letras del tesoro a 6 meses, 9 meses y 12 meses. Como variable dependiente se usa el tipo de interés medio a 12 meses (**TI12**) y como variables independientes el tipo de interés medio a 6 (**TI6**) y 9 meses (**TI9**).

En el gráfico de la Figura 2, se puede observar que las tres series tienen una tendencia muy similar, lo que nos hace sospechar que las variables pueden presentar un nivel alto de colinealidad. Por tanto, procedemos a calcular los FIV, obteniéndose que $FIV = 20,782$. Puesto que es superior a 10, podemos afirmar que el modelo presenta multicolinealidad grave y entonces la estimación MCO podría conducir a errores y a conclusiones inestables.

El modelo a estimar queda de la siguiente forma:

$$\mathbf{TI12} = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{TI6} + \beta_2 \mathbf{TI9} + \mathbf{u}, \quad (29)$$

donde se considera que la perturbación aleatoria \mathbf{u} está centrada y es homocedástica e incorrelada.

Si aplicamos la regresión por MCO, los resultados que se obtienen se muestran en el Cuadro 1. Podemos observar que los coeficientes de las variables independientes son significativamente distintos de cero, excepto el término independiente que no lo es, y el modelo es significativo globalmente.

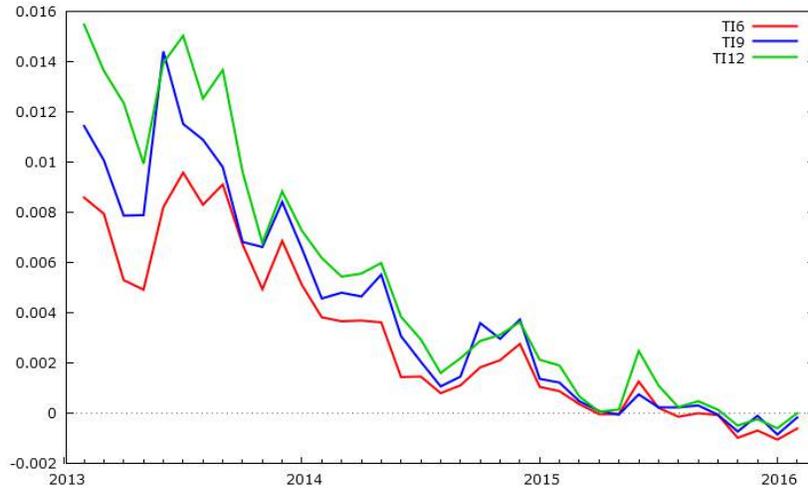


Figura 2: Tipos de interés medio de las letras del tesoro

Término independiente	TI6	TI9	R^2	F de ANOVA (2,34)
0,000343968 (0,000215074)	0,862294 (0,214776)	0,531898 (0,16668)	0,969096	533,0873

Cuadro 1: Estimación por MCO del modelo de rendimientos del tesoro (entre paréntesis la desviación típica estimada)

Adviértase que, en O'Brien [9], se muestra que la varianza de los coeficientes estimados depende de diversos factores:

$$\widehat{\text{var}}(\widehat{\beta}_i) = \frac{\widehat{\sigma}^2}{n \cdot \text{var}(\mathbf{X}_i)} \cdot FIV(i),$$

por lo que un FIV alto no implica necesariamente que no se vaya a rechazar la hipótesis nula en los contrastes de significación individual.

4.1.1. Aplicación de la regresión alzada

Procedemos a realizar la siguiente regresión auxiliar sobre el modelo (29) con el fin de alzar la variable **TI9**:

$$\mathbf{TI9} = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{TI6} + \epsilon. \quad (30)$$

A partir de los residuos de la regresión anterior, \mathbf{e} , el vector alzado se define como:

$$\widetilde{\mathbf{TI9}} = \mathbf{TI9} + \lambda \mathbf{e}. \quad (31)$$

A continuación, el nuevo modelo queda de la siguiente forma:

$$\mathbf{TI12} = \beta_0(\lambda) + \beta_1(\lambda) \mathbf{TI6} + \beta_2(\lambda) \widetilde{\mathbf{TI9}} + \mathbf{w}. \quad (32)$$

Los resultados de estimar el modelo anterior por MCO se muestran en el Cuadro 2 para distintos valores de λ . Se puede observar que:

- El coeficiente de determinación y la significación conjunta se mantienen intactas con respecto al modelo de MCO.
- La t experimental de la variable alzada, **TI9**, no cambia; pero por el contrario, sí cambia la t experimental del resto de variables, en este caso de **TI6**, y va en aumento cuanto mayor es el parámetro λ .
- El FIV decrece a medida que aumentamos el parámetro λ y, por lo tanto, el grado de multicolinealidad va disminuyendo.
- Si nos quedamos con $\lambda = 0,5$, ya que es primer valor en el que los FIV presentan valores por debajo de 10, la estimación de los coeficientes refleja que:
 - cuando **TI6** aumenta un 1%, manteniéndose **TI9** constante, **TI12** aumenta un 1,08519%.
 - cuando **TI9** aumenta en un 1% y se mantiene constante **TI6**, **TI12** aumenta un 0,354598%.

4.1.2. Aplicación de la regresión cresta

Siguiendo Marquardt [5], el modelo aumentado, véase expresión (19), que se ha utilizado para la regresión cresta es el siguiente:

$$\mathbf{TI12}_A = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{TI6}_A + \beta_2 \mathbf{TI9}_A + \mathbf{u}_A. \quad (33)$$

Los resultados obtenidos al estimar dicho modelo se muestran en el Cuadro 3. Se puede observar que:

λ	Término independiente	TI6	TI9	R^2	F de ANOVA (2,34)	t exp TI6	t exp TI9	FIV TI6	FIV TI9
0,1	0,00035912 (0,00021397)	0,923084 (0,196235)	0,483543 (0,151527)	0,969096	533,0873	4,704	3,191	17,349	17,349
0,2	0,000371747 (0,000213127)	0,973742 (0,180865)	0,443248 (0,1389)	0,969096	533,0873	5,384	3,191	14,738	14,738
0,3	0,000382431 (0,000212468)	1,01661 (0,167932)	0,409152 (0,128215)	0,969096	533,0873	6,054	3,191	12,705	12,705
0,4	0,000391589 (0,000211944)	1,05335 (0,156915)	0,379927 (0,119057)	0,969096	533,0873	6,713	3,191	11,093	11,093
0,5	0,000399526 (0,000211521)	1,08519 (0,147427)	0,354598 (0,11112)	0,969096	533,0873	7,361	3,191	9,792	9,792
0,6	0,000406471 (0,000211173)	1,11305 (0,139182)	0,332436 (0,104175)	0,969096	533,0873	7,997	3,191	8,727	8,727
0,7	0,000412599 (0,000210885)	1,13764 (0,131958)	0,312881 (0,098047)	0,969096	533,0873	8,621	3,191	7,845	7,845
0,8	0,000418045 (0,000210643)	1,15949 (0,125586)	0,295499 (0,0926)	0,969096	533,0873	9,233	3,191	7,106	7,106
0,9	0,000422919 (0,000210438)	1,17904 (0,119928)	0,279946 (0,0877263)	0,969096	533,0873	9,831	3,191	6,480	6,480
1	0,000427305 (0,000210263)	1,19664 (0,114878)	0,265949 (0,08334)	0,969096	533,0873	10,42	3,191	5,964	5,964
50	0,000507375 (0,000208638)	1,51787 (0,0472916)	0,0104294 (0,00326823)	0,969096	533,0873	32,10	3,191	1,008	1,008
100	0,000508993 (0,000208636)	1,52436 (0,0471585)	0,00526631 (0,0016503)	0,969096	533,0873	32,32	3,191	1,002	1,002
500	0,00051031 (0,000208635)	1,52964 (0,0471147)	0,00106167 (0,000332695)	0,969096	533,0873	32,47	3,191	1	1
1000	0,000510476 (0,000208635)	1,53031 (0,0471133)	0,000531366 (0,000166513)	0,969096	533,0873	32,48	3,191	1	1

Cuadro 2: Estimación por MCO del modelo (32) sobre rendimientos del tesoro (entre paréntesis la desviación típica estimada)

- El coeficiente de determinación (R^2) y la significación global disminuyen a medida que aumenta el parámetro k , lo cual puede provocar problemas a la hora de validar el modelo.
- La significación individual (t_{epx}) también decrece para las dos variables independientes de manera que los coeficientes de las dos variables explicativas dejan de ser significativamente distintos de cero.
- En este modelo nos quedamos con un valor de $k = 0,03$, ya que es el primer valor en el que los FIV presentan valores por debajo de 10 (véase Cuadro 4). En este caso, no tiene sentido interpretar los coeficientes obtenidos, debido a que no son significativos individualmente.

En el Cuadro 4 se muestran los FIV calculados para la estimación cresta a partir de las expresiones (23) y (2) dadas por Marquardt [5] y Zhang e Ibrahim [12], respectivamente. Los FIV decrecen a medida que aumentamos el parámetro k , llegando a mitigar el problema de multicolinealidad; pero como hemos comentado, provocando otros efectos adversos. Además se observa que, siguiendo los cálculos de Marquardt, se pueden obtener FIV menores que 1, lo cual va en contradicción con la definición dada en (2).

4.1.3. Aplicación de la regresión con variables ortogonales

Para sacarle el mayor partido posible a la regresión ortogonal, vamos a proceder a ortogonalizar la variable **TI9**. De esta forma, se va a poder analizar el efecto del tercer trimestre sobre la variable dependiente, **TI12**; es decir, del séptimo, octavo y noveno mes, ya que ésta es la parte de **TI9** que no está relacionada con **TI6**. Para ello, debemos plantear la siguiente regresión auxiliar:

$$\mathbf{TI9} = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{TI6} + \mathbf{w}, \quad (34)$$

ya que sus residuos, \mathbf{e} , se interpretan como el tercer trimestre al ser la parte de **TI9** que no tiene relación con **TI6**.

Si sustituimos en el modelo (29) la variable **TI9** por los residuos de la regresión auxiliar, se tiene el modelo con variables ortogonales:

$$\mathbf{TI12} = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{TI6} + \beta_2 \mathbf{e} + \mathbf{u}, \quad (35)$$

cuya estimación por MCO se muestra en el Cuadro 5. Se puede observar que:

- El coeficiente de determinación (R^2) y la significación global del modelo permanecen inalteradas con respecto a la estimación por MCO del modelo (29) (véase Cuadro 1).
- El coeficiente de la variable ortogonalizada, **TI9**, también permanece igual al del modelo estimado por MCO; sin embargo, la estimación de la otra variable, **TI6**, sí sufre cambios (véase Cuadro 1).
- Los coeficientes de las variables explicativas son significativamente distintos de cero (t experimentales igual a 32,5 y 3,191, respectivamente). El modelo es significativo globalmente.
- La estimación de los coeficientes refleja que cuando **TI6** (los dos primeros trimestres) aumenta un 1 %, **TI12** aumenta un 1,53098 %. En el modelo original es un 0,8622 % (véase Cuadro 1). Al aislar los dos primeros trimestres, su efecto sobre **TI12** prácticamente se duplica. Por otra parte, cuando \mathbf{e} aumenta en un 1 % (el tercer trimestre), **TI12** aumenta un 0,531898 %.

k	Término independiente	TI6	TI9	R^2	F de ANOVA (2,34)	t exp TI6	t exp TI9
0,03	0,0049842 (0,0008294)	0,0190850 (0,0285177)	0,0245165 (0,0283986)	0,5248	13,62	0,6692335	0,8632996
0,1	0,005084 (0,000830)	0,005870 (0,015880)	0,007543 (0,015860)	0,513	12,99	0,3696474	0,475599
0,2	0,0050949 (0,0008301)	0,0029574 (0,0112829)	0,0038010 (0,0112757)	0,5093	12,8	0,2621135	0,3370966
0,3	0,0050893 (0,0008301)	0,0019800 (0,0092356)	0,0025452 (0,0092317)	0,5071	12,69	0,2143878	0,2757022
0,4	0,0050797 (0,0008302)	0,0014901 (0,0080137)	0,0019157 (0,0080112)	0,5054	12,6	0,1859441	0,2391277
0,5	0,0050686 (0,0008302)	0,0011957 (0,0071799)	0,0015375 (0,0071780)	0,5038	12,52	0,1665344	0,2141962
0,6	0,0050567 (0,0008302)	0,0009993 (0,0065646)	0,0012851 (0,0065632)	0,5023	12,45	0,1522256	0,1958039
0,7	0,0050444 (0,0008302)	0,0008589 (0,0060867)	0,0011047 (0,0060856)	0,5009	12,38	0,1411109	0,1815269
0,8	0,0050320 (0,0008302)	0,0007535 (0,0057018)	0,0009693 (0,0057009)	0,4994	12,31	0,1321513	0,1700258
0,9	0,0050193 (0,0008302)	0,0006715 (0,0053833)	0,0008640 (0,0053825)	0,4981	12,24	0,1247376	0,1605202
1	0,0050067 (0,0008302)	0,0006059 (0,0051141)	0,0007797 (0,0051134)	0,4967	12,17	0,1184764	0,1524817

Cuadro 3: Estimación por MCO del modelo aumentado (33) para los rendimientos del tesoro (entre paréntesis la desviación típica estimada)

- Como las variables independientes son ortogonales entre sí (los FIV asociados toman el valor 1), el problema de multicolinealidad ha sido eliminado. Además, dicha ortogonalidad implica que en este modelo realmente se verifique el *ceteris paribus*; es decir, cuando aumenta **TI6** se verifica que **e** permanece constante y viceversa.
- La estimación de las variables inalteradas coincide prácticamente con la obtenida para las mismas variables cuando se aplica la regresión alzada para valores altos de λ (véase Cuadro 2).

5. Conclusiones

En el presente trabajo, en primer lugar se ha realizado una recopilación bibliográfica sobre técnicas de estimación alternativas a los mínimos cuadrados ordinarios cuando en el modelo de regresión hay multicolinealidad grave. Más concretamente, se han estudiado los métodos de alzado, cresta y variables ortogonales obteniéndose que:

- En la regresión alzada se mantienen inalterados tanto el coeficiente de determinación (R^2) como la significación global del modelo (F_{exp}) con respecto a la estimación por MCO. La significación individual (t_{exp}) de la variable alzada tampoco sufre cambios; sin embargo, la significación individual de las variables que permanecen intactas sí varía, lo que puede ser positivo para el modelo si se consigue que los coeficientes que no eran significativamente distintos de cero pasen a serlo.
- En la regresión cresta, el coeficiente de determinación (R^2) y la significación conjunta (F_{exp}) decrecen a medida que aumenta el parámetro k , lo cual es un aspecto negativo para el modelo, pues con el fin de mitigar el problema de multicolinealidad de las variables podemos incurrir en un modelo no válido. En el caso de la significación individual (t_{exp}), esta cambia con respecto a la estimación por MCO y, al igual que en el caso anterior, esto puede ser positivo si se consigue que los coeficientes sean significativamente distintos de cero.
- La regresión con variables ortogonales, al igual que la alzada, mantiene el coeficiente de determinación (R^2) y la significación global (F_{exp}) sin cambios con respecto a la estimación MCO. La variable ortogonalizada mantiene inalterada la significación individual (t_{exp}), así como el coeficiente estimado y su desviación típica estimada correspondiente. La significación individual de las demás variables sí que sufre cambios. En el caso de un modelo con dos variables explicativas, la multicolinealidad es eliminada. Además, la nueva interpretación de la variable ortogonalizada puede servir para dar respuestas no accesibles con el modelo original.

En segundo lugar, se han aplicado los resultados anteriores a un conjunto de datos reales. Se observa que:

- Hemos visto de forma empírica que la regresión con variables ortogonales es el límite de la alzada cuando λ tiende a infinito. Luego, para valores de λ razonablemente altos, ambas técnicas de estimación pueden proporcionar resultados similares.
- La regresión con variables ortogonales y alzada son preferibles a la regresión cresta, ya que las primeras no alteran tanto el modelo de partida y la última puede llegar a “destrozarlo”. Esta es una cuestión importante ya que la regresión cresta ha sido universalmente usada cuando en el modelo ha existido multicolinealidad grave.

k	Marquardt [5]		Zhang e Ibrahim [12]	
	TI6	TI9	TI6	TI9
0,01	10,568020	10,568020	14,949795	14,949795
0,02	6,437767	6,437767	11,747760	11,747760
0,03	4,367304	4,367304	9,724347	9,724347
0,04	3,183468	3,183468	8,330125	8,330125
0,05	2,443372	2,443372	7,311231	7,311231
0,06	1,949742	1,949742	6,534182	6,534182
0,07	1,603892	1,603892	5,922079	5,922079
0,08	1,352013	1,352013	5,427502	5,427502
0,09	1,162733	1,162733	5,019616	5,019616
0,1	1,016761	1,016761	4,677505	4,677505
0,2	0,4506237	0,4506237	2,938800	2,938800
0,3	0,3065038	0,3065038	2,277991	2,277991
0,4	0,2426567	0,2426567	1,932521	1,932521
0,5	0,2054679	0,2054679	1,721608	1,721608
0,6	0,1801438	0,1801438	1,580335	1,580335
0,7	0,1611913	0,1611913	1,479668	1,479668
0,8	0,1461387	0,1461387	1,404683	1,404683
0,9	0,1337086	0,1337086	1,346932	1,346932
1	0,1231677	0,1231677	1,301279	1,301279

Cuadro 4: FIV de la estimación cresta del modelo de rendimientos del tesoro

Término independiente	TI6	e	R^2	F de ANOVA (2,34)
0,000510643 (0,000208635)	1,53098 (0,0471128)	0,531898 (0,16668)	0,969096	533,0873

Cuadro 5: Estimación con variables ortogonales del modelo de rendimientos de las letras del tesoro (entre paréntesis las desviaciones típicas estimadas)

- Sin embargo, no queda clara la preferencia entre la regresión alzada y con variables ortogonales. Seguramente el investigador deba decidir cuál usar dependiendo de las características del modelo que desea analizar.
- La regresión con variables ortogonales es de especial interés independientemente de que exista el problema de multicolinealidad en el modelo de regresión ya que puede ser usado en casos concretos donde el investigador quiera dar respuesta a preguntas que no se pueden contestar mediante el modelo original.

Finalmente, hay dos cuestiones no abordadas en este trabajo:

- Por un lado, no se han establecido criterios sobre las variables que se han de alzar u ortogonalizar. Esta decisión depende de diversos factores y el investigador debe tomarla dependiendo del modelo con el que trabaje en cada caso. Así por ejemplo, son variables candidatas a ser transformadas, aquellas cuyos coeficientes sean significativamente distintos de cero inicialmente (ya que esa característica no cambiará) o que tenga un mayor FIV. En la regresión ortogonal hay que buscar también que los residuos de la regresión auxiliar usada tengan sentido. Así, por ejemplo, en este trabajo se ha decidido ortogonalizar la variable **TI9** ya que es la que permite establecer una interpretación coherente de los residuos. También se ha alzado esta variable para comparar los resultados proporcionados por ambas técnicas para valores altos de λ .
- Por otro lado, tampoco se han comentado posibles criterios para determinar cuáles son los valores óptimos de k y λ . Siguiendo a García *et al.* [3], se ha considerado el primer valor de k y λ que tienen un FIV asociado menor que 10.

Agradecimientos

Los autores desean agradecer al Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa de la Universidad de Granada la provisión de fondos para la investigación. También agradecemos a los revisores anónimos sus sugerencias y comentarios en el proceso de evaluación.

Referencias

- [1] Belsley, D.A. (1982). “Assessing the presence of harmful collinearity and other forms of weak data through a test for signal-to-noise”. *Journal of Econometrics*, 20, 211–253.
- [2] García, C.B.; García, J.; López Martín, M.M. y Salmerón, R. (2015). “Collinearity: revisiting the variance inflation factor in ridge regression”. *Journal of Applied Statistics*, 42(3), 648–661.
- [3] García, C.; Salmerón, R.; García, J. y López, M.M. (2016). “Estimación cresta y alzada: selección de k y λ a partir del coeficiente de correlación”. *Anales de Economía Aplicada*, XXX, 949–955.
- [4] García, J.; Salmerón, R.; García, C. y López Martín, M.M. (2016). “Standardization of Variables and Collinearity Diagnostic in Ridge Regression”. *International Statistical Review*, 84(2), 245–266.
- [5] Marquardt, D.W. (1970). “Generalized inverses, ridge regression, biased linear estimation and nonlinear estimation”. *Technometrics*, 12(3), 591–612.

- [6] McDonald, G.C. (2010). "Tracing ridge regression coefficients". *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 2, 695–703.
- [7] Novales, A. (1993). *Econometría*. McGraw-Hill, 2ª edición.
- [8] Novales, A.; Salmerón, R.; García, C.; García, J. y López, M.M. (2015). "Tratamiento de la multicolinealidad aproximada mediante variables ortogonales". *Anales de Economía Aplicada*, XXIX, 1212–1227.
- [9] O'Brien, R.M. (2007). "A caution regarding rules of thumb for variance inflation factors". *Quality and Quantity*, 41, 673–690.
- [10] Salmerón, R.; García, C.; García, J. y López, M. M. (2017). "The raise estimators. Estimation, inference and properties". *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46(13), 6446–6462.
- [11] Spanos, A. y McGuirk, A. (2002). "The problem of near-multicollinearity revisited: erratic vs systematic volatility". *Journal of Econometrics*, 108 (2), 365–393.
- [12] Zhang, J. e Ibrahim, M. (2005). "A simulation study on SPSS ridge regression and ordinary least squares regression procedures for multicollinearity data". *Journal of Applied Statistics*, 32(6), 571–588.

Hidden Champions in Spain: The Path to Successful Business Decisions

PEREA MUÑOZ, EVA

Department of Economics and Business
Universitat Abat Oliba CEU, Barcelona (España)
E-mail: epeream@uao.es

RIPOLL-I-ALCON, JOAN

Department of Economics and Business
Universitat Abat Oliba CEU, Barcelona (España)
E-mail: jripoll@uao.es

BERLANGA SILVENTE, VANESA

Department of Economics and Business
Universitat Abat Oliba CEU, Barcelona (España)
E-mail: vberlanga@uao.es

ABSTRACT

The last three decades have been a story of lost opportunities for Spanish industry to transform and improve their international competitiveness. However, there are some paradigmatic examples that violate this rule. This is the case of two Spanish companies: Hidden Champions and Brand Champions. These companies behave differently from the European and Spanish ones of similar size. They are more resilient in times of economic recession and are able to maintain and even increase their employment levels, while significantly increasing its sales and added value. This research therefore seeks to ascertain whether the Spanish hidden champions are good indicators of maturity, stability and growth of the Spanish economy; in addition to determining the reasons that have brought success and allowed these companies to recover faster than other firms. To do this, we have considered the quantitative and qualitative results collected by 75 Spanish companies to identify key management decisions. All this information is supplemented by personal interviews in order to capture more qualitative aspects about the nature of companies' management practices. The results show a typology of companies that behave differently from other companies. Managers believe that the development of close relations with customers is the first reason related to management that has led where they are today. The second is the continued development of new products and technology through innovation. Thirdly, managers consider internationalization, global approach and international alliances; whereas the fourth reason corresponds to high product specialization. Other reasons include talent management, strong leadership and company identity, quality and service, and close cooperation between managers and employees.

Keywords: hidden champion; brand champion; global value chains (GVC); competitiveness; internationalization.

JEL classification: L22; M21; F23; F61; L53.

MSC2010: 91B26.

Artículo recibido el 29 de septiembre de 2016 y aceptado el 13 de marzo de 2017.

***Hidden Champions* en España: el camino hacia la toma de decisiones empresariales de éxito**

RESUMEN

Las tres últimas décadas han sido una historia de oportunidades perdidas para transformar la industria española y mejorar su competitividad internacional. Sin embargo, existen algunos ejemplos paradigmáticos que contravienen esta norma general. Es el caso de las empresas españolas *Hidden Champions* y *Brand Champions*. Estas empresas se comportan de manera diferente a las europeas y españolas de tamaño similar. Son más resilientes en períodos de recesión económica y logran mantener, e incluso aumentar, sus niveles de empleo, al tiempo que aumentan significativamente sus ventas y valor añadido. Esta investigación se plantea como objetivo comprobar si los campeones ocultos españoles son buenos indicadores de la madurez, estabilidad y capacidad de crecimiento de la economía española; además de determinar las razones del éxito de estas empresas, que les ha permitido recuperarse más rápido que otras firmas. Para ello, contamos con los resultados cuantitativos y cualitativos recogidos por 75 empresas españolas para identificar las principales decisiones de gestión. Toda esta información se complementa con entrevistas personales, con el fin de captar los aspectos más cualitativos de la naturaleza de las prácticas de gestión de las empresas. Los resultados muestran una tipología de empresas que se comportan de forma diferente al resto de empresas. Los gestores creen que la primera razón de gestión que les ha llevado donde están hoy es el desarrollo de estrechas relaciones con los clientes. El segundo es el desarrollo continuo de nuevos productos y tecnología a través de la innovación. En tercer lugar, consideran la internacionalización, el enfoque global y alianzas internacionales; mientras que el cuarto lugar corresponde a la alta especialización del producto. Otras razones incluyen la gestión del talento, un fuerte liderazgo e identidad de la empresa, la calidad y el servicio, y una estrecha cooperación entre directivos y empleados.

Palabras claves: *hidden champion*; *brand champion*; cadenas de valor globales (CVG); competitividad; internacionalización.

Clasificación JEL: L22; M21; F23; F61; L53.

MSC2010: 91B26.



1 Introduction

Until some years ago, the analysis of hidden champions was restricted almost exclusively to describing the successful manufacturing performance in Germany. The underlying idea was derived from the German term *mittelstand*, as proposed by Venohr & Meyer (2007), which is a dynamic entrepreneurial network with appropriate incentives and social recognition.

The analysis inherent in Simon's canonical works (1990, 1996, 2009) was brought together by several authors between 2000 and 2016 and widely used to study the case of Greece (Voudouris *et al.*, 2000), fifteen countries of Central and Eastern Europe and Turkey (CEEMAN, 2011), Austria (AFEC, 2015) and Switzerland (Feubli & Gachet, 2015), as they are all economies with strong links to German industrial corporations. Similarly, Schaeede (2011) deepens on this idea by studying the case of Japanese hidden champions, referred to as *chuken kigyo* (strong SMEs).

Regardless of the term used, the main conclusion of all the works mentioned above is that these kinds of companies represent an important pillar for all the economies studied. These hidden champions are similar in some instances to the so-called high-growth firms, which also contribute significantly to economic growth due to their superior growth performance (Moreno & Coad, 2015). The issues we attempt to answer in this paper are:

- To analyse whether these firms were able to cope better than their Spanish and EU counterparts in difficult economic times.
- To study their progress in terms of employment, sales and value added.
- To determine whether, after the worst recession years have passed, they are able to recover faster than other firms. Highlight their performance and resilience.

Our paper is divided into four parts. In the first, we briefly describe the role of hidden champions as drivers of growth and employment in Spain's economic structure. The second analyses the progress of Spanish hidden champions in terms of employment, turnover and value added, and describes a comparison with European and Spanish firms of similar size. In the third, we present the hidden reasons that turned these firms into champions, according to the opinion of the managers of 75 Spanish firms. Finally, the last section sets out the concluding remarks of our analysis.

2 Who are Spain's Hidden Champions?

Hidden champions are small- and medium-sized enterprises —with a few large exceptions— that are characterized by being: (a) very heavily internationalised; (b) highly innovative; and (c) very dynamic organizations, making them worldwide leaders in very specific market segments (Venohr & Meyer, 2007). They usually produce highly specialized intermediate goods and are usually unknown beyond the narrow circle of their customers and suppliers. It is the widespread ignorance of these kinds of firms that prompted the name *hidden champions*. According to Simon (1990, 1996, 2009), to be considered a *hidden champion*, a company must fulfil three criteria: a) to be number one, two or three in the global market, or number one in its continent, in terms of market share; b) to have a revenue below 3 billion euros; and c) to have a low public profile. However, the relatively small size of the Spanish economy, the strong fragmentation of the industrial business and the weight of the higher service sector make it difficult to use Simon's criteria to identify Spanish hidden champions.

The size of micro or small businesses, the strong fragmentation of industrial activity and the large weight of the service sector have hindered the identification of hidden champions in Spain. Simon (1996, 2009), for example, stated that there were only 11 hidden champions in Spain. However, some of the Spanish companies identified by Simon as being hidden champions are debatable as they are

companies with well-known trademarks, which is a clear contradiction with the notion that they should be hidden¹.

Therefore, it is necessary to redefine certain criteria, otherwise there is the risk of assuming the virtual absence of such companies in Spain. In this sense, our paper provides an adjusted classification which, respecting the broad lines of the canonical work of Simon (1996), is best suited to Spanish standard.

Moreover, the nature of Spanish champions is also related to certain small and medium enterprises (SMEs) whose successful performance can be explained by means of highly differentiated final goods or services. As they are gambling on the power of the brand as a differentiation factor, we have labelled them as *brand champions*.

In our opinion, the hidden and brand champions in Spain are generally SMEs satisfying that: a) their revenues are below 1 billion euros; b) they cannot be owned by a foreign multinational that handles the Spanish company as a non-autonomous branch; c) they are the leaders in their market in their continent or they are in the top 3 in world market in terms of market share; and d) they have a low awareness profile in the case of hidden champions or they have a powerful brand in the case of brand champions.

3 Methodology

For our purpose, we have built a specific database for the Spanish economy focusing on both hidden and brand champions.

We have used the technique of non-probabilistic quota sampling, which is a non-probabilistic version of stratified sampling. The goal is to build a sample identical to the population to be studied in terms of its properties.

Our analysis followed three steps. The first was to detect potential champions. For three years, we identified a list of over one hundred fifty potential Spanish hidden champions by analysing several sources of information: Domestic and international statistical reports, economic studies, databases, research networks, educational institutions, business rankings, articles in business magazines and other media, consultancy reports and, information available through the ministries, chambers of commerce, and other public bodies. Company financial details were extracted from the SABI database. All the data for all these companies and all the years analysed were downloaded and studied. Starting from this initial list, the second step was to rule out companies that did not qualify to be champions either because they were currently too big or they were leaders in their Spanish market niche but with a poor degree of internationalization. The last step was to analyse the champions' mission statements, their vision and their brand and market orientation.

All this information was complemented with thorough fieldwork, based on personal interviews, in order to capture the more qualitative aspects of the nature of the companies' management practices². Next, economic and financial data for 150 firms were obtained. Finally, the initial selection of Spanish hidden champions, 127 of whom provided an answer, were asked with one key issue in mind: which factor(s) the general manager of the firm owed the success of the company to. This qualitative question was asked over the telephone between the months of October and December 2015, and was addressed to the General Manager of the company's Spanish headquarters, although on occasions it was delegated and answered by other high-ranking executives. The question was articulated as follows: "State three

¹ For example, Simon's analysis identifies two leading companies in traditionally produced sparkling wines and a world leading producer of a lollipop, as Spanish hidden champions. However, we argue that they cannot be considered hidden champions as they have several trademarks well-known around the world.

² For consistency, we have followed the same questionnaire format used by CEEMAN (2011), a research report on hidden champions in Central and Eastern Europe (CEE).

management decisions, taken during the past five years, which have been key for the success of your company”. Some considerations may be helpful to understand the methodology that was applied:

- First, an e-mail survey based on some closed questions was discarded because it was considered it would not offer the richness and quality that were pursued;
- Therefore, a telephone interview was chosen, to allow an in-depth conversation required by the complexity of the subject;
- Being the objective to find out the “keys success factors of these companies”, the question was articulated as “most important management decisions” that can explain for the actual success. Of course, such a question was in fact the trigger for an in-depth conversation and not just a cold aseptic answer;
- Qualitative data were analysed weighing the importance of such decisions and organising them in factors;
- Limitations can come from the limited availability of the general managers, their general lack of time to devote to interviews and also a certain privacy and confidentiality of the subject: Answers at times were more vague and general than the interviewer would have desired. Future research lines will tackle these limitations.

Data for hidden champions were compared to general data for the European Union. In that respect, the most accurate and quality data come from Eurostat. The definitions of the three main variables studied are the following:

- Persons employed (defined as the total number of persons who work in the observation unit - inclusive of working proprietors, partners working regularly in the unit and unpaid family workers-, as well as persons who work outside the unit who belong to it and are paid by it, e.g. sales representatives, delivery personnel or repair and maintenance teams);
- Turnover (it comprises the totals invoiced by the firms during the reference period; i.e. market sales of goods or services supplied to third parties);
- Value added at factor costs (it is the gross income from operating activities after adjusting for operating subsidies and indirect taxes).

4 Data

We have compiled a database that includes the balance sheet and the profits and losses of each company for the period 1995-2015. Using this data, which was taken from annual corporate reports, we provide several indicators, including number of employees, value added, turnover, equity, EBITDA and cash flow. This allows us to describe accurately the nature of hidden and brand champions. Table 1 shows the main database indicators corresponding to 2015.

We identified 127 Spanish companies that qualify to be hidden champions (77) or brand champions (50). They are mainly SMEs (68.5%) and family-owned businesses (60.1%). Their average value added was approximately €31.6 million in 2015. Hidden and brand champions’ equity was €52.6 million and €53.3 million, respectively. The average turnover is €91.3 million for hidden champions and €71.2 million for brand champions, generating an EBITDA of €9.3 million and €15.8 million respectively for hidden and brand champions. Cash flow lies at around €9.3 million for hidden champions and €15.8 million for brand champions.

We also calculated various ratios in terms of leverage, return on shareholders’ funds, return on capital employed, return on total assets, liquidity and solvency ratios, which offer a clear profile of profitability and solvency for each company for each year available.

Table 1. Spanish hidden and brand champions: database summary (2015)

		Hidden Champions (1)	Brand Champions (2)	Aggregate (3= 1 + 2)
Enterprises	<i>Number of companies</i>	77	50	127
Company Seniority	<i>Number of years (average)</i>	44	32	39
Family Enterprises	<i>Number of companies</i>	51	26	77
Small & Medium Enterprises	<i>Number of companies</i>	48	39	87
Employees	<i>Number of Employees (average)</i>	251	202	231
Value Added	<i>Average (in euros)</i>	25,659,009	40,507,147	31,646,162
Turnover	<i>Average (in euros)</i>	91,309,110	71,194,330	83,198,312
<i>Revenues from exports</i>	<i>As a percent of revenues</i>	73.2	61.4	67.3
Equity	<i>(average, in euros)</i>	52,610,572	53,325,998	52,899,050
EBITDA	<i>(average, in euros)</i>	10,874,970	16,297,514	13,061,479
Cash Flow	<i>(average, in euros)</i>	9,338,237	15,861,030	11,968,395
Leverage	<i>(average, as a percent)</i>	48.9	53.9	50.9
General Liquidity	<i>(average, as a percent)</i>	1.9	2.3	2.1
Return on Shareholders' Funds	<i>(average, as a percent)</i>	17.3	24.2	20.1
Return on Capital Employed	<i>(average, as a percent)</i>	14.9	12.0	13.7
Return on Total Assets	<i>(average, as a percent)</i>	7.9	5.7	7.0
Liquidity Ratio	<i>(average, as a percent)</i>	1.4	1.8	1.6
Solvency Ratio	<i>(average, as a percent)</i>	51.0	46.1	49.0

Source: Authors.

In particular, in 2015, hidden champions' leverage ratio was below 49%, while for brand champions it stood at 54%. In addition, liquidity was above 2, which accounts for a solvency ratio over 50%.

The average profitability is high according to a return on shareholders' funds of 20% (17.3% for hidden champions and 24% for brand champions), a return on capital employed of 13.7% (15% for hidden champions and 12% for brand champions) and a return on total assets of 7% (8% for hidden champions and over 6% for brand champions).

Most hidden champions in Spain are small and medium-sized family-owned businesses that have their origins in traditional sectors such as textiles and clothing and the metal and chemical industries; they also have significant roots in the community in which they are located. Family firms are resilient, as they have certain characteristics that present special opportunities for them. Therefore, family firms can be relatively more innovative and entrepreneurial than their non-family-run counterparts (Chrisman *et al.*, 2011). They are global leaders in certain business-to-business (B2B) market niches, a position that is fiercely defended through continued investment aimed at improving products or output processes in terms of quality and precision. They compete in the top-end market to provide ultimate technical solutions (Service Vision is a good example of this) or by supplying highly reliable intermediate goods (Graphenea, for example); but above all, they are continuously building very solid business relationships with their

customers. Through them, they are able to discern market trends better and anticipate future developments. However, their customers demand high quality, so companies need to adapt and innovate in order to satisfy customers' needs. ANTEC is one such example. As production processes and technology mature, specialization needs emerge and the value added moves to component suppliers. According to Venohr & Meyer (2007) and Schaede (2011), this factor, common to both German and Japanese industries, explains the origin of hidden champions. As noted by Myro & Gandoy (2009), Spain's industrial structure, especially since the second half of the 1990s, seems to have begun a process of divergence due to the stagnation in high-tech manufacturing, which is a distinguishing feature of the Spanish economy relative to other advanced countries.

Extreme specialization, as is the case of Metalogenia or Mikalor, invariably means that idiosyncratic investment is associated with high sunken costs. However, despite their business strategies, Spanish hidden champions are becoming highly profitable companies and leaders in their market niche, as greater openness in international trade increases national market size, making it possible to gain increasing returns from scales of economies and learning by doing. In addition, hidden champions are very competitive and flexible companies that are able to adapt to a changing global environment, as their versatility and ability to grow—even in uncertain and difficult situations like the present-day—have proved. While most Spanish industrial companies have lost market share to foreign companies located in China, South Korea, Taiwan or Malaysia, these Spanish micro- and small-sized companies have carved out sophisticated niches that are hard to enter. This is, for example, the case for Metalocaicho, which has a physical presence in both India and China so as to be able to enter these markets. Their extreme specialization could be considered, *a priori*, a weakness since these companies can also be ousted from their top position by companies from emerging countries capable of quickly assimilating technology that allows costs to be lowered (Kotha, 1995). The standardization of output processes, described by Vernon's product life cycle (Vernon, 1966), explains why many goods that incorporate certain technologies are becoming commodities. Indeed, if the production process or the medium-to-low technology product can be standardized, then eventually, it will be cannibalized by emerging market companies that are much more competitive in terms of costs.

Indeed, the real secret of Spanish hidden champions has been to focus their activity on very specific intermediate goods such as electrical components, chemicals (for example, Grifols) and precision machinery components (Telstar), whose mass production is extremely complicated due to final product specificity. Consequently, they personify '*tailor-made*'. Here, continued innovation and customization are two key aspects that hinder standardization and help to explain the success of hidden champions in Spain. Indeed, continued innovation and customization are two very powerful barriers to entry. Therefore, once these companies become technological leaders in their niche, it is difficult to oust them from that position. The control of empirical technology and the production processes accumulated over the years present a huge barrier to entry that prevents access by any potential rival.

On the other hand, by working closely with their customers, hidden champions become an active part of customers' strategic planning, as their ability to provide intelligent solutions in difficult situations makes them a strategic partner and an expert on their customers' specific needs. Many Spanish companies have refined their supply chain, made their production process more flexible and improved their distribution networks in order to reach distant markets as quickly as possible. Industrial companies, such as Mace, Ausa and Metalogenia, have even built their own machinery to develop their specific products not only to protect and improve their technology, but also as a mechanism to control output costs and maintain, paradoxically, a certain degree of independence from their suppliers.

Some champions have opened factories overseas to outsource production phases with lower value-added in order to allow them to focus on more specific activities located on the right or left of smile curve, that have raised as their core business activities.

Financial caution and close cooperation between management and employees are other hallmarks of Spanish hidden champions. They have built their own culture and practices with which their employees identify. This has resulted in the hidden champions achieving high productivity, low staff

turnover and absenteeism, and deep loyalty. In demanding times, these types of companies cannot afford to lay off staff because once they lose their best-trained people, it takes a great deal of time and money to find skilled workers. In these circumstances, the company staff becomes a key asset that should be continuously trained. In fact, the belief that the real strength of the company lies in the quality of its employees explains why these companies usually prefer gradual organic growth over time, rather than venturing into mergers or acquisitions.

Spanish hidden champions are quite conservative. Spain, like Germany, has a poor record of generating start-ups or at quickly turning small firms into giants. Spanish companies, as *mittelstands*, feel comfortable remaining small.

5 Results

5.1. SMEs as drivers of growth and employment in Spain

SMEs are key in Spain. According to the European Commission (2015), there are 2.22 million SMEs, representing over 99% of companies in the country. They provide work for more than 73% of Spanish employed people and generate over 63% of the national income.

The business structure is characterised by a large atomization (size of firms is very small), explained by the considerable importance of the tertiary sector in the Spanish economy. According to the INE (Spanish Statistical Office), 78.8% of Spanish companies are active in services, with retail trade at a significant 24.2%.

But the most remarkable feature of Spanish SMEs is their contribution to employment generation and value added creation. The SMEs' employment is 6.4 points higher than EU-28 average. In particular, smaller companies employ most workers. Micro-enterprises represent 40.6% and small- and medium-sized businesses almost 33% of total employment. On the other hand, SMEs' contribution to total Gross Value-Added (GVA) is 5 points higher than EU-28 average, with small and medium sized enterprises generating 36.7% of total GVA.

Indeed, as we can see in Figure 1, the importance of SMEs in the southern member states of the EU-28 (such as Greece, Italy, Portugal, and Spain, as well as certain Baltic countries such Estonia or Lithuania) is higher than in the rest of the European Union.

5.2. Evolution of employment, sales and value added

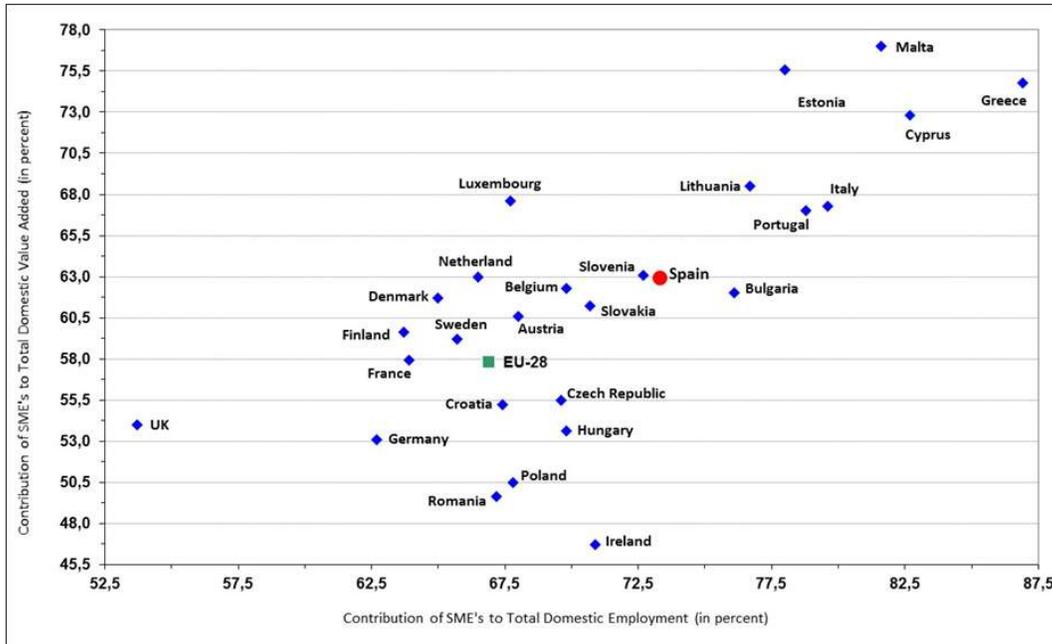
One of the objectives of this paper is to find out whether hidden champions are more successful than other businesses. But this leads to a further question: what is success in business? Of course, success depends on goals. If the goals are achieved or overachieved, a company is successful (Simon, 1996). Since one of the preoccupations of Europe, and indeed Spain, is employment, this one was the first variable that was chosen for analysis. Next, two additional variables were selected based on the two criteria of relevance and data availability (company data and Eurostat statistics). We therefore chose to analyse sales (or turnover) and value added. EU totals include data for all the member states that belonged to the European Union in the reference year.

5.2.1. Evolution of hidden champions

First, the evolution of the hidden champions was analysed for the years for which data existed; in this case, the period between 2001 and 2014. In those 13 years, two clear periods were detected:

- The boom years, where the GDP was growing (2001-2007);
- Followed by the recession years, characterised by a drop in the GDP (2008-2014).

Figure 1. SMEs contribution to value added and employment in EU-28

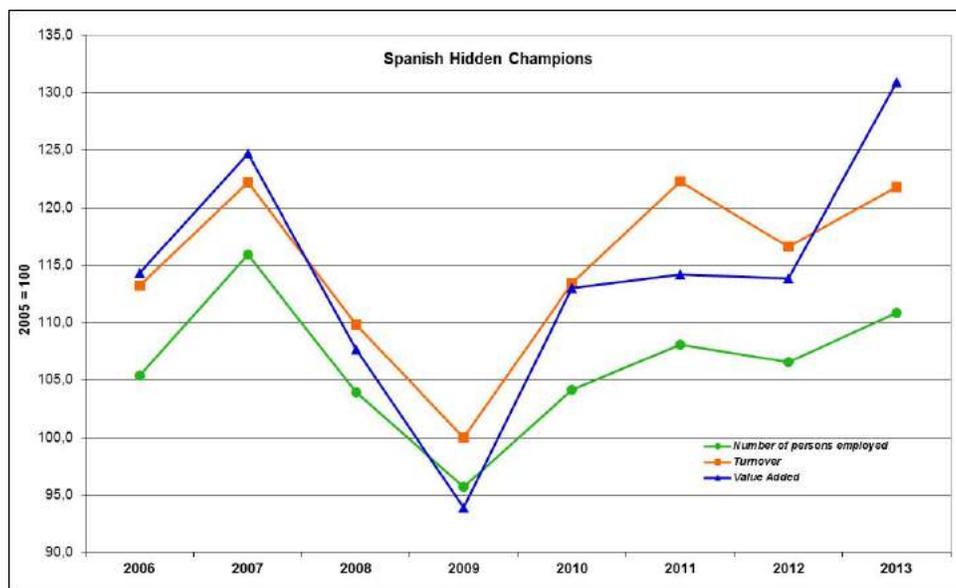


Source: Authors' own elaboration based on SBA fact Sheets by European Commission (2011).

Note: Estimates for 2014, based on 2008–2012 figures from the Structural Business Statistics Database (Eurostat).

The values taken reflect the average of each period. We expected to see a decrease in the variables analysed due to the negative impact of the economy in the second period (2008–2014) compared to the previous years. However, hidden champions saw the average number of persons employed increase by 7.5%, while sales went up by 16.1% and value added by 13.8%. These data clearly demonstrate the resilience of the hidden champions in difficult times. However, profit margins did show a slight decline, dropping from 6% on average for the 2001–2007 period to 4% in the recession years. Although this certainly represented a slowdown, at least the margins were still positive. Figure 2 shows the evolution of the three variables for hidden champions in the period.

Figure 2. Evolution of Spanish hidden champions 2006–2013



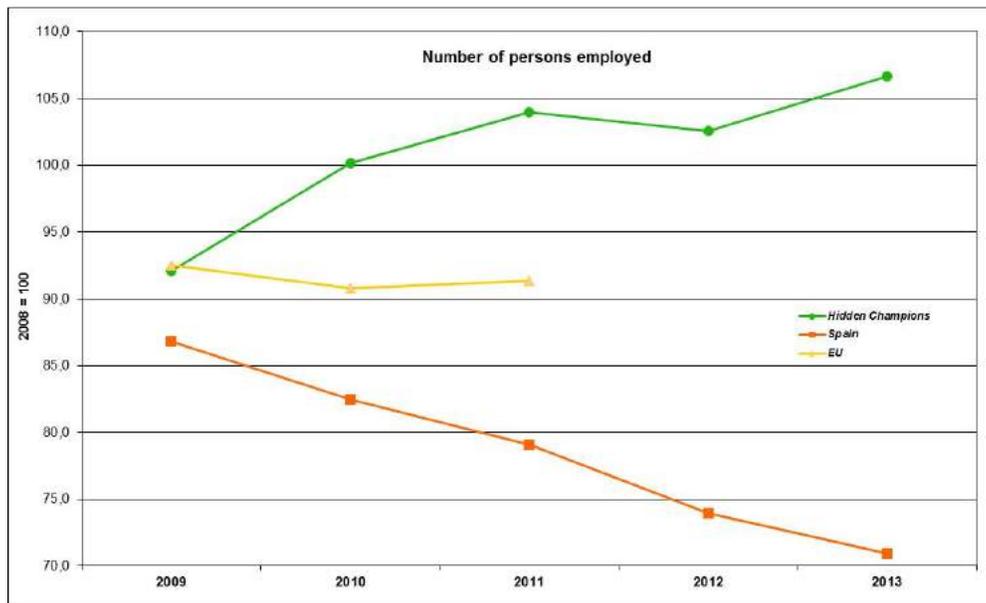
Source: Own research.

Subsequently, however, the analysis had to be restricted to the years 2005 to 2013 in order to compare it with European data. First, the behaviour of hidden champions was analysed for this period together with the variables number of employees, sales and value added. These firms all followed a similar pattern:

- The first two years (when the economy was still booming, 2005-2007), showed significant increases in the three variables of 15, 22 and 25% respectively;
- After 2007, the economic recession struck heavily and these companies were hit hard in the following two years, with losses of 8% in employment and sales, while value added was more seriously affected, dropping by 25%.
- However, by 2010, hidden champions had resumed steady growth and have continued to do so since then. In fact, in the period 2010-2013, employment went up by 6%, sales by 7% and value added soared by 16%.

Before we continue with our analysis, however, it would be pertinent to put these data into perspective by analysing the evolution of unemployment in Spain during this period. Rates went from 9.2% in 2005 to the extremely low level of 8.2% in 2007, but then soared to 20% in 2010 and to over 26% by 2013. This gives an indication of the severity of the recession that Spain was facing, which was the most acute that the country had ever experienced. However, while employment was lost by millions, Spanish hidden champions managed to react on time, maintain staff levels and even recruited after the first impact.

Figure 3. Comparison of number of persons employed in the EU, Spain and Spanish hidden champions



Source: own research and Eurostat data.

In conclusion, it can be confirmed that, in times of severe recession, Spanish hidden champions showed a high level of resilience and although their profits levels fell, they managed to keep and slightly increase their employment levels, while significantly increasing their sales and value added.

5.2.2. Comparison between Spanish hidden champions and their European counterparts

As has been stated before, most Spanish hidden champions are family-owned businesses. According to Amann & Jaussaud (2012), family businesses perform better and tend to recover to a greater degree or more easily from an economic downturn and persist in their stronger performance. In this section, we

compare the behaviour of the Spanish hidden champions analysed here with similar-sized manufacturing companies in Spain and the European Union to determine whether they perform better or not in situations of economic downturn.

A statistical analysis was carried out in which the behaviour, in terms of number of persons employed, sales and value added, of the 75 hidden champions was compared with:

- All manufacturing SMEs with 10 to 249 persons employed in Spain and in the EU as a whole;
- All small, medium and large manufacturing companies with more than 10 persons employed in Spain and in the EU as a whole.

We elected to study the period 2005 to 2013 as it allowed us to study the behaviour before the recession (2005-2007), when the crisis first struck (2008-2010) and the following years (2011-2013). A statistical contrast for equality of proportions was then carried out. With one exception—the evolution of value added for companies of 10 or more employees in the EU, which were inconclusive—all findings were significant. Therefore, it can be confirmed that hidden champions behaved differently in the period 2005-2013 in terms of employment, sales and value added, from the rest of manufacturing businesses in Spain and in the EU.

Table 2 shows the p -values for the contrast for equality of proportions. As can be observed, in all the cases except one, $p < 0.05$ holds.

Table 2. p -values YEARS

Variable	EU	Spain
Persons employed	0.0015	0.0133
Turnover	0.0000	0.0034
Value Added	0.0048	0.0588

Source: Own research.

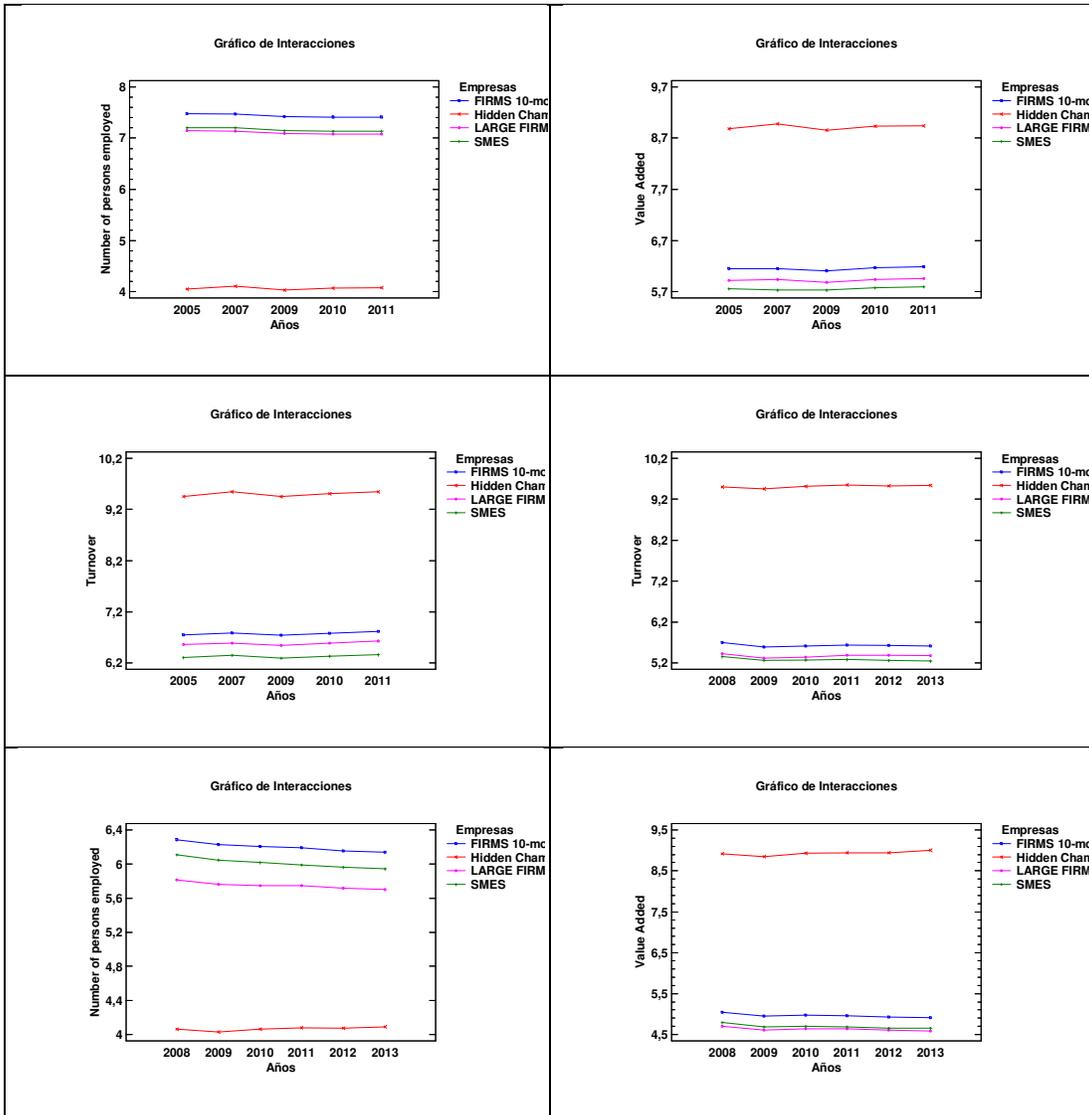
Figures 4 to 9 show the different patterns of behaviour for Spanish hidden champions in the three variables compared to EU and Spanish firms.

Table 3 shows the evolution of the three variables for manufacturing firms with 10 or more persons employed for Spanish hidden champions, Spain and the EU as a whole (27 countries), respectively:

The main conclusions that can be drawn from the table above are:

- Employment levels decreased for firms with more than 10 persons employed in both Spain and Europe as a whole; however, this is not the case for Spanish hidden champions, which were able to retain staff and even create new jobs;
- In terms of turnover, Spanish firms with ten or more persons employed suffered a decline in sales. Europe, on the contrary, managed to increase turnover in the same period as a whole, as did Spanish hidden champions. The most difficult years were 2008 and 2009. However, after that, a remarkable recovery can be seen;
- Regarding value added, a similar conclusion can be drawn: Spanish firms saw a decrease in their data, while European and Spanish hidden champions managed to resume growth after a decline in the years 2008 and 2009.
- While for firms the worst years on average were 2008 and 2009, a real recovery can be observed from 2010 onwards for Spanish hidden champions and European firms. However, data for Spain continue declining throughout the period, including 2013.

Figures 4 to 9. Hidden champions versus other firms; interactions for variables employment, turnover and value added



Source: Own research.

Table 3 Evolution of persons employed, turnover and value added, in manufacturing firms 10 or more persons employed)

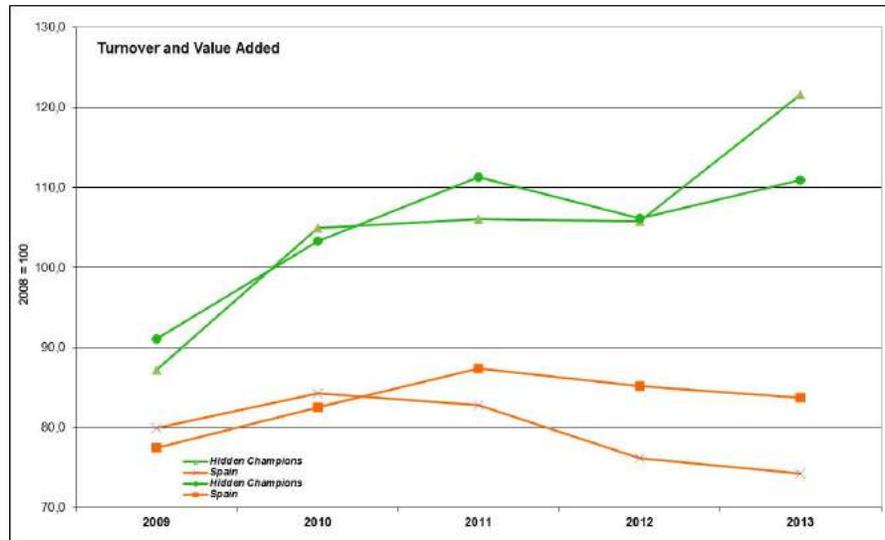
	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Persons employed									
Hidden Champions	11,112	11,710	12,876	11,548	10,636	11,569	12,008	11,841	12,315
Spain	N/A	N/A	N/A	1,942,947	1,687,035	1,601,712	1,536,175	1,436,709	1,377,978
EU	29,818,200	N/A	29,663,800	28,274,000	26,148,500	25,678,500	25,820,500	N/A	N/A
Turnover (€)									
Hidden Champions	2,848,536,680	3,224,378,045	3,480,801,549	3,127,895,453	2,847,896,365	3,230,662,983	3,481,811,042	3,320,128,218	3,468,823,720
Spain	N/A	N/A	N/A	498,553 × 10 ⁶	386,203 × 10 ⁶	411,516 × 10 ⁶	435,787 × 10 ⁶	424,564 × 10 ⁶	417,638 × 10 ⁶
EU	5,633,104 × 10 ⁶	6,102,097 × 10 ⁶	6,166,050 × 10 ⁶	N/A	5,458,377 × 10 ⁶	6,039,207 × 10 ⁶	6,599,873 × 10 ⁶	N/A	N/A
Value Added (€)									
Hidden Champions	759,779,528	868,492,092	947,172,904	817,744,276	713,287,767	858,487,827	867,349,553	864,910,961	994,578,285
Spain	N/A	N/A	N/A	112,373 × 10 ⁶	89,873 × 10 ⁶	94,680 × 10 ⁶	93,052 × 10 ⁶	85,649 × 10 ⁶	83,411 × 10 ⁶
EU	1,400,605 × 10 ⁶	N/A	1,394,403 × 10 ⁶	N/A	1,292,053 × 10 ⁶	1,468,969 × 10 ⁶	1,526,607 × 10 ⁶	N/A	N/A

N/A: Not available

Source: own research and Eurostat

Figure 10 shows the comparison of evolution of turnover and value added in the EU, Spain and Spanish hidden champions in the period 2008 to 2013.

Figure 10. Comparison of evolution of turnover and value added in the EU, Spain and Spanish hidden champions in the period 2008 to 2013



Source: Own data and Eurostat.

5.3. Unveiling the management decisions behind hidden champions

Having established that Spanish hidden champions behave differently from their Spanish and European counterparts, the management decisions that lead to their success were then determined. A questionnaire was sent to over 100 hidden champions, 75 of whom provided answers, to determine the reasons which the general manager of the firm attributed the success and resilience of the company. This questionnaire was carried out over the telephone during the months of October and December 2015 and was addressed to the general manager, although on some occasions the interview was delegated and answered by other high-ranking executives.

The question was articulated as follows: “State three management decisions, taken during the past five years, which have been key to the success of your company. Choose from the list below [possible answers were suggested] or add new ones if you prefer”. According to Simon (1996), seven factors explain the success of hidden champions:

1. The market: Hidden champions define their markets narrowly. Consequently, their markets are relatively small. Following Porter (1985), hidden champions’ competitive scope falls within the narrow-target category of focus differentiated.
2. The world: Hidden champions did not become world leaders by staying at home and waiting for customers to call on them. Rather they went out into the world to make their products and services readily available wherever their customers were. Hidden champions export more than half of their production and occasionally up to 80 and 90%. They have a true global scope.
3. The customer: Hidden champions maintain close customer relationships that are characterized by a mutual dependence. Customers would normally find it very difficult to replace the products that hidden champions supply. There is a strong commitment on both sides that forms the basis for a long-term relationship based on trust and respect.

4. Innovation is central to all hidden champions. Most have achieved world- or continent-wide market leadership because they gained the lead in certain essential aspects of technology or management practices in their markets.
5. Strategy: Hidden champions' strategies take the form of differentiation rather than cost advantage, based on product quality and service. Their superior internal resources and capabilities are difficult to imitate and therefore allow sustainability.
6. The team: Employees identify with company goals and values more intensely than employees in average firms. Such high motivation leads to high productivity, and hidden champions are able to attract and retain talent better than most.
7. The leaders: Executives of hidden champions are highly focused on their business, and extremely enthusiastic and powerful. Continuity of leadership is a general trait, with the leader remaining at the helm for a very large number of years. Since hidden champions are also frequently family businesses, ownership and management functions often overlap, placing such leaders in very strong positions.

Following those seven factors, a list was made of the possible decisions behind their success. Table 4 shows the main management decisions, some of which were subsequently added to the original proposed list, that explain the superior position enjoyed by the Spanish hidden champions analysed in this study, or at least, how managers explain the success of their company.

Table 4. Management decisions, taken during the past five years, which have been key to the success of the company, by order of importance

Key management decisions for company success	Detailed description
Closeness to the customer (close relationships characterized by mutual interdependence with customers)	Solutions and design tailored to meet customers' requirements. Stress of the term "solutions provider". Consulting often offered as well, which constitutes an intelligent move towards services.
Continuous innovation	Incremental product and technology innovation (Freel & Robson, 2004). Continuous development of new products. Innovation at every corporate level and the most fundamental element throughout the company's entire structure.
Internationalization	Most of production exported or already manufactured in destination markets. World as a source of resources. They have a global approach and boast international alliances.
High product specialization	Extremely narrow focus but with a global approach
Talent management to create a high-performance organization that meets its strategic and operational goals and objectives	Very qualified, highly skilled workforce and talent retention schemes (Robson & Bennett, 2000), among others. Versatile teams, global thinking team players with continuous in-company training. Workforce as the main company asset.
Quality and Service	Products of the highest quality and with very high added value. Accent on quality standards and awards. Offer solutions to customers' needs, offering close collaboration through service.
Strong leadership	Strong leaders with simple, clear and unifying objectives; with a vision clear and big enough to provide a common vision (Drucker, 1988).
Communication of mission, vision and goals throughout the company (Simon, 1996)	Close cooperation between management and employees
Strong company identity	Company character backed up by ability to deliver on their promise, which drives the entire organization to perform.
Flexibility, lack of bureaucracy	Scanning the environment and reacting quickly to external changes (Box <i>et al.</i> , 1994)
Focus on being providers to top world customers	Significant barriers to switching exist for both sides, which leads to long-term relations.

As the culmination of our article and to exemplify the above, it would be worth describing in more detail two cases of Spanish hidden champions: one from the south and another from the north of Spain. They make two completely different products, but both are, in any event, champions and worthy of study.

Ice rinks and Andalusia are not words we usually associate, but then selling ice to Eskimos was never an easy task either. Xtraice typifies the Spanish Hidden Champions we analyse in this paper. Created twelve years ago in the south of Spain, where summer temperatures often exceed 45°C, Xtraice combines all the attributes that we have come to expect from these SMEs which surfed the crisis unscathed:

- World leaders in a very narrow and specialised product segment: Synthetic ice for entertainment and professional use.
- Certified product quality and environmental performance.
- International presence in 75 countries (most of the sales achieved outside of Spain).
- World renowned customer references.
- A team focused on innovation, state of the art engineering and training.

Another feature which perhaps characterises hidden champions is that they appear where you least expect them to.

At the other side of the state, in the Basque Country, we stumble across another hidden champion, Walter Pack, specialised in providing solutions for the design and production of plastic parts and thermoforming, mainly for the automotive industry. Besides dedicating a high proportion of its financial and human resources to R&D, innovation and training, Walter Pack is particularly interesting on two counts: they have a production plant in India (not a frequent occurrence for medium sized Spanish companies) and they are part of a network of companies committed to sustainable social and human development. Proof, if needed, that being a good corporate citizen can be a profitable activity.

As a future research line, the existence of regional differences among hidden champions in Spain will be studied.

6 Conclusions

Until now the analysis of hidden champions has been restricted almost exclusively to German industry. In this paper, hidden champions have been detected in the Spanish economy. These are characterized by mainly being small- and medium-sized companies —though there are a few slightly larger ones— with sales below 3 billion euros, occupying positions between one and three in the global or continental market and enjoying a low level of public awareness.

Spanish hidden champions place emphasis on their traditional strengths in their *'old-fashioned'* industries without mechanically copying other industrial development stereotypes. They have often found their market niches by accident rather than the result of any deliberate decision. Those market niches that initially appear small have evolved into huge global markets.

Spanish hidden champions can be considered good indicators of the maturity, stability and growth capability of the domestic economy: Our study shows firstly that Spanish hidden champions have greater resilience to the economic downturn, external shocks, and structural adjustment processes. Secondly, they are highly innovative and productive companies. Thirdly, the international competitiveness and export capacity of the Spanish economy relies on this particular type of SME, as they are sound and strong exporters in their very specific market niches, rather than on a few large-scale national champions. The fourth lesson is that Spanish hidden champions can help preserve high-quality jobs in a vast array of industries. Indeed, they are creating new jobs —well above the average for their manufacturing sector, and help curb the current emigration of skilled people.

In difficult times, hidden champions showed a high level of resilience and, although their profits levels were lower, they managed to maintain or indeed slightly increase their employment levels, while significantly increasing their sales and value added. In the period 2005-2013:

- Employment levels decreased for firms with more than 10 persons employed both in Spain and in Europe as a whole; however, it is not the case for Spanish hidden champions, which were able to retain staff and even create new jobs;
- With regard to turnover and value added, Spanish firms with ten or more persons employed suffered a decline in both. European firms, on the contrary, managed to increase their turnover and value added in the same period as a whole, as Spanish hidden champions did. The most difficult years were 2008 and 2009, but in the following years, a remarkable recovery can be seen;
- While for all firms the worst years were 2008 and 2009, a real recovery can be observed from 2010 onwards for hidden champions and European firms. However, data for Spain continue declining throughout the period, including 2013.

Having established that these hidden champions behave differently from their Spanish and European counterparts, we then aimed to establish what management decisions lie behind their success. To do that, the general managers of an initial selection of Spanish hidden champions were interviewed in order to find out which management decisions they owed the success of the company to. According to Simon (1996), seven factors explain the success of hidden champions: their market, the world, their customers, innovation, their strategy, their team and their leaders. According to our survey, managers believe that the main reason behind their company's success is the development of close relationships, characterized by mutual dependence with their customers that offer solutions tailored to meet their requirements. The second reason was implementing innovation at every corporate level, leading to the continuous development of technology and new products. The third reason behind their success is their global approach, international alliances and considering the whole world as a pool of resources. In fourth position the very high product specialization was placed, with an extremely narrow focus but global approach. The fifth place corresponds to talent management: The view of the team as the most valuable asset of the company and which was always highly qualified and supported by continuous training. Another point that was stressed was the importance of quality above competitors and offering an excellent service. Other reasons mentioned included leadership (strong leaders with simple, clear, unifying objectives), strong company identity, close cooperation between managers and employees, flexibility, lack of bureaucracy and finally, the focus on a few, top global customers.

In conclusion, we have detected a link between our quantitative data (coming from financial company information and Eurostat data) and our qualitative data, regarding the key management decisions that explain the success of a group of distinctive firms known as "Hidden Champions". Hidden champions in Spain may differ from those in other countries, but they do exist and represent a group of firms characterised by a different –and better in terms of results– behaviour. While these results are encouraging, future research lines open in order to analyse all this further: Are there regional differences in Spain?; What should the industrial policy strategy be?; How can the strategy for SMEs be moved towards a champion strategy?

Acknowledgments

This research work has been funded by a Banco de Santander grant corresponding to Banco de Santander Research Funding Program.

References

- AMANN B. & JAUSSAUD J. (2012): "Family and non-family business resilience in an economic downturn". *Asia Pacific Business Review*, 18(2), 203-223.
- AFEC (2015): *Fresh View Special Edition: Austria's Hidden Champions*. Vienna: Austrian Federal Economic Chamber.
- BOX, G.E.P.; JENKINS, G.M. & REINSEL, G.C. (1994): *Time series analysis. Forecasting and control*, 3rd ed. Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- CEEMAN (2011): *Hidden champions in CEE and dynamically changing environments*. Research Report. Bled: Central and East European Management Development Association.
- CHRISMAN, J.; CHUA J. & STEIER, L. (2011): "Resilience of Family Firms: An Introduction". *Entrepreneurship Theory and Practice*, 35(6), 1107-1119.
- DRUCKER, P.F. (1988): "The Coming of the New Organization". *Harvard Business Review*, 66(1), 45-53
- EUROPEAN COMMISSION (2011): *SBA fact Countries Sheets*. Several issues.
- FEUBLI, P. & GACHET, E. (2015): The Hidden Swiss Champions: Small but World Class. Credit Suisse. Available at: <https://www.credit-suisse.com/corporate/en/articles/news-and-expertise/the-hidden-swiss-champions-small-but-world-class-201506.html>.
- FREEL, M.S. & ROBSON, P.J.A. (2004): "Small Firm Innovation, Growth and Performance: Evidence from Scotland and Northern England". *International Small Business Journal: Researching Entrepreneurship*, 22(6), 561-575.
- KOTHA, S. (1995): "Mass customization: implementing the emerging paradigm for competitive advantage". *Strategic Management Journal*, 16(5), 21-42.
- MORENO, F. & COAD, A. (2015): "High-growth firms: Stylized facts and conflicting results". In A.C. Corbett, J.A. Katz & A. Mckelvie (eds.): *Entrepreneurship Growth: Individual, Firm, and Region*. Bingley: Emerald Publishing Group, pp. 187-230.
- MYRO, R. & GANDOY, R. (2009). "Capítulo 8: Sector industrial". In J.L. García Delgado & R. Myro (eds.): *Lecciones de Economía Española*. Madrid: Thomson-Civitas, pp. 96-111.
- PORTER, M.E. (1985): *Competitive Advantage: Creating and Sustaining Superior Performance*. New York: The Free Press.
- ROBSON, P.J.A. & BENNETT, R.J. (2000): "SME Growth: The Relationship with Business Advice and External Collaboration". *Small Business Economics*, 15(3), pp 193-208.
- SCHAEDE, U. (2011): "Show Me the Money: Japan's Most Profitable Companies in the 2000s". *DBJ Discussion Paper Series*, 1211. Available at: http://www.dbj.jp/ricf/pdf/research/DBJ_DP_1211.pdf.
- SIMON, H. (1990): "Speerspitze der deutschen Wirtschaft". *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, 60(9), 875-890.
- SIMON, H. (1996): *Hidden Champions: Lessons from 500 of World's Best Unknown Companies*. Boston: Harvard Business School Press.
- SIMON, H. (2009): *Hidden Champions of the 21st Century: Success Strategies of Unknown World Market Leaders*. London: Springer.
- VENOHR, B. & MEYER, K. (2007). "The German miracle keeps running: How Germany's hidden Champions Stay Ahead in the Global Economy". *Working Papers of Institute of Management Berlin at Berlin School of Economics*, 30. Available at: <http://hwr->

berlin.com/fileadmin/downloads_internet/Forschung/Veroeffentlichungen/Working_paper/working_paper_30.pdf.

- VERNON, R. (1966): "International investment and international trade in the product cycle". *Quarterly Journal of Economics*, 80(2), 190-207.
- VOUDOURIS, I.; LIOUKAS, S.; MAKRIDAKIS, S. & SPANOS, Y. (2000): "Greek Hidden Champions: Lessons from Small Little-Known Firms in Greece". *European Management Journal*, 18(6), 663-674.



UNIVERSIDAD
**PABLO DE
OLAVIDE**
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA
ECONOMÍA Y LA EMPRESA (24). Páginas 209–219.
Diciembre de 2017. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
www.upo.es/revistas/index.php/RevMetCuant/article/view/2888

Value at Risk and the Diversification Dogma

ERDELY, ARTURO

Facultad de Estudios Superiores Acatlán
Universidad Nacional Autónoma de México (México)
E-mail: arturo.erdely@comunidad.unam.mx

ABSTRACT

The so-called risk diversification principle is analyzed, showing that its convenience depends on individual characteristics of the risks involved and the dependence relationship among them.

Keywords: value at risk; loss aggregation; comonotonicity; diversification.

JEL classification: G11; G22.

MSC2010: 91G10; 91G40.

Valor en riesgo y el dogma de la diversificación

RESUMEN

Se analiza el principio de diversificación de riesgos y se demuestra que no siempre resulta mejor que no diversificar, pues esto depende de características individuales de los riesgos involucrados, así como de la relación de dependencia entre los mismos.

Palabras claves: valor en riesgo; agregación de pérdidas; comonotonidad; diversificación.

Clasificación JEL: G11; G22.

MSC2010: 91G10; 91G40.



1 Introduction

A popular proverb states *don't put all your eggs in one basket* and it is implicitly based on a *principle* (let's call it that way momentarily) of *risk diversification* which could have the following "justification": Suppose it is needed to take $2n$ eggs from point A to point B, walking distance, and that there are only two alternatives available, either one person carrying all the eggs in one basket, or two people with n eggs each in separate (and independent) baskets. The proverb suggests that there is a higher risk with the single-person alternative since if he/she happens to stumble and fall we would have a total loss, while with the second alternative only half of the eggs would be lost, and in a worst case scenario (with lower probability) where the two people fall the loss would be the same as in the first alternative, anyway.

Let X be a random variable which counts how many eggs are lost under the first alternative (one basket), and let Y account for the same but for the second alternative (two baskets). Let $0 < \theta < 1$ be the probability of falling and breaking the eggs in a basket while walking from point A to B. Then X and Y are discrete random variables such that $\mathbb{P}(X \in \{0, 2n\}) = 1$ and $\mathbb{P}(Y \in \{0, n, 2n\}) = 1$, with point probabilities $\mathbb{P}(X = 2n) = \theta$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \theta$, $\mathbb{P}(Y = 2n) = \theta^2$, $\mathbb{P}(Y = n) = 2\theta(1 - \theta)$, and $\mathbb{P}(Y = 0) = (1 - \theta)^2$. Certainly the probability of facing the maximum loss of $2n$ eggs has a higher probability under the first alternative, but it is also true that the *no loss* probability is also higher under such alternative. Moreover:

$$\mathbb{P}(Y > 0) = \theta^2 + 2\theta(1 - \theta) = \theta(2 - \theta) > \theta = \mathbb{P}(X > 0),$$

which means that there is a higher probability of suffering a (partial or total) loss under the second alternative. Therefore... does it mean that it is better to put all the eggs in one basket? If a single trip is going to take place, the answer would be yes, but if the same trip is going to be repeated a large number of times we should analyze the *long run* average loss, which would be $\mathbb{E}(X) = 2n\theta$ for the first alternative, and $\mathbb{E}(Y) = 2n\theta^2 + 2n\theta(1 - \theta) = 2n\theta$ for the second alternative; that is, in the long run there is no difference between the two alternatives.

Is it never more convenient to diversify in two baskets? If the probability of stumbling and falling with $2n$ eggs is the same as with half of them (which might be true up to certain value of n) then the proverb is certainly wrong, but maybe for a sufficiently large value of n we should consider different probabilities of falling and breaking the eggs, say θ_1 for the first alternative and θ_2 for the second one, with $\theta_1 > \theta_2$. This last condition leads to $\mathbb{E}(X) > \mathbb{E}(Y)$ and in such case it is more convenient to diversify if a large number of trips are going to be made. But for a single trip decision the condition $\theta_1 > \theta_2$ is not enough to prefer diversification unless $\theta_2(2 - \theta_2) < \theta_1$, since $\theta_2 < \theta_2(2 - \theta_2)$.

The main purpose of the present work is to show that the common belief that risk diversification is **always** better, is more a **dogma**¹ rather than a general principle that has been proved, and that the correct view is to state that risk diversification may be better, as good as, or worse than lack thereof, depending on the risks involved and the dependence relationship among them.

2 Risk measures

Let X be a continuous random variable, with strictly increasing distribution function F_X , that represents an economic loss generated by certain events covered by insurance or related to investments. Without loss of generality, we consider amounts of constant value over time (inflation indexed, for example). As a point estimation for a potential loss, we may use the mean or the median. In the present work, the median is preferred since it always exists for continuous random variables and it is robust, in contrast with the mean that may not exist or could be numerically unstable under heavy-tailed probability distributions. Using the quantile function (inverse of F_X), we calculate the median as $\mathbb{M}(X) = F_X^{-1}(\frac{1}{2})$ since $\mathbb{P}(X \leq \mathbb{M}(X)) = \frac{1}{2}$.

¹A system of principles or tenets; doctrine. A specific principle of a doctrine put forth, such as by a church. *Source:* WordReference Random House Learner's Dictionary of American English © 2016.

Definition 2.1. The *excess of loss* for a continuous loss random variable X is the random variable:

$$L := X - \mathbb{M}(X).$$

As suggested by McNeil *et al.* (2015) one way to interpret a *risk measure* is as the required additional risk capital $\varrho(L)$ to cover a loss in excess of what was originally estimated. In the specialized literature on this subject, there are many properties for risk measures that are considered as “desirable” or “reasonable”, though some concerns have been raised for some of them.

Definition 2.2. A risk measure ϱ is *monotone* if for any excess of loss random variables L_1 and L_2 such that $\mathbb{P}(L_1 \leq L_2) = 1$, we have that $\varrho(L_1) \leq \varrho(L_2)$.

McNeil *et al.* (2015) and several other authors consider monotonicity as a clearly desirable property since financial positions that involve higher risks under any circumstance should be covered by more risk capital. Positions such that $\varrho(L) \leq 0$ do not require additional capital.

Definition 2.3. A risk measure ϱ is *translation invariant* if for any excess of loss random variable L and any constant c we have that $\varrho(L + c) = \varrho(L) + c$.

This property is also considered as desirable by McNeil *et al.* (2015) and other authors under the following argument: The uncertainty associated to $L' := L + c$ totally depends on L since c is fixed, $\varrho(L)$ is the additional risk capital required to cover an excess of loss under L and therefore it would be enough to add the fixed amount c in order to cover for L' .

Definition 2.4. A risk measure ϱ is *subadditive* if for any excess of loss random variables L_1 and L_2 we have that $\varrho(L_1 + L_2) \leq \varrho(L_1) + \varrho(L_2)$.

This property cannot be considered as generally acceptable since there is some debate around it. One argument in favor is that diversification **always** reduces risk, which is more a **dogma** rather than something proved to be true under all circumstances. We may counterargue that for some risks there could be some sort of pernicious interaction that generates additional risk to the individual ones; so it may be also argued that it is better for a risk measure not to be subadditive, so that whenever it happens that $\varrho(L_1 + L_2) > \varrho(L_1) + \varrho(L_2)$ then it becomes clear that diversification is not convenient in such case.

Definition 2.5. A risk measure ϱ is *positively homogeneous* if for any excess of loss random variable L and any constant $\lambda > 0$ we have that $\varrho(\lambda L) = \lambda \varrho(L)$.

With regard to this property McNeil *et al.* (2015) and other authors mention that, in case that subadditivity has been accepted as reasonable, then for any positive integer n , it should be accepted that

$$\varrho(nL) = \varrho(L + \dots + L) \leq n\varrho(L) \tag{1}$$

and since there is no diversification “benefit” (because just a single risk source is involved), then the highest value would be attained in (1), that is equality. The same authors acknowledge there is some criticism about this property since for sufficiently large values of λ we should have $\varrho(\lambda L) > \lambda \varrho(L)$ to penalize for a high concentration of risk in a single source of it.

Definition 2.6. ϱ is a *coherent risk measure* if it satisfies Definitions 2.2 to 2.5.

The adjective “coherent” in this definition is somehow overbearing since it implicitly suggests that any risk measure that does not satisfy this definition would be incoherent despite the fact that there is some debate and concerns about two of the four properties to be required. There are other additional properties that have been proposed in some contexts, see McNeil *et al.* (2015) or Denuit *et al.* (2005), but for the purpose of this article the above mentioned ones are enough.

3 Value at risk

As suggested by McNeil *et al.* (2015), we may interpret $g(L)$ as the additional risk capital to cover for a potential excess of loss with L , but in practice such interpretation could be easily unachievable. Consider, for example, an insurance portfolio with certain face amounts for each issued policy. The only way to guarantee that the insurance company has enough resources to pay the claims under all possible scenarios would require the total reserve to be equal to the sum of all the face amounts in such portfolio.

In practice, specially under the *Basel Accords* and *Solvency II* frameworks, what is calculated is the amount of risk capital that has an *acceptable* high probability (but strictly less than 1) of covering an excess of loss that might face an insurance or financial institution. Who determines how much is “acceptable”? Typically the regulatory authority, but each company may decide to use probability levels even higher than the regulatory ones.

Definition 3.1. *Value at Risk* of level $0 < \alpha < 1$ for an excess of loss random variable L is a risk measure defined as

$$\text{VaR}_\alpha(L) := F_L^{-1}(\alpha)$$

where F_L^{-1} is the quantile function of L , that is the inverse of the probability distribution function of L .

In other words, a level α Value at Risk associated to a continuous random variable is the amount that such variable would not exceed with probability α . It should be noticed that the median is a Value at Risk of level $\alpha = \frac{1}{2}$.

Proposition 3.1. *VaR is a monotone, translation invariant, and positively homogeneous risk measure.*

Proof:

a) Let X and Y be random variables such that $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$. Then for any value $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x < Y) + \mathbb{P}(X \leq Y \leq x) \geq \mathbb{P}(\{X \leq Y\} \cap \{Y \leq x\}) = \mathbb{P}(Y \leq x),$$

that is $F_X(x) \geq F_Y(x)$. Let $x_\alpha := \text{VaR}_\alpha(X)$ and $y_\alpha := \text{VaR}_\alpha(Y)$. Then $\alpha = F_X(x_\alpha) \geq F_Y(x_\alpha)$ and since $\alpha = F_Y(y_\alpha)$ and distribution functions are non decreasing, necessarily $x_\alpha \leq y_\alpha$ and therefore $\text{VaR}_\alpha(X) \leq \text{VaR}_\alpha(Y)$.

b) Let X be a continuous random variable with strictly increasing distribution function F_X and let $c \in \mathbb{R}$ be any given constant. Define the random variable $Y := X + c$, its probability distribution function is:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X + c \leq y) = \mathbb{P}(X \leq y - c) = F_X(y - c).$$

Let $x_\alpha := \text{VaR}_\alpha(X)$ and $y_\alpha := \text{VaR}_\alpha(Y)$. Then:

$$F_X(x_\alpha) = \alpha = F_Y(y_\alpha) = F_X(y_\alpha - c),$$

and since F_X is strictly increasing then $x_\alpha = y_\alpha - c$ which is equivalent to $\text{VaR}_\alpha(X) + c = \text{VaR}_\alpha(Y) = \text{VaR}_\alpha(X + c)$.

c) Let X be a continuous random variable with strictly increasing distribution function F_X and let $\lambda > 0$ be a given constant. Define the random variable $Y := \lambda X$, its probability distribution function is:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\lambda X \leq y) = \mathbb{P}(X \leq y/\lambda) = F_X(y/\lambda).$$

Let $x_\alpha := \text{VaR}_\alpha(X)$ and $y_\alpha := \text{VaR}_\alpha(Y)$. Then:

$$F_X(x_\alpha) = \alpha = F_Y(y_\alpha) = F_X(y_\alpha/\lambda),$$

and since F_X is strictly increasing then $x_\alpha = y_\alpha/\lambda$, which is equivalent to $\lambda \text{VaR}_\alpha(X) = \text{VaR}_\alpha(Y) = \text{VaR}_\alpha(\lambda X)$. \square

It should be noticed that VaR is proved to be positively homogeneous without a subadditivity argument as in (1). In fact, VaR is not generally subadditive as it will become clear in a following section, but it will be also argued that this should not be considered as a disadvantage.

Example 3.1. Let X be a *Pareto* continuous random variable with parameters $\beta > 0$ y $\delta > 0$. Its probability density function is given by:

$$f_X(x | \beta, \delta) = \frac{\delta \beta^\delta}{x^{\delta+1}}, \quad x > \beta,$$

and therefore its probability distribution function:

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x | \beta, \delta) dx = \delta \beta^\delta \int_{\beta}^t \frac{dx}{x^{\delta+1}} = 1 - \left(\frac{\beta}{t}\right)^\delta, \quad t > \beta.$$

The quantile function of X is the inverse of F_X , that is $F_X^{-1}(u) = \beta(1 - u)^{-1/\delta}$ for $0 < u < 1$, and consequently the median is $\mathbb{M}(X) = \text{VaR}_{1/2}(X) = F_X^{-1}(1/2) = 2^{1/\delta}\beta$. The level $\alpha > \frac{1}{2}$ VaR for the excess of loss $L = X - \mathbb{M}(X)$ is given by:

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \text{VaR}_\alpha(X - \mathbb{M}(X)) = \text{VaR}_\alpha(X) - \mathbb{M}(X) = \beta[(1 - \alpha)^{-1/\delta} - 2^{1/\delta}].$$

Thus, with probability α , the excess of loss will not exceed the amount $\text{VaR}_\alpha(L)$. Notice that if $\alpha \rightarrow 1^-$ then $\text{VaR}_\alpha(L) \rightarrow +\infty$, which would require an infinite risk capital, something impossible in practice, and instead a value $\alpha < 1$ sufficiently close to 1 is arbitrarily set by the regulatory authority, for example $\alpha = 0.995$, though it is not clear how a particular value of α is considered “safe enough” in some sense.

As an additional comment for this last example, the mean for the *Pareto* model may no exist; it only does when $\delta > 1$ and even, in such a case, $\mathbb{E}(X) = \beta\delta/(\delta - 1)$, which implies that for values of δ sufficiently close to 1, it is possible to have $\mathbb{E}(X) > \text{VaR}_\alpha(X)$ for any given value $\alpha < 1$ because $\lim_{\delta \rightarrow 1^+} \mathbb{E}(X) = +\infty$. Since parameter δ controls tail heaviness of this probability distribution (lower values for δ imply heavier right tail), this exemplifies a comment at the beginning of the previous section in the sense that it is better to use the median instead of the mean.

4 Loss aggregation

Consider n excess of loss random variables L_1, \dots, L_n where $L_i = X_i - \mathbb{M}(X_i)$ for $i \in \{1, \dots, n\}$ as in Definition 2.1. It is of interest to calculate VaR of the aggregation of such random variables:

$$L = L_1 + \dots + L_n = \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n M(X_i) = S - c, \quad (2)$$

where the random variable $S := \sum_{i=1}^n X_i$ and the constant $c := \sum_{i=1}^n M(X_i)$. In this case, we get $\text{VaR}_\alpha(L) = \text{VaR}_\alpha(S) - c$; so this last calculation essentially depends on obtaining or estimating the probability distribution function of S , that is F_S , because $\text{VaR}_\alpha(S) = F_S^{-1}(\alpha)$. Since S is a transformation of the n -dimensional random vector (X_1, \dots, X_n) , it is necessary to know either the joint probability distribution function $F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$ or its joint probability density function $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ such that

$$\mathbb{P}[(X_1, \dots, X_n) \in B] = \int_B \dots \int f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

A very popular probabilistic model is the *multivariate Normal* distribution, which undoubtedly has very nice mathematical properties that makes it very attractive for analysis and simplified calculations, but in practice it is usually inappropriate for the following reasons:

- All the univariate marginal distributions have to be *Normal*. Very often excess of loss random variables exhibits such a probabilistic behavior that is easily rejected by standard statistical normality tests, specially for heavier tails than those of the *Normal* distribution.
- The *multivariate Normal* is completely unable to consider *tail dependence* that very often is present among risks in finance and insurance, which consists in an important increase of the dependence degree under extreme values of the random variables involved.

These two flaws combined usually lead to a significant underestimation of the total aggregated risk. Instead, more flexible models have been explored, such as the ones built by means of *copula functions* which allow for any kind and distinct marginal univariate distributions and also account for tail dependence. Getting into the details of copula modeling is beyond the scope of the present article; the interested reader should refer to Nelsen (2006) for a book on basic copula theory, and the books by McNeil *et al.* (2015) and Denuit *et al.* (2005) for applications of copulas in finance and insurance risk modeling.

In two following sections, calculation of aggregated VaR will be considered in two extreme cases: Perfect positive dependence (comonotonicity) and complete absence of dependence (that is, independence). For simplicity, but without loss of generality, it is considered the aggregation of two excess of loss random variables, that is $L = L_1 + L_2$ where $L_1 = X - \mathbb{M}(X)$ and $L_2 = Y - \mathbb{M}(Y)$, which is equivalent to $L = S - c$ with $S := X + Y$ and $c := \mathbb{M}(X) + \mathbb{M}(Y)$ and therefore $\text{VaR}_\alpha(L) = \text{VaR}_\alpha(S) - c$.

5 Comonotonicity

The following result comes from the works by Hoeffding (1940) and Fréchet (1951) and it is known as the *Fréchet-Hoeffding bounds* for joint probability distribution functions, which for simplicity is stated for the bivariate case:

Lemma 5.1 (Fréchet–Hoeffding). *If (X, Y) is a random vector with joint probability distribution function $F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$ and marginal distribution functions $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ and $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$, then:*

$$H_*(x, y) := \max\{F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0\} \leq F_{X,Y}(x, y) \leq \min\{F_X(x), F_Y(y)\} =: H^*(x, y),$$

where the lower bound H_* and the upper bound H^* are both joint distribution functions and therefore infimum and supremum for all bivariate joint distribution functions.

Definition 5.1. Two random variables X and Y are *comonotone* or *perfectly positively dependent* if there exists a strictly increasing function g such that $\mathbb{P}[Y = g(X)] = 1$.

Proof of the following lemma may be found in Nelsen (2006) as Theorem 2.5.4 and following comment thereof:

Lemma 5.2 (Nelsen, 2006). *Let X and Y be continuous random variables with marginal distribution functions F_X and F_Y , respectively, and joint distribution function $F_{X,Y}$. Then X and Y are comonotone if and only if $F_{X,Y}$ is equal to the Fréchet-Hoeffding upper bound.*

Now the main result for this section:

Theorem 5.1. *If X and Y are continuous comonotone random variables, then:*

$$\text{VaR}_\alpha(X + Y) = \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y).$$

Proof:

Since X and Y are comonotone, there exists a strictly increasing function g such that $\mathbb{P}[Y = g(X)] = 1$. Hence, the distribution function of Y may be expressed as:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}[g(X) \leq y] = \mathbb{P}[X \leq g^{-1}(y)] = F_X(g^{-1}(y)).$$

By Lemma 5.2, we get:

$$F_{X,Y}(x, y) = \min\{F_X(x), F_Y(y)\} = \min\{F_X(x), F_X(g^{-1}(y))\}.$$

Define $S := X + Y$. Then, its distribution function satisfies:

$$F_S(s) = \mathbb{P}(S \leq s) = \mathbb{P}(X + Y \leq s) = \mathbb{P}(X + g(X) \leq s) = \mathbb{P}(Y \leq s - X).$$

Since $\mathbb{P}[Y = g(X)] = 1$, then $F_{X,Y}$ is a singular distribution because all the probability is distributed along the curve $y = g(x)$ and therefore, $F_S(s)$ is equal to the value of $F_{X,Y}$ at the intersection point (x_*, y_*) between the increasing curve $y = g(x)$ and the decreasing line $y = s - x$, for all $s \in \text{Ran } g$, which requires $g(x) = s - x$ and hence the intersection point is $(x_*, g(x_*))$ where x_* is the solution to the equation $x + g(x) = s$ which will be denoted as $x_* = h(s)$. Since g is strictly increasing so it is h which has inverse $h^{-1}(x) = x + g(x)$. Then:

$$F_S(s) = F_{X,Y}(x_*, g(x_*)) = \min\{F_X(x_*), F_X(g^{-1}(g(x_*)))\} = F_X(h(s)),$$

and consequently:

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(X + Y) &= \text{VaR}_\alpha(S) = F_S^{-1}(\alpha) = h^{-1}(F_X^{-1}(\alpha)) \\ &= F_X^{-1}(\alpha) + g(F_X^{-1}(\alpha)) = \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y) \quad \square \end{aligned}$$

Corollary 5.1. *If X and Y are continuous comonotone random variables, then for the excess of loss random variables $L_1 := X - \mathbb{M}(X)$ and $L_2 := Y - \mathbb{M}(Y)$, we have that:*

$$\text{VaR}_\alpha(L_1 + L_2) = \text{VaR}_\alpha(L_1) + \text{VaR}_\alpha(L_2).$$

Proof:

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(L_1 + L_2) &= \text{VaR}_\alpha(X + Y - \mathbb{M}(X) - \mathbb{M}(Y)) = \text{VaR}_\alpha(X + Y) - \mathbb{M}(X) - \mathbb{M}(Y) \\ &= \text{VaR}_\alpha(X) - \mathbb{M}(X) + \text{VaR}_\alpha(Y) - \mathbb{M}(Y) = \text{VaR}_\alpha(L_1) + \text{VaR}_\alpha(L_2) \quad \square \end{aligned}$$

Example 5.1. Let X be a *Pareto* random variable with parameters $\beta = 1$ and $\delta > 0$ and define the random variable $Y := X^2$. Since $Y = g(X)$ with $g(x) = x^2$ a strictly increasing function on $\text{Ran } X =]1, +\infty[$ then X and Y are comonotone, with $\text{Ran } Y =]1, +\infty[$ also. Making use of the formulas in Example 3.1, we obtain:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) = 1 - \left(\frac{1}{y}\right)^{\delta/2}, \quad y > 1, \end{aligned}$$

which implies that Y is also a *Pareto* random variable but with parameters $\beta = 1$ and $\delta/2$. Therefore:

$$\text{Var}_\alpha(X) = (1 - \alpha)^{-1/\delta}, \quad \text{Var}_\alpha(Y) = (1 - \alpha)^{-2/\delta}.$$

Now let $S := X + Y = X + X^2$ where $\text{Ran } S =]2, +\infty[$ and we get:

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \mathbb{P}(S \leq s) = \mathbb{P}(X + X^2 \leq s) = \mathbb{P}(X \leq (\sqrt{1 + 4s} - 1)/2) \\ &= F_X((\sqrt{1 + 4s} - 1)/2) = 1 - (2/(\sqrt{1 + 4s} - 1))^\delta, \quad s > 2, \end{aligned}$$

from where we obtain for any $0 < \alpha < 1$ the following:

$$\text{VaR}_\alpha(X + Y) = \text{VaR}_\alpha(S) = F_S^{-1}(\alpha) = (1 - \alpha)^{-1/\delta} + (1 - \alpha)^{-2/\delta} = \text{Var}_\alpha(X) + \text{Var}_\alpha(Y),$$

as expected. \square

6 Independence

In contrast with the comonotonicity case where such property always implies that the VaR of the sum is equal to sum of the individual VaRs, under lack of dependence (independence), it is not possible to establish a general formula that relates the VaR for a sum of independent random variables to the individual VaRs, it will depend on each particular case, as it is shown in the following three examples:

Example 6.1. Let X and Y be independent and identically distributed *Pareto* random variables with parameters $\beta = 1$ and $\delta = 1$ such that the right tail of their distributions is heavy enough for non existence of a mean. Again applying formulas from Example 3.1, we get $\text{VaR}_\alpha(X) = (1 - \alpha)^{-1} = \text{VaR}_\alpha(Y)$ where $0 < \alpha < 1$ and, by independence, the joint density function for the random vector (X, Y) is the product of the marginal densities:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{x^2y^2}, \quad x > 1, y > 1.$$

Let $S := X + Y$ then $\text{Ran } S =]2, +\infty[$ and its distribution function:

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \mathbb{P}(S \leq s) = \mathbb{P}(X + Y \leq s) = \mathbb{P}(Y \leq s - X) = \iint_{y \leq s-x} f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \int_1^{s-1} x^{-2} \int_1^{s-x} y^{-2} dy dx = 1 - \frac{2}{s} - \frac{2}{s^2} \log(s-1), \quad s > 2. \end{aligned}$$

Let $s_* := \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y) = 2/(1 - \alpha) > 2$. Then:

$$F_S(s_*) = \alpha - \frac{(1 - \alpha)^2}{2} \log\left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}\right) < \alpha,$$

which implies for any $0 < \alpha < 1$:

$$\text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y) = s_* < F_S^{-1}(\alpha) = \text{VaR}_\alpha(S) = \text{VaR}_\alpha(X + Y).$$

Despite total absence of dependence between the random variables, the right tails of their distributions are heavy enough such that the diversification effect is definitely not convenient: The VaR of the sum is greater than the sum of the individual VaRs, in this particular case. \square

Example 6.2. Now let X and Y be independent and identically distributed *Normal* $(0, 1)$ random variables. Their distribution function is expressed as:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt.$$

The tails of this distribution are not as heavy as in the previous example, and it has finite mean and variance. Then the random variable $S := X + Y$ has *Normal* $(0, 2)$ distribution, which is the same as $\sqrt{2} X$ since a linear transformation of a *Normal* random variable is still *Normal* and $\mathbb{E}(\sqrt{2} X) = \sqrt{2} \mathbb{E}(X) = 0$ and $\mathbb{V}(\sqrt{2} X) = 2\mathbb{V}(X) = 2$. Therefore the distribution function of S may be expressed as:

$$F_S(s) = \mathbb{P}(S \leq s) = \mathbb{P}(\sqrt{2} X \leq s) = \mathbb{P}(X \leq s/\sqrt{2}) = \Phi(s/\sqrt{2}),$$

and its quantile function as $F_S^{-1}(u) = \sqrt{2} \Phi^{-1}(u)$, $0 < u < 1$. Consequently, for any $0 < \alpha < 1$:

$$\text{VaR}_\alpha(X + Y) = \text{VaR}_\alpha(S) = F_S^{-1}(\alpha) = \sqrt{2} \Phi^{-1}(\alpha) < 2\Phi^{-1}(\alpha) = \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y).$$

In contrast with the previous example, the VaR of this sum of random variables is strictly less than the sum of the individual VaRs, and therefore in this particular case diversification is clearly convenient. \square

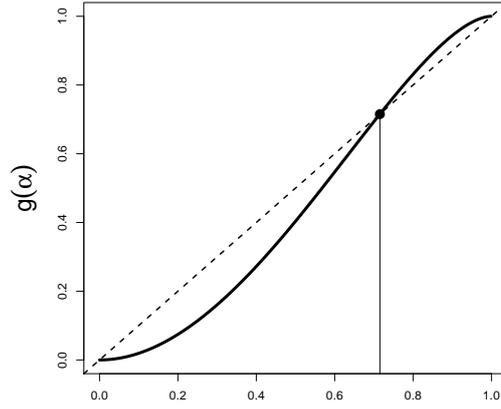


Figure 1: Graph of $g(\alpha) = F_S\left(\frac{\alpha}{2} \log(1 - \alpha)\right)$ in Example 6.3.

Example 6.3. Lastly, let X and Y be independent and identically distributed *Exponential* random variables with parameter equal to 1. The right tail of this distribution is not as heavy as in Example 6.1 but certainly heavier than in Example 6.2, with finite mean and variance. Their marginal probability density function is $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$, and the corresponding distribution function $F(x) = 1 - e^{-x}$, $x > 0$, hence $\text{VaR}_\alpha(X) = -\log(1 - \alpha) = \text{VaR}_\alpha(Y)$ where $0 < \alpha < 1$. By independence the joint density function of the random vector (X, Y) is the product of the marginal densities:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = e^{-(x+y)}, \quad x > 0, y > 0.$$

Let $S := X + Y$, then $\text{Ran } S =]0, +\infty[$ and its distribution function is:

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \mathbb{P}(X + Y \leq s) = \iint_{y \leq s-x} f_{X,Y}(x, y) \, dx dy \\ &= \int_0^s e^{-x} \int_0^{s-x} e^{-y} \, dy dx = 1 - e^{-s}(1 + s), \quad s > 0. \end{aligned}$$

By the way, calculating the derivative of $F_S(s)$, we get $f_S(s) = se^{-s}$, $s > 0$, which is a density of a *Gamma*(2, 1) random variable. Let $s_* := \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y) = -2 \log(1 - \alpha)$. Then:

$$g(\alpha) := F_S(s_*) = 1 - (1 - \alpha)^2(1 - 2 \log(1 - \alpha)), \quad 0 < \alpha < 1.$$

By numerical approximation it is obtained that $g(\alpha) = \alpha$ if and only if $\alpha \approx 0.7153319$, see Figure 1, $g(\alpha) < \alpha$ if $\alpha < 0.7153319$ and $g(\alpha) > \alpha$ if $\alpha > 0.7153319$, which implies that

$$\text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y) \begin{cases} < \text{VaR}_\alpha(X + Y) & \text{if } \alpha < 0.7153319 \\ = \text{VaR}_\alpha(X + Y) & \text{if } \alpha \approx 0.7153319 \\ > \text{VaR}_\alpha(X + Y) & \text{if } \alpha > 0.7153319 \end{cases}$$

This is an example where diversification convenience depends on the desired α level for VaR, in contrast with the two previous examples. \square

7 Final remarks

The main conclusion in the present work is that diversification is **not always** convenient. As shown in the examples, risk diversification may result better, worse or equivalent to lack thereof, depending on the

individual risks involved and the dependence relationship between them, and even on the desired risk level. In particular, as a consequence of Theorem 5.1, if two continuous random variables are comonotone then we can guarantee that the VaR is always equal to the sum of the individual VaRs. But for independent random variables everything may happen.

Moreover, it is argued that the fact of VaR being not subadditive is better and advantageous: When the VaR of a sum is greater than the sum of individual VaRs, we would be detecting a specially pernicious combination of risks on which is not convenient to diversify; while under “coherent” risk measures as in Definition 2.6 where subadditivity is always present, it would not possible to detect such a harmful risk combination.

Bibliography

- Denuit, M.; Dhaene, J.; Goovaerts, M. and Kaas, R. (2005): *Actuarial Theory for Dependent Risks*. Chichester: Wiley.
- Fréchet, M. (1951): “Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données”. *Annales de l’Université de Lyon. Section A: Sciences, Mathématiques et Astronomie* **14**, 53–77.
- Hoeffding, W. (1940): “Masstabinvariante Korrelationstheorie”. *Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin* **5**, 179–223.
- McNeil, A.J.; Frey, R. and Embrechts, P. (2015): *Quantitative Risk Management*. New Jersey: Princeton University Press.
- Nelsen, R.B. (2006): *An Introduction to Copulas*. New York: Springer.



Efectos de la aplicación de “jigsaw” sobre la adquisición de competencias en dirección de operaciones

LÓPEZ VARGAS, CRISTINA

Departamento de Organización de Empresas y Marketing
Universidad Pablo de Olavide (España)
Correo electrónico: clpvar@upo.es

REAL, JUAN C.

Departamento de Organización de Empresas y Marketing
Universidad Pablo de Olavide (España)
Correo electrónico: jcreafer@upo.es

RESUMEN

El presente trabajo analiza los efectos de la aplicación de la técnica de “jigsaw”, puzzle o rompecabezas de Aronson en la adquisición de competencias por parte de estudiantes universitarios. Más concretamente buscamos determinar qué competencias sistémicas, instrumentales e interpersonales se adquieren más fácilmente al implantar “jigsaw” en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Los resultados alcanzados muestran que esta técnica de aprendizaje cooperativo facilita en mayor medida la adquisición de competencias sistémicas e instrumentales en comparación con las interpersonales. Dentro de las competencias sistémicas, la que desarrollan con más facilidad los alumnos es la denominada metareflexión; es decir, el aprendizaje progresivo por repetición. En el grupo de competencias instrumentales, destacan la interacción entre compañeros, las habilidades comunicativas del alumno, la participación, la ayuda en la resolución de conflictos entre compañeros surgidos durante la dinámica y la mejora de la instrucción directa. Finalmente, en relación a las competencias interpersonales, la más desarrollada es el sentido de la responsabilidad del alumno.

Palabras claves: aprendizaje cooperativo; competencias genéricas; “jigsaw”; educación universitaria; estadística descriptiva.

Clasificación JEL: A22; M11.

MSC2010: 97A99; 97K40.

Effects of the “Jigsaw” Technique on Student’ Learning Competences within Operations Management

ABSTRACT

The aim of this study was to determine the effects of the cooperative “jigsaw” method on generic competence-based training by university students. This specifically sought to understand how systemic, instrumental and interpersonal competences are more easily acquired by adopting “jigsaw” in the teaching-learning procedure. The results reveal that this cooperative learning method makes the development of systemic and instrumental competences easier to a greater extent than interpersonal ones. Meta-reflection or progressive rote learning achieved a highest score among systemic competences. Focusing our attention on the instrumental dimension, peer interaction, students’ communication skills, participation, resolution of peer conflicts and direct instruction, these competences sty out from the rest. Finally, responsibility was the easiest competence in the interpersonal dimension.

Keywords: cooperative learning; generic competences; “jigsaw”; high-level education; descriptive statistics.

JEL classification: A22; M11.

MSC2010: 97A99; 97K40.



1. Introducción

La implantación de los Grados adaptados a las directrices del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), según el R.D. 1393/2007¹ por el que se establece la ordenación de las enseñanzas oficiales, originó cambios profundos en la actividad docente universitaria en España. Uno de ellos ha sido la reforma de metodología docente aplicada en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Medina, 2005). Las nuevas directrices ponen el énfasis en los métodos de aprendizaje para la consecución de competencias y habilidades que deben desarrollar los alumnos, muchas de ellas de carácter transversal.

En esta investigación, y siguiendo a Leví-Orta y Ramos-Méndez (2013), el concepto de competencia empleado se basa en la teoría que podemos denominar el modelo de componentes de la competencia. Así, según Sevillano García (2009), “una competencia supone valores, actitudes y motivaciones, además de conocimientos, capacidades, habilidades y destrezas”. Entre estas competencias pueden distinguirse las específicas y genéricas. Las primeras son relativas a una determinada profesión, particulares para un campo de estudio u ocupación. Las segundas, denominadas transversales, son comunes a todas las profesiones (Clemente-Ricolfe y Escribá-Pérez, 2013).

En la adaptación de sus grados al EEES, la Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad Pablo de Olavide (UPO) organiza la actividad docente o de trabajo del estudiante en contacto con el profesor en torno a las enseñanzas básicas (EB) y las enseñanzas prácticas y de desarrollo (EPD). En este contexto se sitúa la asignatura de Dirección de Operaciones II, que se imparte en el segundo semestre del cuarto y quinto curso del Grado en Administración y Dirección de Empresas y del Doble Grado en Derecho y Administración y Dirección de Empresas, respectivamente.

La metodología de enseñanza empleada en las EPD de esta asignatura combina el aprendizaje autónomo del alumno junto con la resolución de casos prácticos mediante el trabajo en grupo. La evaluación de esta enseñanza se realiza de forma continua, ya sea de modo individual o en grupo mediante la resolución de casos prácticos. El elevado número

¹ Texto consolidado: incorpora la última modificación publicada en BOE el 17/06/2015 y las anteriores publicadas en las fechas 03/02/2015, 22/11/2014, 05/03/2014, 13/07/2013, 10/02/2011 y 03/07/2010.

de actividades realizadas a través del trabajo en pequeños grupos aconseja la utilización de alguna técnica didáctica que permita al alumnado mantener su interés y motivación por la asignatura. Además, el hecho de que el contenido de la asignatura sea susceptible de ser fragmentado, posibilita que el éxito del equipo sólo se pueda cumplir mediante la cooperación e interdependencia entre iguales.

El aprendizaje cooperativo complementa la metodología de enseñanza y evaluación implantada en las EPD. Además, favorece el desarrollo de algunas de las competencias genéricas esenciales, siendo estas también reconocidas como aquellas competencias transversales, transferibles a multitud de funciones y tareas (Corominas *et al.*, 2006).

Las técnicas de aprendizaje cooperativo constituyen una metodología innovadora que puede ayudar a resolver problemas en el ámbito educativo, así como fomenta el desarrollo de competencias intelectuales y profesionales (León *et al.*, 2011). Entre estas competencias destacan la capacidad de trabajar en equipo y de relacionarse con otras personas del mismo o distinto ámbito profesional, así como la interdependencia positiva, la interacción cara a cara y la responsabilidad individual (Johnson *et al.*, 1993). Es una situación en la que los objetivos de los participantes se hallan vinculados, de manera que cada uno de ellos sólo puede alcanzar los propios sí y sólo sí los demás consiguen alcanzar los suyos.

Dentro de las técnicas de aprendizaje colaborativo se ha optado en esta investigación por la técnica de rompecabezas, puzzle o “jigsaw” (Aronson *et al.*, 1978). Este método se fundamenta en la estructuración de las interacciones que se producen entre los alumnos articuladas mediante diferentes equipos de trabajo (base y experto), así como en la dependencia entre los alumnos para lograr sus objetivos (García *et al.*, 2001). Frente al aprendizaje competitivo, donde un estudiante alcanza el objetivo sí y sólo sí los demás no lo logran, y el aprendizaje individualista, donde el alumno se centra en conseguir la realización de su tarea, con el aprendizaje cooperativo se pretende desarrollar en el alumnado una serie de competencias genéricas como la creatividad, el trabajo en equipo y la solidaridad, entre otras.

La experiencia que se expone en este trabajo perseguía potenciar el aprendizaje

cooperativo entre los alumnos como método para facilitar la adquisición de competencias por parte del alumnado de la asignatura Dirección de Operaciones II. Estudios preliminares muestran una mejora del rendimiento de los alumnos derivado de la aplicación de “jigsaw” (Cavalier *et al.*, 1995; Artut y Tarim, 2007; Darnon *et al.*, 2012). Sin embargo, no se ha analizado en profundidad qué competencias son desarrolladas con mayor facilidad por los alumnos con la adopción de “jigsaw” en la dinámica de clase. Por todo lo comentado anteriormente, el presente trabajo tiene como objetivo el análisis de los beneficios en términos de competencias genéricas que se desarrollan a través de la técnica cooperativa “jigsaw”.

El trabajo queda estructurado de la siguiente forma. Primero, se exponen los fundamentos teóricos de esta investigación, que se concretan en la definición de técnica “jigsaw” y sus beneficios. Posteriormente, se describe la metodología seguida en la investigación, donde se describen los instrumentos de recogida de la información, la muestra y cómo se aplicó la técnica “jigsaw”. A continuación, se presentan los resultados obtenidos y se establece la discusión de los resultados alcanzados. Finalmente, se indican las principales conclusiones y limitaciones, así como futuras líneas de investigación.

2. La técnica de aprendizaje cooperativo “jigsaw”

2.1 Descripción de “jigsaw”

El aprendizaje cooperativo es una forma de trabajo en grupo basado en la construcción colectiva del conocimiento y el desarrollo de habilidades mixtas (aprendizaje y desarrollo personal y social), donde cada miembro del grupo es responsable tanto de su propio aprendizaje como del de los restantes miembros del grupo (Slavin, 1990). Es por ello que, a diferencia del aprendizaje individual o competitivo, la participación de cada uno de los participantes es esencial para la consecución del éxito del resto (Johnson y Johnson, 2002). De hecho, el propio entorno de trabajo que se genera a través del aprendizaje cooperativo posibilita una mayor generación y discusión inmediata de ideas, no solo con el profesor, sino con mayor énfasis, con el resto de compañeros con los que se interactúa durante la dinámica (Zacharia *et al.*, 2011).

Son numerosas las metodologías docentes que se han proliferado bajo el paraguas del aprendizaje cooperativo. Para lograr ser lo más productivas posibles, estas se desarrollan bajo los principios de interdependencia positiva, interacción cara a cara, responsabilidad individual y grupal, las habilidades interpersonales y el propio proceso grupal (Johnson *et al.*, 1993).

Dentro de las diferentes metodologías de aprendizaje cooperativo que se basan en estos principios se encuentra el método de “jigsaw”, puzzle o rompecabezas, desarrollado e implementado inicialmente por Aronson *et al.* (1978). Esta técnica es una de las que mayor atención ha recibido de la investigación educativa. Incluso, en las últimas décadas, se han desarrollado diferentes versiones como son “jigsaw II”, “jigsaw III”, “jigsaw IV” y “jigsaw invertido” (Zacharia *et al.*, 2011). Sin embargo, todas se basan en los fundamentos propuesto por Aronson *et al.* (1978) en “jigsaw I”. La idea central de radica en dividir el grupo-clase en equipos de trabajo y responsabilizar a cada miembro de una parte diferente de la tarea a realizar o pieza del puzzle, de la cual se convertirá en un experto.

La dinámica de “jigsaw” se organiza en torno a cuatro fases (Karacop y Doymus, 2013). En la fase inicial o de introducción, se forman grupos heterogéneos de alumnos para preparar una tarea. A estos grupos se les denomina base y suelen estar formados por de 3 a 5 alumnos, según el número de documentos elaborados en los que se ha dividido el material de la tarea. En la segunda fase, enfocada en la exploración, se produce la lectura y estudio individual por parte de cada alumno del material de estudio o pieza del puzzle que tiene asignado.

Las siguientes fases suelen desarrollarse en el aula y bajo la supervisión y apoyo del profesor/a. En la tercera fase, conocida como de información y puesta en común, se forman equipos de expertos en los que se reúnen los alumnos de los distintos grupos para trabajar la parte del material o puzzle que les ha sido asignado. Es entonces cuando se produce la puesta en común de los conocimientos que cada estudiante ha adquirido durante la fase de exploración. Finalmente, en la cuarta fase, denominada de integración y evaluación, cada uno de los expertos vuelve a su grupo base. Es entonces cuando cada uno de los integrantes le explica al resto todo lo aprendido sobre el contenido que le había sido asignado. Se produce, por tanto, un intercambio entre los miembros dirigido a enseñar y corregir aquello

que no se haya aprendido correctamente. Cuando todos los miembros han expuesto sus piezas de puzzle y las cuestiones generadas han sido resueltas, se da por finalizada la dinámica. En el siguiente apartado expondremos los beneficios que se han observado tras la misma.

2.2. Beneficios observados en la aplicación de “jigsaw”

“Jigsaw” ha demostrado ser una técnica de instrucción que ayuda a mejorar el rendimiento académico, el compromiso, las actitudes y las percepciones de los estudiantes en campos muy diversos como el Álgebra (Lucas, 2000), la Biología (Khalil *et al.*, 2009), la Educación Física (O’Leary y Griggs, 2010), la Estadística (Mondéjar *et al.*, 2007), la Química (Doymus, 2008a; 2008b) y el aprendizaje de idiomas (Gömleksi’z, 2007), así como en los diferentes niveles del sistema educativo (Traver Martí y García López, 2004; Artut y Tarim, 2007; Tarhan *et al.*, 2013). Ello se debe a los beneficios que esta técnica de aprendizaje cooperativo ofrece frente al aprendizaje competitivo o individual del alumno (Slavin, 1996). Una de las más destacables en el contexto educativo en el que nos situamos es el mayor apoyo que ofrece “jigsaw” para la adquisición de competencias frente a las técnicas enmarcadas dentro del aprendizaje y competitivo (Vallet-Bellmunt *et al.*, 2016).

Para analizar los efectos positivos del aprendizaje cooperativo sobre el proceso de enseñanza aprendizaje, Dansereau (1986) propone el modelo teórico CAMS. De acuerdo con él, los estudiantes desarrollan habilidades cognitivas (C), afectivas (A), metacognitivas (M) y sociales (S) a partir de las interacciones que se producen durante el desempeño cooperativo. Por habilidades cognitivas entendemos las destrezas y procesos mentales que el alumno realiza para aprender el contenido así como la acción concreta que desarrolló para adquirirlo (Ramos *et al.*, 2010), ejerciendo a su vez el rol de facilitador del conocimiento al ser las responsables de adquirirlo y recuperarlo cuando se necesite (Reed, 2012). En este sentido, la técnica de aprendizaje cooperativo “jigsaw” favorece el desarrollo de habilidades cognitivas tales como la resolución de problemas, la comprensión, la retención, la creatividad y la comprensión de los contenidos exigidos (Hooper, 1992; Cavalier *et al.*, 1995; Peklaj y Vodopivec, 1999; Artut y Tarim, 2007; Mondéjar *et al.*, 2007; Doymus, 2008a; Doymus, 2008b; Pozzi, 2010; Darnon *et al.*, 2012). La adquisición

de estas habilidades se ven a su vez favorecidas por el proceso de metareflexión o aprendizaje progresivo por repetición que se produce durante en la aplicación de “jigsaw” (Pozzi, 2010).

Muy relacionadas con las descritas anteriormente están las habilidades metacognitivas (Flavel, 1979). Estas aglutinan a aquellas operaciones mentales que permiten al alumno entender y controlar su proceso de aprendizaje y razonamiento (Maqsd, 1997). La dinámica de “jigsaw” promueve el desarrollo de estas habilidades a través de las múltiples interacciones que se suceden entre los propios alumnos y de estos con su profesor (McManus y Aiken, 1996) con la intención de compartir lo aprendido con el resto de compañeros y resolver las dudas que hayan surgido. En este sentido, un estudio incluso propone un índice con el que medir el grado de cooperatividad que se produce en el trabajo en equipo (Pujolàs Maset, 2009), siendo las interacciones que se generan en la actividad un factor básico.

Los efectos positivos de “jigsaw” también se observan en la dimensión social. Por habilidades sociales entendemos aquellas conductas necesarias para interactuar y relacionarse con los demás de forma efectiva y mutuamente satisfactoria en una situación de aprendizaje (Monjas Casares y González Moreno, 1998). En esta línea, investigaciones previas señalan que “jigsaw” mejora la habilidad de expresar conceptos u opiniones, la coordinación entre compañero mediante la negociación e incluso ayuda en la resolución de conflictos surgidos durante la experiencia (Hooper, 1992; Mondéjar *et al.*, 2007; Peklaj y Vodopivec, 1999; Artut y Tarim, 2007; Doymus, 2008b; Pozzi, 2010).

La técnica de aprendizaje cooperativo “jigsaw” también ha mostrado ser efectiva en el desarrollo de habilidades afectivas como el respeto o la solidaridad entre compañeros (Hooper, 1992; Cavalier *et al.*, 1995; Artut y Tarim, 2007; Mondéjar *et al.*, 2007; Khalil *et al.*, 2009). En línea con lo anterior, Traver Martí y García López (2004) constataron que la aplicación de “jigsaw” mejora la actitud solidaria de los participantes, siendo incluso mayor esa influencia sobre los inicialmente menos solidarios. Bajo esta perspectiva, se observa una amplia variedad de estudios cuya orientación consiste, principalmente, en describir los efectos positivos de “jigsaw” observados en sus experiencias (Slavin, 1996; Johnson y Johnson, 2002; Gillies, 2015). Pero, a pesar del elevado volumen de investigaciones sobre

esta técnica de aprendizaje cooperativo, no hemos observado investigaciones previas que realicen una recopilación de las mejoras observadas en términos competenciales, así como la determinación de cuáles son desarrolladas en mayor o menor medida mediante la aplicación de “jigsaw”. Es por ello que el resto de nuestro estudio se centrará en dar respuesta a estas cuestiones.

3. Metodología

El presente estudio es eminentemente descriptivo (Babbie, 2010) y de carácter pre-experimental (Cook y Campbell, 1979), ya que su fundamento se basa en la observación de la dinámica de aplicación de “jigsaw” en la práctica docente mediante grupo experimental y en la descripción de sus resultados, no existiendo grupo de control. Este enfoque fue aplicado en línea con estudios previos sobre adquisición de competencias en educación superior (Palmer Pol *et al.*, 2009) y dentro del campo de enseñanza en Economía y Dirección de Empresas (Iglesias-Villasol, 2011; Saiz y Román, 2011, Martín-Peña *et al.*, 2012; Montoro-Sánchez *et al.*, 2012; De la Iglesia, 2012), en el que se desarrolla el presente estudio. Para ayudar al desarrollo de futuros estudios cuasi-experimentales (Shadish *et al.*, 2002) sobre los beneficios en términos competenciales que reporta “jigsaw”, estructuramos esta sección conforme al desarrollo de tal tipo de investigación, aunque sin la inclusión de sub-sección denominada “Controles”.

3.1. Participantes

La población de este estudio estuvo compuesta por un total de 126 alumnos matriculados en la asignatura Dirección de Operaciones II de la Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad Pablo de Olavide. Esta asignatura forma parte de plan de estudios del Grado en Administración y Dirección de Empresas (ADE) y del Doble Grado en Administración y Dirección de Empresas y Derecho (ADE-DER). Dado que la experiencia puzzle no fue desarrollada en todos los grupos de EPD, la muestra inicialmente seleccionada fue de 64 alumnos.

El número de cuestionarios válidos recopilados durante la experiencia fueron un total de 56, los cuales representan el 44,4 % de la población total. Una descripción inicial

de la muestra indica que el número de participantes de las dos titulaciones fue el mismo ($f_{ADE}=28$; $f_{ADE-DER}=28$). En total participaron 4 grupos de EPD, de los cuales 2 correspondían al Grado en ADE (grupos 11 y 12) y los otros 2 al Doble Grado en ADE- DER (41 y 42). La Tabla 1 muestra frecuencias y porcentajes de participantes por grupo de EPD. El grupo 11 tuvo el mayor número de participantes (30,36%), seguido de cerca por el grupo 41 (28,57%).

Tabla 1. Frecuencia y porcentajes de participantes por grupo de EPD

Respuestas	f	%
41	16	28,57%
42	12	21,43%
11	17	30,36%
12	11	19,64%

La Tabla 2 presenta datos descriptivos sobre la edad de los participantes agregados de forma global (m) y por grupo de EPD (G41, 42, 11 y 12) en el que realizaron la experiencia. Los participantes presentaban edades comprendidas entre los 21 y 32 años. El 91,6% tenía entre 21 y 25 años, siendo 22 años la edad más común entre ellos con un porcentaje de 19,64%. En los grupos 41, 42 y 12 también se observa que la edad más común era 22 años con porcentajes del 68,75%, 66,67% y 45,48% respectivamente. En cambio, la edad más común de los participantes del grupo 11 fue 25 años, con un porcentaje del 29,41%.

Tabla 2. Datos descriptivos sobre la edad de los participantes

Respuestas	f_m	%m	$f_{G_{41}}$	%G ₄₁	$f_{G_{42}}$	%G ₄₂	$f_{G_{11}}$	%G ₁₁	$f_{G_{12}}$	%G ₁₂
21	4	7,14%	0	0,00%	0	0,00%	2	11,76%	2	18,18%
22	26	46,43%	11	68,75%	8	66,67%	2	11,76%	5	45,45%
23	11	19,64%	4	25,00%	3	25,00%	2	11,76%	2	18,18%
24	4	7,14%	0	0,00%	0	0,00%	3	17,65%	1	9,09%
25	6	10,71%	0	0,00%	0	0,00%	5	29,41%	1	9,09%
26	2	3,57%	1	6,25%	0	0,00%	1	5,88%	0	0,00%
27	2	3,57%	0	0,00%	1	8,33%	1	5,88%	0	0,00%
32	1	1,79%	0	0,00%	0	0,00%	1	5,88%	0	0,00%

La Tabla 3 indica los datos descriptivos sobre el sexo de los participantes. La distribución de la muestra presenta un equilibrio perfecto en el porcentaje de mujeres y varones. A nivel de grupos de EPD, las mujeres tuvieron un mayor peso en los grupos 41 y 42 mientras que los hombres lo tuvieron en los grupos 11 y 12.

Tabla 3. Datos descriptivos sobre el sexo de los participantes

Respuestas	f_m	%m	$f_{G_{41}}$	%G ₄₁	$f_{G_{42}}$	%G ₄₂	$f_{G_{11}}$	%G ₁₁	$f_{G_{12}}$	%G ₁₂
Mujer	28	50%	10	63%	10	63%	6	35%	5	45%
Hombre	28	50%	6	38%	6	38%	11	65%	6	55%

Con respecto al tiempo dedicado por el alumno para la preparación de la EPD, la Tabla 4 muestra que un mayor porcentaje de participantes destinó entre 2 y 4 horas (60,71%). Esta cifra fue entre 3 y 17 veces superior al del resto de respuestas incluidas en el cuestionario. Un mayor porcentaje de participantes de los grupos 42, 11 y 12 también dedicaron entre 2 y 4 horas a la preparación de la EPD frente al grupo 41 donde la respuesta más frecuente fue menos de 2 horas con un 50%.

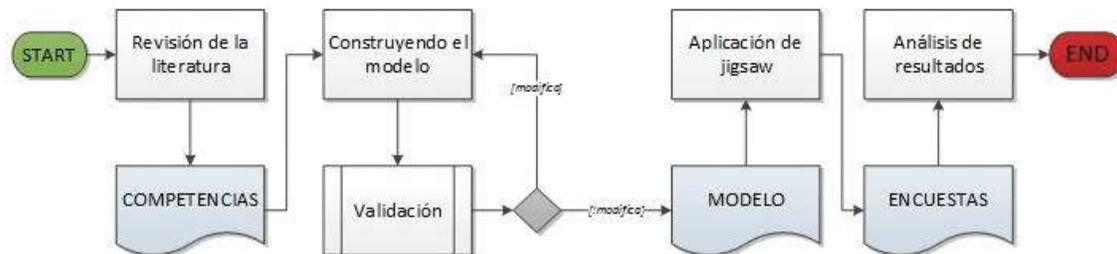
Tabla 4. Datos descriptivos sobre el tiempo de estudio de los participantes

Respuestas	f_m	%m	$f_{G_{41}}$	%G ₄₁	$f_{G_{42}}$	%G ₄₂	$f_{G_{11}}$	%G ₁₁	$f_{G_{12}}$	%G ₁₂
<2	12	21,43%	8	50,00%	2	16,67%	1	5,88%	1	9,09%
[2,4)	34	60,71%	6	37,50%	9	75,00%	12	70,59%	7	63,64%
[4,6)	8	14,29%	2	12,50%	1	8,33%	3	17,65%	2	18,18%
>=6	2	3,57%	0	0,00%	0	0,00%	1	5,88%	1	9,09%

3.2. Intervención

Este trabajo se centra en estudiar los beneficios que la aplicación de “jigsaw” reporta al proceso de enseñanza-aprendizaje de competencias. La Figura 1 señala los pasos realizados para conseguirlo y los resultados alcanzados tras los mismos. El apartado 3.2.1 se centra en explicar cómo obtuvimos el modelo final de competencias, mientras que el apartado 3.2.2 expone cómo se aplicó “jigsaw” en nuestra experiencia.

Figura 1. Pasos seguidos en la investigación



3.2.1 Medidas

La identificación de las medidas o competencias dio comienzo con una extensa revisión de la literatura sobre la técnica de “jigsaw” en bases de datos nacionales e internacionales como Dialnet, Scopus, Taylor & Francis, Wiley Online Library, Proquest, Emerald Management Xtra. y SpringerLink. Los criterios seguidos en la búsqueda fueron:

- (1) Los estudios tenían que contener la expresión “jigsaw” ó “puzzle” en su título, resumen o palabras clave.
- (2) Los estudios tenían que contener la expresión “Aronson” en su título, resumen, palabras clave o texto completo.
- (3) Los estudios tenían que identificar claramente los beneficios aportados por la aplicación de “jigsaw” en el proceso de aprendizaje del alumno.
- (4) No limitamos el horizonte temporal, siendo todos los artículos inicialmente identificados revisados antes de ser o no seleccionados.

Un total de 10 investigaciones cumplieron los anteriores requisitos: Hooper, 1992; Cavalier *et al.*, 1995; Peklaj y Vodopivec, 1999; Artut y Tarim, 2007; Mondéjar *et al.*, 2007; Doymus, 2008a; Doymus, 2008b; Khalil *et al.*, 2009; Pozzi, 2010; y Darnon *et al.*, 2012. Para la construcción del modelo de competencias, creamos una lista preliminar donde incluimos las 77 competencias identificadas en los estudios previos seleccionados. Dado que muchas de las competencias eran indicadas en más de una publicación, revisamos la lista inicial para eliminar posibles duplicidades. La lista inicial quedó así reducida a 23 competencias.

Esta investigación pretendía elaborar un modelo global que recoja las competencias genéricas identificadas con objeto de facilitar la interpretación y análisis de los resultados. Estudios previos que presentaron la misma necesidad las agrupan de forma válida y fiable (De Miguel, 2006; Montoro-Sánchez *et al.*, 2012; Leví-Orta y Ramos-Méndez, 2013; Rodríguez Izquierdo, 2015), siguiendo la propuesta realizada en el proyecto *Tuning* (González y Wagenaar, 2003) reconocida y aplicada a nivel internacional, la cual también se sigue en el libro blanco del título en Grado de Economía y Empresa propuesto por ANECA (2005) de referencia a nivel nacional. Las categorías que presentan y aplicamos en este estudio son:

- Competencias sistémicas: aquellas que hacen referencia a la integración de las capacidades cognitivas, destrezas, prácticas y conocimientos.
- Competencias instrumentales: aquellas que se refieren a la ejecución de procedimientos, estrategias, técnicas, habilidades, destrezas y métodos que suponen la aplicación práctica y operativa de los conocimientos.
- Competencias interpersonales: que agrupan a aquellas relacionadas con la dinámica de grupo y el compromiso con el trabajo.

Para analizar la validez de contenido, dos expertos en “jigsaw” revisaron el modelo preliminar obtenido. Estos eliminaron cuatro de las identificadas en la revisión de la literatura, no incluyendo nuevas competencias ni reclasificando las sí aceptadas, quedando por tanto la lista final conformada por 19 competencias. Posteriormente se realizó un análisis de fiabilidad de la escala o consistencia interna a través del coeficiente alfa de Cronbach que alcanzó un valor de 0,907.

La Tabla 5 recoge el modelo final alcanzado. Señalar que esta recoge las competencias que pueden ser adquiridas por los alumnos con mayor facilidad mediante la aplicación de “jigsaw” en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Ello no implica que estas competencias no puedan ser adquiridas mediante otras técnicas cooperativas, estrategias de aprendizaje competitivas o individuales, o solo por el avance del tiempo y madurez que la persona adquiera en el transcurso del mismo con independencia a cualquier intervención.

Tabla 5. Modelo de competencias cuyo desarrollo facilita la aplicación de “jigsaw”

ID	Competencia	Descripción	Referencias
DS	Dimensión sistémica		
DS1	Creatividad	Favorece la creatividad	(Mondéjar <i>et al.</i> , 2007)
DS2	Metareflexión	Apoya el aprendizaje progresivo por repetición	(Pozzi, 2010)
DS3	Aprendizaje de contenidos exigibles	Facilita la comprensión de los contenidos exigidos	(Hooper, 1992; Cavalier <i>et al.</i> , 1995; Peklaj y Vodopivec, 1999; Artut y Tarim, 2007; Mondéja <i>et al.</i> , 2007; Doymus, 2008a; Doymus, 2008b; Pozzi, 2010; Darnon <i>et al.</i> , 2012)
DT	Dimensión instrumental		
DT1	Resolución de conflictos	Ayuda en la resolución de conflictos entre compañeros surgidos durante la dinámica	(Hooper, 1992; Peklaj y Vodopivec, 1999)
DT2	Coordinación/cohesión	Mejora de la coordinación/cohesión entre compañeros	(Peklaj y Vodopivec, 1999; Artut y Tarim, 2007; Mondéjar <i>et al.</i> , 2007; Doymus, 2008b; Pozzi, 2010)
DT3	Organización del trabajo	Mejora la organización del trabajo en grupo	(Cavalier <i>et al.</i> , 1995; Pozzi, 2010)
DT4	Interacción	Mejora la interacción entre compañeros	(Hooper, 1992; Cavalier <i>et al.</i> , 1995; Peklaj y Vodopivec, 1999; Artut y Tarim, 2007; Doymus, 2008a; Doymus, 2008b)
DT5	Negociación	Facilita la negociación entre compañeros	(Hooper, 1992)
DT6	Instrucción directa	Mejora la habilidad de expresar conceptos/opiniones a los compañeros	(Hooper, 1992; Artut y Tarim, 2007; Pozzi, 2010)
DT7	Participación en equipo	Favorece la participación del alumno	(Artut y Tarim, 2007; Mondéjar <i>et al.</i> , 2007; Doymus, 2008a; Pozzi, 2010)
DT8	Comunicación	Mejora las habilidades comunicativas del alumno	(Hooper, 1992; Cavalier <i>et al.</i> , 1995; Artut y Tarim, 2007; Khalil <i>et al.</i> , 2009; Pozzi, 2010)
DT9	Capacidad de preparación, análisis y síntesis	Mejora la capacidad de preparación, análisis y síntesis de los materiales de trabajo	(Cavalier <i>et al.</i> , 1995; Artut y Tarim, 2007; Mondéjar <i>et al.</i> , 2007)
DP	Dimensión interpersonal		
DP1	Respeto	Favorece el sentimiento de respeto hacia los compañeros	(Mondéjar <i>et al.</i> , 2007; Khalil <i>et al.</i> , 2009)
DP2	Afección	Mejora la relación entre los compañeros	(Hooper, 1992; Cavalier <i>et al.</i> , 1995; Artut y Tarim, 2007; Pozzi, 2010; Darnon <i>et al.</i> , 2012)
DP3	Solidaridad	Favorece la solidaridad entre los compañeros	(Hooper, 1992; Cavalier <i>et al.</i> , 1995; Artut y Tarim, 2007; Khalil <i>et al.</i> , 2009)
DP4	Motivación	Incrementa la motivación del alumno	(Cavalier <i>et al.</i> , 1995; Artut y Tarim, 2007; Mondéjar <i>et al.</i> , 2007; Darnon <i>et al.</i> , 2012)
DP5	Responsabilidad	Favorece el sentido de la responsabilidad del alumno	(Hooper, 1992; Cavalier <i>et al.</i> , 1995; Artut y Tarim, 2007; Doymus, 2008b; Khalil <i>et al.</i> , 2009; Pozzi, 2010; Darnon <i>et al.</i> , 2012)
DP6	Autoestima/confianza	Mejora autoestima/confianza del alumno en sus capacidades	(Hooper, 1992; Darnon <i>et al.</i> , 2012)
DP7	Interdependencia positiva	Incrementa la sensación de dependencia del rendimiento entre los miembros del grupo	(Cavalier <i>et al.</i> , 1995; Artut y Tarim, 2007; Mondéjar <i>et al.</i> , 2007; Khalil <i>et al.</i> , 2009; Darnon <i>et al.</i> , 2012)

3.2.2. La aplicación de la técnica “jigsaw” en la experiencia

El desarrollo de nuestro estudio se basa en la dinámica docente con objeto de extraer qué aspectos podemos aplicar para mejorar el desarrollo del mapa de aprendizaje de nuestros alumnos en Dirección de Operaciones. En los siguientes apartados describimos las fases y pasos realizados en la aplicación de “jigsaw”.

a) Fase de introducción

La fase de introducción dio comienzo con la recopilación de información por parte del profesorado sobre las EPD a desarrollar y los matriculados en la asignatura. Además, los profesores revisaron la información disponible sobre las EPD definidas en la guía docente de la asignatura de Dirección de Operaciones II con objeto de identificar cómo se estructurarían los grupos y el contenido o pieza del puzzle asignada a cada integrante. Posteriormente, se expuso la dinámica a los alumnos participantes en clase con una semana de antelación a que se celebre la experiencia. Dado que la materia se dividió en tres partes, se formaron grupos base de tres personas, solo admitiéndose grupos de cuatro en aquellos casos en los que así se requirió por ser el número de alumnos total no múltiplo de tres.

Definidos los grupos de trabajo, se le asignó aleatoriamente a cada miembro el rol de experto que asumiría durante la experiencia. Además, se solicitó a cada alumno la lectura y estudio de la parte que le fue asignada.

b) Fase de exploración

Durante la fase de exploración, los profesores pasaron a preparar la prueba que evaluaría a los alumnos sobre los conocimientos adquiridos en el desarrollo de la EPD. La citada prueba fue la misma tanto para los alumnos que participarían en la experiencia como para los que no. De forma paralela, los alumnos individualmente estudiaron la parte de la materia que se les había asignado en la fase de introducción.

c) Fase de información y puesta en común

La fase de información y puesta en común se pone en marcha el día que se produce la dinámica en el aula. Esta dio comienzo con la formación de los grupos de expertos por parte del profesor encargado de dirigir la clase de EPD. Los alumnos disponían de hasta 15

minutos para poner en común los aspectos más relevantes del punto estudiado, así como resolver las dudas existentes sobre cuestiones difusas. Con la interacción entre expertos que se produce, se refuerza el aprendizaje individual alcanzado por el alumno en la fase de exploración.

d) Fase de integración y evaluación

La fase de integración y evaluación comenzó al volver cada uno de los expertos a su grupo base. En esta nueva reunión disponían del mismo tiempo para explicarse entre ellos el punto del tema asignado y responder las dudas existentes. Cuando el tiempo se agotó, los grupos se disolvieron y el profesor entregó la prueba de evaluación que tenía que resolver cada alumno individualmente. En el momento en el que alumno terminaba su prueba de evaluación, el profesor le entregaba una encuesta sobre la dinámica. De esta forma se pretendía conocer qué competencias les había ayudado a adquirir la aplicación de “jigsaw” en mayor o menor medida.

3.3. Resultados

Como se ha comentado anteriormente, se siguió una metodología descriptiva basada en el análisis documental y en estudios tipo “survey” o encuesta. Los objetivos que nos planteamos fueron:

- (1) Crear un modelo que aglutinara qué competencias pueden adquirirse con mayor facilidad mediante la aplicación de “jigsaw” en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Éstas serían clasificadas de acuerdo con la propuesta realizada en el proyecto *Tuning* (González y Wagenaar, 2003) y ANECA (2005) para facilitar su interpretación y posterior análisis.
- (2) Analizar desde el punto de vista del alumno qué competencias incluidas en el modelo pueden ser adquiridas con mayor facilidad mediante la aplicación de “jigsaw” en la experiencia. Como instrumento de recopilación, se diseñó un cuestionario estructurado dirigido a los alumnos que habían participado en la experiencia. El cuestionario constaba de dos bloques principales. El primer bloque contenía preguntas sobre el perfil del encuestado. Dentro del mismo,

se le solicitó al alumno que respondiera lo siguiente: 1. *Titulación*; 2. *Curso*; 3. *Grupo de EPD*; 4. *Edad*; 5. *Sexo*; y 6. *Tiempo de estudio para esta EPD*, donde el alumno debía escoger entre las categorías “Menos de 2 horas”, “Entre 2 y 4 horas”, “Entre 4 y 6 horas” y “Más de 6 horas”. El segundo bloque contenía preguntas sobre la percepción de qué competencias pueden ser adquiridas con mayor facilidad por la aplicación de “jigsaw”, las cuales fueron desordenadas por alumno para evitar el sesgo en la contestación por bloques. En este caso, los alumnos tenían que señalar qué competencias les había ayudado a desarrollar la aplicación de la técnica “jigsaw” durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. Además, los alumnos podían incluir nuevas competencias no identificadas previamente. Al cuestionario inicialmente diseñado, se le realizó un pretest, consistente en llevar a cabo diversas revisiones por profesores de la asignatura que habían participado en anteriores experiencias puzzle. Sus aportaciones permitieron mejorar la comprensión del objeto y contenido del mismo por parte de los alumnos (Bryman, 2008). La recogida de datos se inició mediante la entrega del cuestionario a cada alumno una vez que terminaba la prueba de evaluación final, es decir, en el momento que justamente finalizaba la experiencia.

4. Análisis de los resultados

Tras la finalización de la intervención y recopilación de datos sobre la aplicación “jigsaw” en Dirección de Operaciones II, se efectuó un análisis estadístico descriptivo con frecuencias y porcentajes utilizando el programa estadístico SPSS (versión 21.0). La Tabla 6 recopila los resultados obtenidos por cada competencia tras el experimento.

Se pueden extraer conclusiones de los datos recopilados en la Tabla 6 evaluándolos de acuerdo a los niveles que conforman el modelo. A nivel macro, nos centramos en comparar los resultados obtenidos por las dimensiones en las que clasificamos las competencias.

Tabla 6. Frecuencias y porcentajes obtenidos por cada competencia tras el experimento

ID	Competencia	Frecuencia (f_i)	Porcentaje (p_i)
DS	Dimensión sistémica		
DS1	Creatividad	44	0,79
DS2	Metareflexión	52	0,93
DS3	Aprendizaje de contenidos exigibles	46	0,82
DT	Dimensión instrumental		
DT1	Resolución de conflictos	47	0,84
DT2	Coordinación/cohesión	45	0,80
DT3	Organización del trabajo	45	0,80
DT4	Interacción	51	0,91
DT5	Negociación	36	0,64
DT6	Instrucción directa	46	0,82
DT7	Participación en equipo	48	0,86
DT8	Comunicación	49	0,88
DT9	Capacidad de análisis y síntesis	38	0,68
DP	Dimensión interpersonal		
DP1	Respeto	34	0,61
DP2	Afección	38	0,68
DP3	Solidaridad	40	0,71
DP4	Motivación	29	0,52
DP5	Responsabilidad	42	0,75
DP6	Autoestima/confianza	38	0,68
DP7	Interdependencia positiva	39	0,70

La Tabla 7 incluye los resultados alcanzados al calcular medidas de centralidad y dispersión estadísticas sobre los porcentajes obtenidos en cada una de las dimensiones y en el global de la muestra.

Las competencias clasificadas en la dimensión sistémica (DS) son las que reciben un mayor porcentaje medio de valoraciones (0,85), seguidas de las incluidas en la dimensión instrumental (DT). Ambas dimensiones se sitúan por encima de la media del porcentaje global de competencias (0,76), situándose por debajo la dimensión interpersonal (DP).

Tabla 7. Medidas estadísticas de los porcentajes

Dimensión	Media	Desviación estándar	Máximo	Mínimo	R
DS (Dimensión sistémica)	0,85	0,07	0,93	0,79	0,14
DT (Dimensión instrumental)	0,80	0,09	0,91	0,64	0,27
DP (Dimensión interpersonal)	0,66	0,08	0,75	0,52	0,23
Global	0,76	0,11	0,93	0,52	0,41

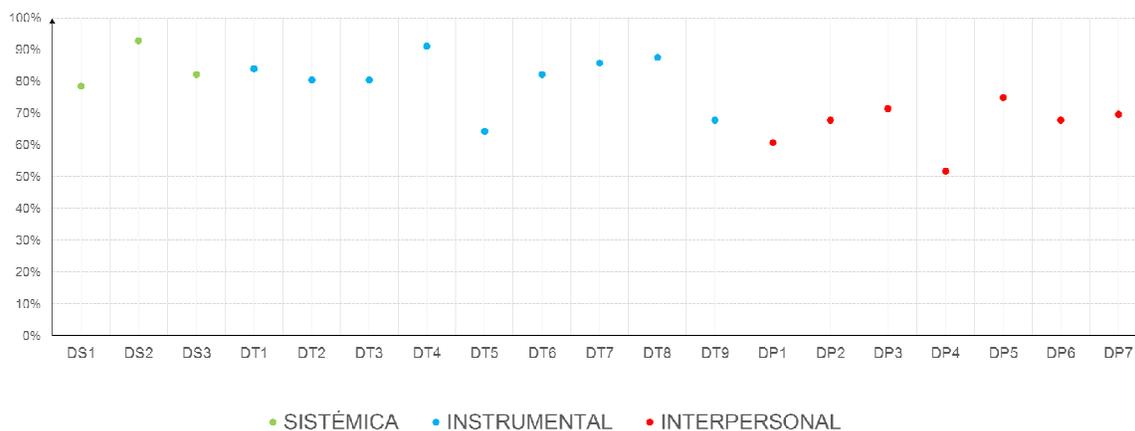
Respecto a la desviación estándar, se observa una dispersión muy pequeña y similar entre los porcentajes de valoraciones recibidas por las tres dimensiones. En este caso, la DS es la que obtiene un menor nivel de dispersión entre sus datos (0,07), seguida de la DP (0,08) y la DT (0,09). Además, todas alcanzan una dispersión inferior a la global de los resultados (0,11). La medida recorrido (R) nos permite además cuantificar la variabilidad en términos absolutos. De nuevo se observan los resultados indicados por la desviación estándar. La DS alcanza una menor variación respecto al resto de dimensiones y al global. Concretamente, la diferencia entre las competencias que obtiene un mayor y menor porcentaje de valoración dentro de la DS es de 0,14 puntos. La segunda dimensión con mejor R es DI (0,23), seguida de DT (0,27). El R global es muy superior a los obtenidos por las tres dimensiones (0,41).

Respecto a los porcentajes de valoración máximos, la DS alcanza el mayor porcentaje de valoración (0,93), aunque a poca distancia de DT (0,91). Ambos porcentajes son muy cercanos al máximo posible (1,00). A mayor distancia, y por debajo del valor medio global (0,76), se sitúa el porcentaje máximo de la DP (0,75). El porcentaje de valoración mínimo mayor también se alcanza en la DS (0,79), seguido de la DT (0,64) y la DP (0,52).

A nivel micro, nos centramos en evaluar cada competencia con respecto al resto de las clasificadas en su dimensión. Para ello, nos apoyaremos en la Figura 2, la cual representa mediante nube de puntos los porcentajes de valoración alcanzados por cada competencia del modelo.

La competencia DS2 (metareflexión) alcanza un mayor porcentaje de valoración (0,93) dentro de modelo. DS1 (creatividad) es la que recibe menor puntuación (0,79) dentro de la esta dimensión. Sin embargo, como se puede observar en la Figura 2, su valoración es superior al de la competencia DP5 (Responsabilidad) con mayor porcentaje de valoración (0,75) en la DP.

Figura 2. Nube de puntos de los porcentajes obtenidos por competencias



Dentro de la DT, la competencia DT4 (Interacción) alcanza una mayor puntuación (0,91). El resto de competencias reciben porcentajes de valoración similares comprendidos dentro del intervalo [0,80; 0,88], salvo las dos competencias que reciben menor valoración. Concretamente, DT9 (Capacidad de análisis y síntesis) y DT5 (Valoración) ocupan la penúltima y última posición dentro de la dimensión con una puntuación de 0,68 y 0,64 respectivamente. Como se observa en la Figura 2, sus puntuaciones son cercanas a las mayores obtenidas por las competencias de la DP.

Centrándonos en la DP, la DP5 (Responsabilidad) logra un mayor porcentaje de valoración (0,75). El resto de competencias de la dimensión, a excepción de DP4, alcanzan puntuaciones entre los 0,61 y 0,70. Finalmente, la DP4 (Motivación) es la que recibe una menor puntuación (0,51) dentro de la dimensión y del global.

5. Discusión

En las últimas décadas, se han producido grandes avances en el desarrollo y validación de nuevos métodos de enseñanza que faciliten el aprendizaje activo de los alumnos frente a los

tradicionales, siendo la técnica de aprendizaje cooperativo “jigsaw” una de las más valoradas y extendidas (Gillies, 2015). Los estudios sobre este método se han centrado principalmente en torno a tres principales líneas de actuación: determinar si realmente se produce o no una mejora del rendimiento académico del estudiante (Lucas, 2000; Karacop y Doymus, 2013), analizar cómo se produce (Johnson *et al.*, 1993; Slavin, 1996; Zacharia *et al.*, 2011) y determinar los beneficios derivados de la aplicación de “jigsaw” en sus experiencias (Peklaj y Vodopivec, 1999; Artut y Tarim, 2007; Tarhan *et al.*, 2013). Pese a los esfuerzos realizados en estas líneas de trabajo, no se han identificado estudios que recopilen y/o analicen los beneficios que “jigsaw” reporta en el proceso de aprendizaje con independencia del ámbito de estudio, siendo estos los objetivos que perseguimos con este trabajo.

El primer avance que se presenta en este estudio es la recopilación de los beneficios en términos competenciales que “jigsaw” puede ayudar a alcanzar. El modelo se elaboró en base a los beneficios identificados en la literatura y validados por expertos en la aplicación de esta técnica de aprendizaje. Es decir, se obtuvo a partir de los efectos observados en ámbitos de actuación muy diversos, lo que dota al modelo propuesto de carácter global. Por tanto, puede servir como base para futuros estudios de “jigsaw” con independencia del campo de aprendizaje donde se realice. Además, el modelo recoge los beneficios en términos competenciales clasificados dentro de las tres dimensiones (sistémicas, instrumentales e interpersonales) propuestas en el proyecto *Tuning* (González y Wagenaar, 2003) y ANECA (2005). De esta forma, se consigue facilitar la interpretación de los beneficios competenciales y su posterior análisis, no solo en nuestro estudio sino sirviendo como punto de partida para futuros avances en esta línea.

El segundo avance alcanzado se produce del análisis de los resultados alcanzados tras la dinámica de “jigsaw”. Para ello, nos basamos en la percepción de los estudiantes que participaron en la experiencia tal y como se sugiere en estudios previos (Ross, 1995; Gillies, 2004). De hecho, son los actores principales del proceso de enseñanza-aprendizaje que se deriva de “jigsaw” y, por tanto, los que mejor pueden apreciar aquellas competencias que este método les ayuda a adquirir frente a los tradicionales.

Los resultados de este estudio pre-experimental muestran inicialmente que “jigsaw” puede favorecer el desarrollo de competencias sistémicas, instrumentales e interpersonales. En este sentido, todas las competencias incluidas en el modelo propuesto alcanzaron al menos una puntuación del 0,52 sobre 1,00. El análisis realizado nos indica que la técnica “jigsaw” puede potenciar en mayor medida la adquisición de las competencias sistémicas, seguidas de las instrumentales e interpersonales. Es decir, este método de aprendizaje favorece más la adquisición de aquellas competencias relacionadas con el saber frente a las que representan el saber hacer y el saber ser. Aunque nuevos estudios en esta línea son necesarios para conseguir una mayor profundización en la cuestión.

Estos resultados son consistentes con investigaciones previas realizadas sobre “jigsaw” (Slavin, 1996; Peklaj y Vodopivec, 1999; Artut y Tarim, 2007; Darnon *et al.*, 2012). Cavalier *et al.* (1995) indican que se observan mejoras en los comportamientos cognitivos en alumnos que participaron en experiencias con “jigsaw” frente a los que no lo hicieron. En esta línea, Doymus (2008a) señala que mejora la asimilación de contenidos ya que disminuye las malinterpretaciones en la que incurren los alumnos. La aclaración de contenidos se produce de forma natural a través de la propia dinámica que dirige “jigsaw”, ya sea a través de la interacción del alumno con los compañeros de su grupo original, con los de su grupo de expertos o del profesor que dirige la sesión.

Este hecho puede explicarse por la metareflexión o aprendizaje progresivo por repetición (Pozzi, 2010), que la propia dinámica de la técnica favorece, así como las interacciones que se producen durante su aplicación (Hooper, 1992; Darnon *et al.*, 2012). El modelo propuesto en este estudio recoge ambos beneficios de “jigsaw” en términos competenciales, resultando ser los dos que alcanzaron una mayor puntuación.

También es interesante comparar los resultados de nuestro estudio con trabajos que analizan la distribución porcentual que deberían tener los componentes de las competencias en el marco del EEES (De Miguel, 2006; Leví-Orta y Ramos-Méndez, 2013). Al comparar qué competencias genéricas han desarrollado los estudiantes con “jigsaw”, los beneficios de esta técnica coinciden con la importancia que deben tener distintas competencias genéricas en un grado prototipo. Así, De Miguel (2006, p. 132) considera que las competencias relacionadas con la adquisición de conocimientos, (41,96%) están por encima de los

procedimientos (34,73%) y actitudes (23,71%). En contraposición, Leví-Orta y Ramos-Méndez (2013, p. 648) señalan que las habilidades (56,9%) predominan sobre los conocimientos teóricos (33,4%) y las actitudes (9,7%). Estos resultados apoyan nuestras conclusiones, ya que con “jigsaw” se facilita principalmente el grupo de competencias sistémicas (conocimientos, el saber), seguidas de las instrumentales (capacidades, habilidades, el saber hacer) y en menor medida las interpersonales (actitudes, el saber ser).

6. Conclusiones

Varios son los avances relevantes que se han logrado alcanzar en esta investigación, los cuales se pueden observar desde dos perspectivas relacionadas. Primeramente, se presenta un modelo que recoge una primera aproximación sobre los beneficios en términos competenciales que “jigsaw” aporta frente a métodos de aprendizaje individuales o competitivos. Además, el modelo recoge los beneficios clasificados en los tres tipos de competencias genéricas, lo cual facilita su interpretación y posterior evaluación.

En segundo lugar, analizamos las frecuencias y porcentajes alcanzados por cada competencia incluida en el modelo tras aplicar “jigsaw”. Los resultados de nuestra experiencia indican que “jigsaw” puede ayudar a desarrollar más fácilmente las competencias sistémicas, seguidas muy de cerca por las instrumentales y personales. Si analizamos los resultados alcanzados por las competencias de manera individual, la competencia metareflexión es la que alcanza un mayor porcentaje de valoración. Otras competencias como interacción y comunicación le siguen de cerca. En contraposición, la competencia motivación es la que recibe un menor porcentaje de valoración, seguida de respeto y resolución de conflictos. Por tanto, nuestra experiencia muestra inicialmente que la aplicación de “jigsaw” puede ayudar a mejorar la adquisición de competencias genéricas, aunque en mayor medida en las relacionadas con el saber y el saber hacer que el saber ser.

Pese a los avances alcanzados, este estudio no está exento de limitaciones propias de su carácter pre-experimental (Cook y Campbell, 1979). Es por ello que no se estableció grupo de control, lo que hace que no podamos establecer relaciones causales en base a los resultados alcanzados. Esto hace necesario en el futuro el desarrollo de estudios cuasi-experimentales (Shadish *et al.*, 2002) que profundicen más en los resultados iniciales

alcanzados en nuestro estudio. Los resultados expuestos en este trabajo pueden servir como base para el diseño y desarrollo de estudio cuasi-experimental con los siguientes tres grupos:

- El primer grupo representa la experiencia y datos de nuestro estudio, siendo éste de carácter experimental no aleatorio al que se le aplicó post-test tras la experiencia de “jigsaw”.
- El segundo y tercer grupo deberían ser creados en curso próximo. Más concretamente, el segundo sería de carácter experimental no aleatorio sobre el que se aplicaría nuevamente “jigsaw”, así como tratamiento pre-test y post-test. El tercero sería grupo de control no aleatorio sobre el que no se aplicaría “jigsaw” aunque sí post-test.

Además, no se aplicó escala con varios niveles de desarrollo sino que se utilizaron respuestas dicotómicas para identificar sólo las competencias que claramente pueden ser mejoradas mediante la aplicación de “jigsaw”, descartando así las dudosas. De cara a futuros estudios en esta línea de trabajo de carácter cuasi-experimental, sí deberían aplicarse escalas con varios niveles de desarrollo. Respecto a la muestra, se desarrolló durante el curso la dinámica en una asignatura de último año de carrera, viéndose en consecuencia reducido el tamaño muestral. No se ha realizado ningún tipo de comparación con otras titulaciones. Es por ello que se considera necesario el desarrollo futuro de nuevas investigaciones que permitan observar si se obtienen los mismos resultados en alumnos de otras titulaciones y niveles del sistema educativo. En el caso de que se produjeran divergencias, podría incluso determinarse qué factores pueden influir en una mayor o menor medida sobre la adquisición de competencias de tipo sistémico, instrumental e interpersonal durante la aplicación de “jigsaw”.

Bibliografía

ANECA (2005): *Libro blanco título de grado en economía y empresa*. Madrid: Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación.

ARONSON, E.; STEPHAN, C.; SIKES, J.; BLANEY, N. y SNAPP, M. (1978): *The jigsaw*

classroom. Beverly Hills: Sage Publications.

ARTUT, P.D. y TARIM, K. (2007): “The effectiveness of jigsaw II on prospective elementary school teachers”. *Asia-Pacific Journal of Teacher Education*, 35(2), pp. 129–141.

BABBIE, E. (2010): *The practice of social research*. Belmont: Wadsworth Publishing Group.

BRYMAN, A. (2008): *Social research methods*. Oxford: Oxford University Press.

CAVALIER, J.C.; KLEIN, J.D. y CAVALIER, F.J. (1995): “Effects of cooperative learning on performance, attitude, and group behaviors in a technical team environment”. *Educational Technology Research and Development*, 43(3), pp. 61–71.

CLEMENTE-RICOLFE, J.S. y ESCRIBÁ-PÉREZ, C. (2013): “Análisis de la percepción de las competencias genéricas adquiridas en la universidad”. *Revista de Educación*, 362, pp. 535–561.

COOK, T.D. y CAMPBELL, D.T. (1979): *Quasi-experimentation: Design and analysis issues for field settings*. Chicago: Rand-McNally.

COROMINAS, E.; TESOURO, M.; CAPELL, D.; TEIXIDÓ, J.; PÈLACH, J. y CORTADA, R. (2006): “Percepciones del profesorado ante la incorporación de las competencias genéricas”. *Revista de Educación*, 341, pp. 301–336.

DANSEREAU, D.F. (1986): “Dyadic cooperative learning and performance strategies”. Comunicación presentada en Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.

DARNON, C.; BUCHS, C. y DESBAR, D. (2012): “The jigsaw technique and self-efficacy of vocational training students: a practice report”. *European Journal of Psychology of Education*, 27, pp. 443–449.

DE LA IGLESIA, M.C. (2012): “La identificación de factores en el desarrollo de competencias de los estudiantes universitarios. Un estudio exploratorio”. *Revista*

- Complutense de Educación*, 23(1), pp. 207–240.
- DE MIGUEL, M. (2006): *Modalidades de enseñanza centradas en el desarrollo de competencias. Orientaciones para promover el cambio metodológico en el marco del EEES*. Oviedo: Ediciones Universidad de Oviedo.
- DOYMUS, K. (2008a): “Teaching chemical bonding through jigsaw cooperative learning”. *Research in Science & Technological Education*, 26(1), pp. 47–57.
- DOYMUS, K. (2008b): “Teaching chemical equilibrium with jigsaw technique”. *Research in Science Education*, 38(2), pp. 249–260.
- FLAVELL, J.H. (1979): “Metacognition and cognitive monitoring. A new area of cognitive developmental inquiry”. *American Psychologist*, 34(10), pp. 705–712.
- GARCÍA, R.; TRAVER, J. y CYELA, I. (2001): *Aprendizaje cooperativo. Fundamentos, características y técnicas*. Madrid: CCS.
- GILLIES, R.M. (2004): “The effects of cooperative learning on junior high school students during small group learning”. *Learning and Instruction*, 14(2), pp. 197–213.
- GILLIES, R.M. (2015): *Collaborative learning: Developments in research and practice*. New York: Nova Science Publishers.
- GÖMLEKSI'Z, M.N. (2007): “Effectiveness of cooperative learning (jigsaw II) method in teaching English as a foreign language to engineering students”. *European Journal of Engineering Education*, 35(2), pp. 613–625.
- GONZÁLEZ, J. y WAGENAAR, R. (2003): *Tuning Educational Structures in Europe. Final Report. Phase One*. Bilbao: Universidad de Deusto. Recuperado de: http://www.unideusto.org/tuningeu/images/stories/documents/General_Brochure_Spanish_version.pdf (consultado 16/12/2015).
- IGLESIA VILLASOL, M.C. (2011): “Adecuación del grado de desarrollo de la formación en competencias a la necesidad en el entorno laboral, según la opinión de los estudiantes”. *Revista Complutense de Educación*, 22(1), pp. 71–92.

- HOOPER, S. (1992): "Cooperative Learning in Computer Based Instruction". *Educational Technology Research and Development*, 40(3), pp. 21–28.
- JOHNSON, D.W.; JOHNSON, R.T. y HOLUBEC, E.J. (1993): *Circles of learning: cooperation in the classroom*. Edina: Interaction Book.
- JOHNSON, D.W. y JOHNSON, R.T. (2002): "Learning together and alone: Overview and meta-analysis". *Journal of Education*, 22(1), pp. 95–105.
- KARACOP, A. y DOYMUS, K. (2013): "Effects of jigsaw cooperative learning and animation techniques on students' understanding of chemical bonding ante their conceptions of the particulate nature of matter". *Journal of Science Education and Technology*, 22(2), pp. 186–203.
- KHALIL, M.; LAZAROWITZ, E.R. y HERTZ-LAZAROWITZ, E.R. (2009): "A conceptual model (the six mirrors of the classroom) and its application to teaching and learning about microorganisms". *Journal of Science Education and Technology*, 18(1), pp. 85–100.
- LEÓN, B.; FELIPE, E.; IGLESIAS, D. y LATAS, C. (2011): "El aprendizaje cooperativo en la formación inicial del profesorado de educación secundaria". *Revista de Educación*, 354, pp. 715–729.
- LEVÍ-ORTA, G.C. y RAMOS-MÉNDEZ, E. (2013): "Componentes de las competencias en los nuevos grados de algunas universidades españolas". *Revista de Educación*, 362, pp. 623–658.
- LUCAS, C.A. (2000): "Jigsaw lesson for operations of complex numbers". *Primus*, 10(3), pp. 219–224.
- MAQSUD, M. (1997): "Effects of Metacognitive Skills and Nonverbal Ability on Academic Achievement of High School Pupils". *Educational Psychology*, 17(4), pp. 387–397.
- MARTÍN-PEÑA, M.L.; DÍAZ-GARRIDO, E. y DEL BARRIO IZQUIERDO, L. (2012): "Metodología docente y evaluación por competencias: una experiencia en la materia

- Dirección de Producción”. *Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa*, 18(3), pp. 237–247.
- MCMANUS, M.M. y AIKEN, R.M. (1996): “Teaching collaborative skills with a group leader computer tutor”. *Education and Information Technologies*, 1(1), pp. 75–96.
- MEDINA, R. (2005): “Misiones y funciones de la Universidad en el Espacio Europeo de Educación Superior”. *Revista Española de Pedagogía*, 63(230), pp. 17–42.
- MONDÉJAR JIMÉNEZ, J.; VARGAS VARGAS, M. y SANTAMARÍA MESEGUER, M.L. (2007): “Aprendizaje cooperativo en entornos virtuales: el método Jigsaw en asignaturas de estadística”. *Documentos de Trabajo: Seminario Permanente de Ciencias Sociales*, 3, 18 pp.
- MONJAS CASARES, M. y GONZÁLEZ MORENO, B. (1998): *Las habilidades sociales en el currículo*. Colección: Investigación, nº 146. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- MONTORO-SÁNCHEZ, M.A.; MORA-VALENTÍN, E.M. y ORTIZ-DE-URBINA-CRIADO, M. (2012): “Análisis de las competencias adquiridas en los estudios de Dirección de Empresas y su grado de aplicación en las prácticas en empresas”. *Revista Complutense de Educación*, 23(1), pp. 241–263.
- O’LEARY, N. y GRIGGS, G. (2010): “Researching the pieces of a puzzle: The use of a jigsaw learning approach in the delivery of undergraduate gymnastics”. *Journal of Further and Higher Education*, 34(1), pp. 73–81.
- PALMER POL, A.; MONTAÑO MORENO, J.J. y PALOU OLIVER, M. (2009): “Las competencias genéricas en la educación superior. Estudio comparativo entre la opinión de empleadores y académicos”. *Psicothema*, 21(3), pp. 433–438.
- PEKLAJ, C. y VODOPIVEC, B. (1999): “Effects of cooperative versus individualistic learning on cognitive, affective, metacognitive and social processes in students”. *European Journal of Psychology of Education*, 14(3), pp. 359–373.
- POZZI, F. (2010): “Using Jigsaw and Case Study for Supporting Online Collaborative

- Learning”. *Computers & Education*, 55 (1), 67–75.
- PUJOLÀS MASET, P. (2009): “La calidad en los equipos de aprendizaje cooperativo. Algunas consideraciones para el cálculo del grado de cooperatividad”. *Revista de Educación*, 349, pp. 225–239.
- RAMOS, A.I.; HERRERA, J.A. y RAMÍREZ, M.S. (2010): “Desarrollo de habilidades cognitivas con aprendizaje móvil: un estudio de casos”. *Comunicar*, 34(7), pp. 201–209.
- REED, S.K. (2012): *Cognition. Theory and applications*. Belmont: Thomson Wadsworth.
- RODRÍGUEZ IZQUIERDO, R.M. (2015): “Competencias genéricas en la enseñanza superior a través de los programa de internacionalización”. *Revista Complutense de Educación*, 26(1), pp. 81–100.
- ROSS, J.A. (1995): “Effects of feedback on student behavior in cooperative learning groups in a grade 7 math class”. *The Elementary School Journal*, 96(2), pp. 125–143.
- SAIZ, M.C. y ROMÁN, J.M. (2011): “Cuatro formas de evaluación en educación superior gestionadas desde la tutoría”. *Revista de Psicodidáctica*, 16(1), pp. 145–161.
- SEVILLANO GARCÍA, M.L. (2009): *Competencias para el uso de herramientas virtuales en la vida, trabajo y formación permanentes*. Madrid: Pearson Prentice Hall.
- SLAVIN, R.E. (1990): “Learning together”. *American School Board Journal*, 177, pp. 22–23.
- SLAVIN, R.E. (1996): “Research on cooperative learning and achievement: What we know, what we need to know”. *Contemporary Educational Psychology*, 21(1), pp. 43–69.
- SHADISH, W.; COOK, T. & CAMPBELL, D.T. (2002): *Experimental and quasi-experimental designs for generalized causal inference*. Boston: Houghton Mifflin.
- TARHAN, L.; AYYILDIZ, Y.; OGUNC, A. y SESEN, B.A. (2013): “A jigsaw cooperative learning application in elementary science and technology lessons: physical and chemical changes”. *Research in Science & Technological Education*, 31(2),

pp. 184–203.

TRAVER MARTÍ, J.A. y GARCÍA LÓPEZ, R. (2004): “La enseñanza-aprendizaje de la actitud de solidaridad en el aula: una propuesta de trabajo centrada en la aplicación de la técnica puzzle de Aronson”. *Revista Española de Pedagogía*, 62(229), pp. 419–438.

TUNING PROJECT (2008): *Tuning Educational Structures. La contribución de las universidades al proceso de Bolonia. Una introducción*. Bilbao: Universidad de Deusto. Recuperado de: <http://www.deusto-publicaciones.es/deusto/index.php/es/tuning-es/tuning-bolonia-es> (consultado 16/12/2015).

VALLET-BELLMUNT, T.; RIVERA-TORRES, P.; VALLET-BELLMUNT, I. y VALLET-BELLMUNT, A. (2016): “Eficiencia del plan de marketing como técnica de aprendizaje cooperativo”. *European Research on Management and Business Economics*, 22(1), pp. 17–24.

ZACHARIA, Z.C.; XENOFONTOS, N.A. y MANOLI, C.A. (2011): “The effect of two different cooperative approaches on students’ learning and practices within the context of a WebQuest science investigation”, *Educational Technology Research and Development*, 59(3), pp. 399–424.



Análisis cualitativo comparativo difuso para determinar influencias entre variables socio-económicas y el rendimiento académico de los universitarios

FEDRIANI MARTEL, EUGENIO M.

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide (España)
Correo electrónico: efedmar@upo.es

ROMANO PAGUILLO, INMACULADA

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide (España)
Correo electrónico: iromano@upo.es

RESUMEN

El objetivo de este artículo es explicar el rendimiento académico con la ayuda de una técnica novedosa: el análisis cualitativo comparativo difuso. Para hacerlo posible, se consideran diferentes variables que afectan a la educación superior, así como el rendimiento académico de los estudiantes universitarios. Los datos utilizados provienen de los diferentes grados impartidos en la Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad Pablo de Olavide, de Sevilla (España), desde el año 2009, aunque la técnica utilizada puede ser fácilmente adaptada a otros colectivos y situaciones.

Palabras claves: economía de la educación; educación superior; análisis cualitativo comparativo; espacio europeo de educación superior.

Clasificación JEL: I21; C02.

MSC2010: 91B15; 03B52.

Fuzzy-Set Qualitative Comparative Analysis to Determine Effects from Socio-Economical Factors and University Students Performance

ABSTRACT

The objective of this paper is to explain academic performance with the aid of an innovative technique: Fuzzy-set Qualitative Comparative Analysis (fsQCA). To do so, different objective factors, which affect higher education, are analyzed and the academic performance of university students is also considered. Specifically, data of students on different degrees in the Faculty of Business Sciences of the Pablo de Olavide University of Seville since 2009 was used, but it is believed that the methodology described can be easily extrapolated.

Keywords: education economics; higher education; qualitative comparative analysis; European higher education area.

JEL classification: I21; C02.

MSC2010: 91B15; 03B52.



1. Introducción

Es indudable que existe una relación compleja entre Economía y Educación, pues son ámbitos que se afectan mutuamente y a través de múltiples variables interrelacionadas. Este hecho ha propiciado la aparición de numerosos trabajos de investigación que tratan de desentrañar tales influencias.

Por una parte, el interés por el análisis del rendimiento académico de los estudiantes viene justificado por la importancia de una buena elección de la carrera universitaria; un estudiante que elige con criterio tiene una mayor probabilidad de acabar con éxito, tanto en su vida académica como en su vida profesional, lográndose una mayor rentabilidad social y económica. De hecho, distintos autores (como [2], [3] y [14]) se reafirman en la rentabilidad social que genera una educación universitaria adecuada.

Por otra parte, en general, una mejora en la tasa de éxito de los estudiantes repercutiría en una disminución en los costes de las universidades y, con ello, en un ahorro económico a escala regional o nacional en los estudios universitarios [5]. Dicha mejora sería posible de conocerse las variables que determinan una gran parte de los resultados académicos finales y la dirección de su influencia en cada caso.

Abundando en lo anterior, las implicaciones de una buena elección de la carrera académica (a la hora de la matrícula universitaria) y la profesional van más allá del significado de una inversión en educación del propio individuo y, por ello, este factor (elegir correctamente la carrera) es muy influyente tanto en la economía universitaria como en diferentes aspectos considerados y analizados por la Economía de la Educación.

De todo esto se puede deducir que es relevante detectar los factores que explican el éxito o fracaso de los estudiantes, sobre todo en el primer curso académico (porque el primer año puede marcar el resto de la carrera y, además, porque es sobre el que se puede actuar más directamente mediante una modificación en la elección de la misma, por ejemplo).

Son numerosos los trabajos que se han desarrollado sobre los factores específicos que influyen en Educación; por ejemplo, se pueden consultar: [4], [12], [16] y [6]. En particular, varios de ellos analizan a estudiantes que estudian asignaturas de Matemáticas para Economía o Empresa; el motivo principal es que estas asignaturas son decisivas para el éxito académico y afectan como ninguna otra en el abandono académico prematuro.

En lo que respecta a las variables previas al ingreso en la Universidad, distintos autores han publicado diferentes trabajos sobre las asignaturas que el estudiante debería haber cursado antes de ingresar; en particular, las asignaturas de Matemáticas resultan esenciales para estudiantes del Grado en Economía, del Grado en Administración y Dirección de Empresas, etc. (cualquiera que sea la institución analizada) [6].

El principal objetivo de este trabajo es, consecuentemente, encontrar combinaciones de factores (o condiciones) que permiten garantizar el éxito académico de los estudiantes universitarios (resultado). Para ello, en este trabajo se consideran específicamente las variables y los datos descritos en [7], que se refieren a un colectivo formado por 1492 estudiantes de la Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad Pablo de Olavide, de Sevilla (España). Concretamente, la siguiente sección se dedica a una exposición resumida de los datos y variables consideradas. En otra sección se explica posteriormente la técnica utilizada para el análisis de dichos datos. Justo después se recoge la aplicación de la técnica a los datos y el artículo concluye con algunas de las conclusiones más destacadas del análisis.

2. Datos

Los datos utilizados en esta investigación han sido recopilados de distintas fuentes. Los datos económicos, asociados a los estudiantes a través de sus domicilios, se han consultado en distintas bases de datos y actualizados a partir del Instituto Nacional de Estadística (INE) [9, 10, 11], del Instituto Geográfico Nacional (IGN)(www.ign.es), del Instituto de Estadística y Cartografía de Andalucía (IECA) [8], de los Ayuntamientos de Sevilla y Dos Hermanas, de la herramienta web Google Maps (www.google.es/maps) y la página (www.codigo-postal.info/sevilla/sevilla/7).

A partir de la información recopilada, se han desarrollado otras variables económicas definidas *ad hoc* y verificadas por expertos en la materia, atendiendo a las necesidades que el problema que se deseaba resolver sugería.

Por otra parte, las variables de carácter académico se han obtenido gracias a la colaboración de los profesores y coordinadores de las asignaturas del Área de Métodos Cuantitativos del Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica de la Universidad Pablo de Olavide, de Sevilla (UPO). Los datos de acceso e información previa de los estudiantes se han con-

seguido gracias al Área de Estudiantes y al Área de Gestión de Matrícula y Expediente Académico de Grado de la misma UPO.

Los datos académicos o educativos (a los que se acaba de hacer referencia) corresponden a un conjunto de 1492 estudiantes de Grado de la UPO, en concreto, de la Facultad de Ciencias Empresariales (FCE). Este grupo de estudiantes está delimitado por ser alumnos de las asignaturas obligatorias que imparte el Área de Métodos Cuantitativos del Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica en la FCE. A partir de las calificaciones obtenidas en dichas asignaturas, se calcula un índice del rendimiento académico de cada estudiante, según se explicita en [7]. *Grosso modo*, el indicador consiste en calcular la media aritmética de las notas conseguidas por el estudiante y multiplicarla por un “coeficiente penalizador”, que depende del grupo en el que dicho estudiante es clasificado según una red neuronal artificial entrenada para generar subgrupos casi-homogéneos por número de asignaturas matriculadas y convocatorias agotadas. Una vez normalizadas las calificaciones entre 0 y 1, puesto que el coeficiente penalizador también está entre 0 y 1, los valores del indicador se mueven teóricamente entre 0 y 1.

Además de los valores del indicador, se conocen (entre otras) las siguientes características personales y educativas previas de los estudiantes. Todas ellas son conocidas a través de un formulario sencillo previo a que los estudiantes comiencen sus estudios universitarios. No obstante, en el conjunto de datos utilizado para este trabajo solo hay 858 casos en los que se conocen con fiabilidad los valores de todas y cada una de las variables. En el siguiente listado de variables, se indica entre corchetes el nombre original de cada variable, aunque algunas de ellas hubieron de recodificarse posteriormente (por lo que pueden no coincidir exactamente con las denominaciones de las tablas de resultados).

- Sexo [*Sexo*]: variable que toma los valores *mujer* y *hombre*, con un único valor posible para cada estudiante si bien puede haber datos perdidos.
- Edad [*Edad*]: valor numérico (creado a partir de la fecha de nacimiento de cada estudiante) que corresponde a la edad del estudiante en el momento de entrar por primera vez en los estudios universitarios.
- Municipio familiar [*Mun_f*]: municipio familiar del estudiante durante el primer curso de estudios universitarios.

- Dirección postal familiar [*Dir_f*]: dirección de la familia del estudiante durante el primer curso de universidad.

A partir de las dos variables anteriores se obtienen las variables socioeconómicas del estudiante.

- Municipio durante el curso [*Mun_c*]: municipio del estudiante durante el curso, que no tiene que coincidir obligatoriamente con el municipio familiar.
- Dirección postal durante el curso [*Dir_c*]: dirección del estudiante durante el curso, siendo esta variables en algunos casos coincidente con la dirección postal familiar.

A partir de las dos variables anteriores se obtiene la distancia en km y la distancia en tiempo desde este domicilio del estudiante hasta la UPO.

- Tipo de centro [*Tipo_centro*]: tipo de centro donde el estudiante ha cursado sus estudios justamente anteriores al acceso a la UPO. Puede tomar los siguientes valores:

1. I.E.S. (centros públicos)
2. C.D.P. (centros concertados o privados)
3. Otros

- Nota del expediente Bachillerato [*Nota_exp*]: nota del expediente académico del estudiante en bachillerato; esta nota está comprendida entre 5 y 10.
- Nota fase general de la PAU [*Nota_GPAU*]: nota de la fase general de la PAU (Prueba de Acceso a la Universidad); esta nota está calculada como la media obtenida a partir de los exámenes de: Comentario de Texto, Idioma, Filosofía e Historia; el valor de esta nota está comprendido entre 0 y 10.
- Nota acceso [*Nota_Acceso*]: nota general de selectividad (propiamente, media de las calificaciones de los exámenes de la PAU), con valor comprendido entre 4 y 14.

Como se ha comentado, las variables anteriores permiten obtener información sobre las características socio-económicas de cada estudiante. Una vez realizados los cálculos y las modificaciones oportunas a la base de datos de ámbito económico, las variables utilizadas son las que a continuación se describen. Conviene aclarar que los datos corresponden a los municipios de Andalucía (en concreto, a un total de 840 municipios).

- Extensión del municipio [*ExtMun_ año*]: kilómetros cuadrados de la superficie de cada término municipal completo en el año 2010. Corresponde a la última información publicada en la base cartográfica numérica a escala 1:25.000 del IGN.
- Distancia a la capital provincial [*Dist_ año*]: kilómetros de distancia entre cada núcleo principal del municipio y la capital de provincia. La fuente utilizada es el INE.
- Altitud sobre el nivel del mar [*Altitud_mar_ año*]: metros de altitud sobre el nivel del mar de un punto de la entidad singular principal. Es la información publicada del año 1999 en la base de datos de cartografía del IGN.
- Población [*Pob_ año*]: número de habitantes (a fecha del 1 de enero del año correspondiente) inscritos en el padrón municipal custodiado por el ayuntamiento del municipio. La información obtenida es desde el año 1996 al año 2011, siendo la fuente de obtención de dicha información el INE. La variable Población ha tenido que ser modificada para algunos análisis (con la ayuda de los Ayuntamientos de Sevilla y Dos Hermanas), para obtener información de la población por distritos de la capital de Sevilla así como para obtener información de los distintos núcleos poblacionales de Dos Hermanas; en particular, para obtener información sobre Montequinto, cuyo conocimiento es crucial para este trabajo por proximidad a la UPO y por el volumen de estudiantes que proceden de allí.
- Edad media de la población [*Edad_Pob_ año*]: promedio en años de la edad del total de la población inscrita en el padrón municipal residente en el municipio correspondiente. La información corresponde al período desde el año 2001 hasta 2010 y ha sido obtenida del INE.
- Población extranjera [*Pob_Ext_ año*]: número de habitantes extranjeros, a fecha del 1 de enero del año correspondiente, inscritos en el padrón municipal desde 1997 a 2011.
- IBI de naturaleza urbana: nº inmuebles oficina [*IBI_ofic_ año*]: número de inmuebles de oficina que existen en cada municipio. La fuente de es la Dirección General del Catastro y corresponde al impuesto sobre bienes inmuebles y bienes de naturaleza urbana, del año 1999 hasta el año 2010.
- IRPF: renta neta declarada media [*RentaN_ año*]: la renta neta media se define como el cociente entre la renta neta total declarada y el número de declaraciones. La información que se facilita en esta variable está medida en euros y es la que se obtiene como suma de las rentas

declaradas según el tipo de rendimiento: rentas netas del trabajo, rentas netas de actividades empresariales, rentas netas de actividades profesionales y otros tipos de rentas. La fuente utilizada es la Agencia Tributaria y la información se refiere a los años 1999, 2000, 2002, 2003, 2004 y 2006.

- I.B.I. de naturaleza urbana: base imponible [*NumBase_año*]: valor de la base imponible, atendiendo a que se ha considerado como unidad urbana a todos los inmuebles con una relación de propiedad perfectamente delimitada a efectos fiscales. La variable ha sido elaborada a partir de la información de la Dirección General del Catastro, en concreto de sus estadísticas catastrales. Los años disponibles son desde 1998 hasta 2010.
- Energía [*Energía_año*]: datos procedentes de las facturaciones en megavatios por hora realizadas por la Compañía Sevillana de Electricidad a sus abonados. Se debe tener en cuenta que existen municipios que no poseen suministros, luego allí los datos son estimados. La fuente de la base de datos es la propia Compañía Sevillana de Electricidad, del año 1998 hasta 2010.

3. Metodología aplicada: el análisis cualitativo comparativo difuso

En otros trabajos se han comprobado las dificultades de aplicar métodos tradicionales al problema que se está afrontando, por lo que aquí se utiliza una técnica novedosa (fsQCA) para obtener resultados que, aunque parciales, son razonables, en cuanto a que no son incompatibles con los obtenidos por otros autores siguiendo otras estrategias. Pueden destacarse los resultados obtenidos recientemente mediante la aplicación de técnicas basadas en la inteligencia artificial; dichas técnicas están permitiendo obtener fiabilidad a pesar de tratarse de situaciones y modelos con gran número de variables interrelacionadas (véanse, por ejemplo, [7] y [15]).

Actualmente se reconocen, al menos, cinco formas de inteligencia artificial inspiradas en el funcionamiento del cerebro humano:

1. Ejecución automática de una respuesta predeterminada a cada posible entrada: este tipo sería el más básico y el análogo a los actos reflejos de los seres vivos.
2. Previsión de un conjunto de estados producidos por las acciones posibles y posterior búsqueda del estado efectivamente sucedido.

3. Algoritmos genéticos, que están más bien inspirados en el proceso de evolución de los seres vivos que se produce por la modificación y combinación progresiva de las cadenas de ADN.
4. Redes neuronales artificiales, que imitan el funcionamiento físico del cerebro de animales y humanos, sobre todo en lo que corresponde al aprendizaje y a la respuesta ante situaciones imprevistas de antemano.
5. Razonamiento mediante una lógica formal, que sería lo más análogo al pensamiento abstracto humano, pero la lógica a veces no puede aplicarse en su versión binaria, sino que debe ser “difusa” o “borrosa” (del inglés, *fuzzy*); hay que tener en cuenta que el cerebro humano es capaz de atender a la imprecisión de la realidad y en ocasiones tiene que medir características difíciles de cuantificar (qué es algo lejano, pobre, caro...).

En este último tipo de inteligencia artificial bien pudiera englobarse una técnica novedosa denominada Análisis Cualitativo Comparativo Difuso (fsQCA), que se explica brevemente a continuación por ser la que se aplica posteriormente al conjunto de datos considerado en esta investigación.

Por cuestiones prácticas, la siguiente introducción a la técnica fsQCA es superficial; hay varios artículos recientes que también pueden servir para hacerse una idea de su filosofía y funcionamiento (a este respecto, se pueden consultar, por ejemplo, [13], [17], [18] y [1]).

Pueden señalarse dos aspectos como clave para entender el interés de fsQCA en el ámbito de la Educación, de la Economía, de la Empresa y, en general, de las Ciencias Sociales: por una parte, que permite extraer conclusiones de los casos particulares (desde este punto de vista, se trata del equivalente cuantitativo del método del caso en Empresa), no como las técnicas estadísticas tradicionales, que no están diseñadas para justificar la validez de los estudios sobre muestras reducidas sino para operar bajo el paraguas de las propiedades asintóticas; por otro lado, facilita la incorporación de valoraciones imprecisas (variables subjetivas o de difícil medida exacta, variables en las que no se está muy seguro de los valores reales que toma, etc.), obteniéndose en muchos casos relaciones no simétricas, es decir, que pueden detectarse causas y consecuencias sin que necesariamente se estén produciendo relaciones de equivalencia (sino solo condiciones necesarias o suficientes).

Por otro lado, la diferencia fundamental entre la lógica tradicional (de dos valores de verdad: verdadero y falso) y la difusa se podría comparar con la diferencia entre precisión y relevancia (o significatividad); es decir, a veces no se necesita toda la información o que toda la información

sea precisa o exacta... sino que solo es necesario contar con la información que tiene realmente importancia. Este aspecto lo aporta la Lógica Difusa, en la que determinadas variaciones en los datos o resultados son relevantes mientras que otras variaciones no tienen la menor importancia.

Según [17], fsQCA surge para evitar los numerosos problemas que trae consigo la aplicación indebida de técnicas tradicionales como, por ejemplo, la Regresión Lineal Múltiple. Woodside [17] sostiene que la Regresión Lineal hace que los investigadores piensen de un determinado modo, que no siempre es el más apropiado. Por otro lado, afirma que en las regresiones suele confundirse ajuste (lo que realmente se hace) con predicción (lo que se desearía hacer).

Aparte de la crítica anterior, fsQCA también destaca como técnica interesante para analizar conjuntamente variables de diferentes tipos (aunque se requieran transformaciones) o cuando se necesita incorporar características cuantitativas continuas junto con otras discretas o cualitativas/categóricas.

Al contrario de lo que ocurre en otras técnicas, con fsQCA no es necesario suponer independencia entre las variables explicativas y tampoco supone la existencia de relaciones causa-efecto (pues se considera una lógica asimétrica). Es más, como se trata de un modelo cualitativo (aunque comparado), hay que hablar de “causas del efecto” y no de “efectos de las causas”. Esta característica puede parecer una limitación de la técnica, cuando en realidad implica otra forma de entender la realidad, más basada en las relaciones entre las causas que en la influencia entre cada causa y los efectos. De hecho, de acuerdo con [13] y [18], el “efecto neto” no siempre es un concepto útil o válido en la investigación científica.

Otra ventaja de esta técnica es que tampoco es necesario suponer linealidad u otros tipos de relaciones *a priori* entre las variables explicativas y las explicadas. Finalmente, conviene resaltar que fsQCA permite conseguir significatividad con pocas observaciones. Esto es muy importante en Ciencias Sociales, porque es frecuente encontrar trabajos publicados en revistas prestigiosas en los que se extraen conclusiones con unos valores de los estadísticos muy poco significativos (R^2 o p -valor excesivamente bajos) o con muestras poco representativas.

Antes de describir la técnica, es pertinente realizar algunos breves comentarios sobre su origen. Por eso, en un párrafo se resume el fundamento del Análisis Cualitativo Comparativo (QCA). Fue desarrollado por el prestigioso sociólogo Charles C. Ragin. Primero, antes de 1990, desarrolló la técnica denominada csQCA (de las iniciales de *crisp set*, relativa a la Lógica Booleana). Se trataba

de “repensar” tipos de problemas. No se basaba en la idea de correlación sino en buscar relaciones lógicas entre “condiciones causales”. Es decir, se trata a los casos como “configuraciones de causas” y se valora cuáles de dichas configuraciones tienen una influencia en los resultados que se desea analizar.

En cuanto a fsQCA propiamente dicho, lógicamente, tiene unas hipótesis de aplicación (aunque razonables en el caso de esta investigación):

- Los resultados (“outcome”, que es el equivalente a “consecuencia” o “variable dependiente” en otras técnicas utilizadas para hacer inferencia) no suelen serlo de una sola condición (o una sola causa en el lenguaje habitual), sino de una combinación de ellas.
- Diferentes combinaciones de causas pueden proporcionar el mismo resultado final.
- Normalmente, no es posible tener casos de todas y cada una de las combinaciones posibles de causas, pero eso no debe ser impedimento para extraer conclusiones lógicas válidas.
- Las relaciones causales pueden no ser simétricas; es decir, algo puede ser causa sin ser la única y algo puede ser resultado sin ser el único. Desde otro punto de vista, una combinación causal no suele ser suficiente al 100 %.
- Un mismo conjunto de casos no debería utilizarse para explicar diferentes objetivos o diferentes resultados.

Hay determinadas circunstancias que parecen recomendar la aplicación de fsQCA. En cierto modo, fsQCA está a medio camino entre lo cualitativo y lo cuantitativo. Es una técnica que proporciona relaciones de causalidad difusas entre determinadas configuraciones y ciertos resultados. Presta más atención a los casos que a las variables: las variables relevantes se cambian por casos (o *paths*) relevantes. Por todo lo anterior, fsQCA es una técnica apropiada y particularmente potente cuando se estudian sistemas grandes y complejos, donde la interferencia de ocurrencias y de variables es importante. Algunas áreas (no excluyentes) de aplicaciones destacadas y actuales de fsQCA incluyen: descubrir patrones ocultos en los datos cualitativos, habitualmente mediante el uso de ordenadores; estudios de Sociología, donde las variables son usualmente subjetivas; análisis de datos para la toma de decisiones (empresariales...); etc.

En cuanto al sentido de la incorporación de la Lógica Difusa al QCA (o csQCA), es justo reconocer que fsQCA también parte de la Lógica Booleana, pero la mejora o potencia. Así, se

asigna a cada individuo un “índice/grado de pertenencia” al grupo (de modo que lo cualitativo se hace cuantitativo) que verifica las condiciones (en inglés, *recipe*, que se puede traducir por “receta” o “fórmula”). Un error muy común es considerar que este grado de pertenencia es una probabilidad. No se trata de eso, sino de asumir que cada individuo puede participar parcialmente de las características de un grupo (definido por la correspondiente receta).

Tras la aplicación de fsQCA, no siempre es posible encontrar equivalencias en los datos, pero a menudo sí es posible determinar condiciones necesarias o suficientes (o que lo son casi siempre).

En cierto modo, fsQCA se opone a la teoría de indicadores (sobre todo los unidimensionales), pues un indicador es un *output* para ordenar mientras que fsQCA no trata de dar puntuaciones a los individuos en la salida sino en la entrada.

3.1. Proceso de aplicación de fsQCA

El paso previo lógico consiste en determinar el problema y elegir los datos apropiados. Ha de tenerse en cuenta que el conjunto de casos puede variar a lo largo del proceso (normalmente se reduce). Después, conviene comprobar si los datos son “razonables”; hay que eliminar las partes de los datos que puedan ser problemáticas; a veces es pertinente dividir el conjunto de datos; debe comprobarse si el número de datos es adecuado (no muy grande ni muy pequeño...); etc.

A continuación, se convertirían las k variables/características en “difusas”. Para dar este paso, que luego se explica bajo el nombre de “calibrado”, suele ser necesario determinar el grado de pertenencia de cada caso a cada clase. Tanto este paso como los siguientes, pueden realizarse con la ayuda de un programa específico que puede encontrarse en <http://fsqca.com>.

Con el paso anterior, es posible establecer la *truth table* o “tabla de configuraciones” (sin configuraciones contradictorias), con k términos (cada uno o su complementario, conectados todos por conjunciones lógicas o “y lógicos”).

Una vez establecida la tabla de configuraciones, hay que evaluar las 2^k configuraciones (son del tipo “si se da la configuración, entonces se obtiene el resultado”), junto con sus complementarios, estableciendo pertenencias.

No todas las configuraciones son significativas. Deben utilizarse el número de casos (eliminando los de poca frecuencia) y la Lógica Booleana (para prescindir de las cláusulas redundantes) para

reducir las 2^k configuraciones (en números absolutos y en términos que tenga cada condición, si es posible).

Finalmente, el investigador debe seleccionar las reglas con adecuadas “coherencia” y “cobertura” para extraer las conclusiones pertinentes e interpretarlas. Enseguida se comenta qué coherencias y coberturas pueden considerarse razonables en estudios del tipo que se aborda en este artículo.

3.2. Algunos elementos concretos relevantes del fsQCA

A continuación se realizan algunas explicaciones sobre el proceso anterior, a fin de facilitar su comprensión para los lectores que aún no estén familiarizados con él.

Comenzando por el calibrado (o ajuste), es como una normalización de los datos (tanto en las entradas como en las salidas), que se puede hacer en forma “binaria”, “de intervalo” o “*fuzzy*”. Como ya se ha comentado, consiste en estimar el grado de pertenencia de cada caso al grupo (o *recipe*). En el caso *fuzzy*, que es el que más interesa aquí, este es a menudo el punto más subjetivo del análisis, pues el investigador fija dónde están el 5%, el 50% y el 95% de la distribución de pertenencia (y, en ocasiones, puede que no exista un criterio claro y objetivo para fijar dichos límites). Con el calibrado, las características se convierten en variables; en cierto modo, podría decirse que lo cualitativo se hace cuantitativo, lo discreto se convierte en continuo... Pero debe recordarse que las variables en escala ordinal o de intervalo se convierten en porcentaje de pertenencia, luego las variables se convierten de alguna manera en algo categórico; es decir, que también lo cuantitativo se hace aquí cualitativo.

En el fondo, lo que se hace con la calibración es distinguir entre variación relevante y variación irrelevante (lo que, en opinión de los defensores de fsQCA, hace que el “punto subjetivo” tenga menos importancia que en las regresiones o en los indicadores). Esto enlaza con el comentario que se hacía antes sobre precisión y relevancia.

Conviene comentar también que en un grupo con varias características consideradas, la pertenencia de un individuo a dicho grupo coincide con el menor valor de los de cada una de las variables individuales (sin necesidad de minorarlo).

Sigamos con unos comentarios sobre la coherencia (o *consistency*). Responde hasta qué punto (o grado) es coherente la hipótesis o el enunciado. Dicho con otras palabras, explica hasta qué grado

los casos comparten características del grupo de salida; es decir, el grado en que la pertenencia en la solución es subconjunto de la salida. Se le puede encontrar cierto parecido con la correlación, pero solo en un sentido. Se suele exigir que sea mayor que 0,74 para extraer conclusiones válidas.

Finalmente, conviene explicar en qué consiste la cobertura (o *coverage*). Explica hasta qué punto cuenta el pertenecer a un grupo (*recipe*) de entrada para la variable dependiente (pertenecer a un grupo de salida). Tiene algo de similitud con el coeficiente de determinación R^2 , pero lo que muestra en realidad es cuántos casos sustentan el resultado (esto es, el porcentaje de casos que cubre la solución). Se suele exigir que sea mayor que 0,25 y menor que 0,65 (menos no sería suficientemente significativo y más recomendaría el uso de algún tipo de regresión).

Una vez aplicado el análisis fsQCA, se pueden obtener 3 tipos de soluciones. Las más sencillas, simples o simplificadas son las que se suelen denominar "*parsimonious*"; las segundas son las "*intermediate*"; y las últimas se llaman "*complex*". Las últimas son las que contienen más condiciones simples en una misma solución.

4. Resultados

El primer paso en el análisis de la información consiste en evaluar cuáles de las variables disponibles son apropiadas y relevantes. En esa etapa previa se descubre que la relación entre las variables es compleja, que muchas de ellas no son directamente cuantitativas y que no se puede suponer independencia entre las variables explicativas, lo que justifica la utilización del análisis cualitativo comparativo difuso. Tras ejecutar el programa fsQCA.exe¹ sobre los datos anteriormente presentados, se obtienen los siguientes resultados parciales y finales. Primero hay que recodificar las variables, obteniendo las definiciones de pertenencia difusa presentadas en el Cuadro 1.

Una vez hecha la calibración de las variables, se genera la *truth table*, eliminando los casos con frecuencia baja (en este caso, se eliminaron las frecuencias 0 y 1, por lo que `frequency cutoff` = 2.000000, quedando el 80% de los casos). Tras establecer el "umbral de consistencia" (en este caso, `consistency cutoff` = 0.901040, con lo que es superior a 0,9), se solicita el análisis estándar con todas las variables disponibles. De ahí se obtienen las siguientes dos soluciones (complejas, donde la conjunción lógica se denota por un asterisco y la tilde sirve para señalar la negación de una

¹El programa está disponible en www.compass.org y en www.fsqca.com.

Cuadro 1: Variables recodificadas para fsQCA

Variable	Definición	Sup.	Med.	Inf.
Sexo	mujer	1,95	1,5	1,05
km	lejos (en distancia)	0,25	0,03	0,01
sg	lejos (en tiempo)	0,3	0,1	0,01
Edad	mayor	30	19	16
Centro	privado	1,95	1,5	1,05
Bach	buen expediente	1	0,5	0,2
Selec_Gen	buen expediente	1	0,6	0,4
Selectiv	buen expediente	0,6	0,2	0
Nota_Acc	buen expediente	1	0,4	0
Poblac	gran municipio (pobl.)	1	0,05	0
Edad_P	municipio envejecido	0,9	0,8	0,65
Extranj	municipio internacional	1	0,05	0
Extens	municipio extenso	1	0,05	0
Dist_Cap	municipio alejado	1	0,08	0
Altitud	municipio elevado	1	0,3	0
Renta	municipio próspero	1	0,5	0,3
Catastral	municipio caro	0,25	0,05	0
Oficinas	municipio mercantil	1	0,08	0
Energ	municipio industrial	1	0,08	0
Output	alto rendimiento	1	0,5	0

propiedad). Aunque habría que analizarlas con más detalle, en cualquier caso, se puede afirmar que se obtienen combinaciones muy favorables para el rendimiento. La primera solución se escribiría:

```
~km*~sg*~edad*bach*selec_g*selectiv*nota_acc*poblac*extranj*~dist_cap*~altitud*  
renta*catastral*oficinas*energ
```

Esta solución viene refrendada por los siguientes parámetros:

1. Raw coverage = 0,321658
2. Unique Coverage = 0,033912
3. Consistency = 0,917068

Observando este resultado, se deduce que un estudiante que vive cerca de la UPO, tanto en distancia como en tiempo, con una edad joven, con buenas notas tanto en su expediente de Bachillerato como en las pruebas de selectividad (tanto en la parte genérica como en la específica, luego, en consecuencia, con buena nota de acceso a la Universidad) va a tener un buen rendimiento académico en la FCE de la UPO (si cumple otras condiciones adicionales). Realmente, hasta aquí no parece una información muy sorprendente, pero también llaman la atención las siguientes variables socioeconómicas detectadas como favorables para el rendimiento en esta solución: su municipio tiene una población numerosa y un alto número de extranjeros, pero está relativamente cercana a la Capital y tanto el valor catastral como el de la renta del municipio son elevados, presentando también un gasto elevado de energía y numerosas oficinas de índole económico. La técnica garantiza que los estudiantes con todas estas características obtendrán un rendimiento académico elevado.

A continuación se presenta la otra solución obtenida, que tal vez permita seguir entendiendo las condiciones favorables para el rendimiento académico:

```
~km*~sg*~edad*bach*selec_g*selectiv*~poblac*~extranj*~dist_cap*~altitud*renta*  
catastral*~oficinas*~energ
```

Esta solución viene caracterizada por los siguientes parámetros:

1. Raw coverage = 0,260870

2. Unique Coverage = 0,043938

3. Consistency = 0,909926

Según esta segunda solución, un estudiante con las siguientes características obtendrá también un buen rendimiento académico al finalizar sus estudios (al menos en lo concerniente a las asignaturas de índole cuantitativa): el domicilio del estudiante está cercano a la UPO tanto en tiempo como en distancia, el estudiante es joven y tiene un buen rendimiento en Bachillerato y en Selectividad (tanto en la parte general como en la específica). En cuanto a las características socioeconómicas encontradas como relevantes, este estudiante vive en un municipio con muy poca población (tanto española como extranjera), que es cercano a la Capital, con una altitud cercana al nivel del mar y con una renta y un valor catastral del municipio muy elevados. El municipio gasta poca energía y posee pocas oficinas de carácter económico.

Según se puede comprobar, hay muchos casos que quedan fuera de estas soluciones, pero en ninguno de los dos casos se contradice el resto de análisis realizados por otros autores y ambas hacen pensar que son muchas las variables que afectan al rendimiento académico y que pueden servir para determinar perfiles educativos que implican éxito. En el caso de los dos conjuntos de características (condiciones) obtenidas, se comprueba que el éxito académico es posible tanto en municipios grandes como en pequeños, pero ambas soluciones se refieren a estudiantes con buen rendimiento académico previo y, lo que destaca aquí, en municipios con alto nivel económico (al menos, según la renta per cápita y el valor catastral).

Hay otras soluciones que no cumplen los criterios exigidos por los investigadores, por lo que se podrían ignorar. No obstante, la siguiente solución más cercana a aparecer (que queda casi en el límite de las que se han eliminado por ser escasamente significativas) es la siguiente:

```
~sexo*~km*~sg*~edad*bach*selec_g*selectiv*nota_acc*poblac*extranj*~dist_cap*  
~altitud*renta*catastral*energ
```

Los parámetros asociados a esta solución son:

1. Raw coverage = 0,212633

2. Unique Coverage = 0,001411

3. Consistency = 0,904570

Como se puede comprobar, aquí también aparecen individuos con buen rendimiento previo y que habitan en municipios con alto poder adquisitivo (alta renta y alto valor catastral).

5. Conclusiones

Cada día surgen análisis más rigurosos del rendimiento académico de los universitarios. Algunos de ellos utilizan las técnicas más innovadoras. Así, en [7] se utilizan redes neuronales artificiales para predecir el rendimiento académico y, más recientemente, [15] trata de predecir el abandono de los estudios con una técnica también basada en la inteligencia artificial.

En cuanto a la aplicación presentada, proporciona pistas para entender el fenómeno que se propone analizar: la relación estrecha entre Economía y Educación. La primera conclusión que debe destacarse de los resultados es que el problema es muy complejo, sobre todo, por la inmensa variabilidad en las relaciones entre las variables implicadas. También es considerable el número de variables en sí mismo, la distinta naturaleza de las características que hay que tener en cuenta, la dificultad de encontrar un conjunto de datos adecuado y fiable, etc.

Las variables referentes a género, a estudios previos, a pruebas de acceso o al nivel socioeconómico de los estudiantes son algunas de las que han sido utilizadas para tratar de explicar el rendimiento académico y las relaciones entre las variables que lo favorecen. Se ha demostrado que dichas variables tienen parcial influencia en el rendimiento académico y que la relación entre ellas es consistente en algunos casos. Como es lógico, no todos los estudiantes responden con el mismo rendimiento académico a las mismas características personales. También se detecta una fuerte dependencia del tipo de asignatura; por ello, sería necesario estudiar las distintas habilidades y destrezas que se adquieren con cada asignatura de ámbito cuantitativo y compararlas con los resultados del análisis, para tratar de relacionar los resultados alcanzados según el nivel real de una característica en particular.

Mediante el uso de una técnica novedosa (fsQCA), se ha estimado un modelo que explica adecuadamente cómo algunas condiciones (o causas) afectan a la variabilidad de un indicador de ren-

dimiento académico previamente definido. Llevar esto a la práctica permitiría incluso realizar recomendaciones de índole académica a los estudiantes que comienzan, a partir de datos previos y características objetivas. Consideramos que herramientas de este tipo (con los matices necesarios en cada caso) serían muy interesantes para las universidades que deseen poder orientar a los estudiantes que ingresan por primera vez en la institución.

Como línea futura de investigación, se propone realizar nuevos análisis con un conjunto de datos que incorpore otras facultades y titulaciones, tratando de comparar si las soluciones (o combinaciones de factores relevantes) propuestas por la técnica son apropiadas en otros contextos académicos, para poder trasladar estos resultados a otros estudios.

Referencias

- [1] Aguilera, J.; Fedriani, E. M.; Delgado, B. (2014): “Institutional distance among country influences and environmental performance standardization in multinational enterprises”. *Journal of Business Research* 67(11), pp. 2385–2392.
- [2] Alba, R.; Segundo, S. M. (1995): “The return to education in Spain”. *Economics of Education* 14(2), pp. 155–166.
- [3] Barceinas, F.; Alonso, J. L.; Raymond, J. L.; Roig, J. L. (2000): “Los rendimientos de la educación en España”. *Papeles de Economía Española* 86, pp. 128–148.
- [4] Becker, W. E.; Walstad, W. B. (1987): *Econometric modelling in economic education research*. Boston: Kluwer Nijhoff Publishing.
- [5] De la Fuente, Á.; Jimeno, J. F. (2012): *La rentabilidad privada y fiscal de la educación en España*. Madrid: Observatorio sobre Capital Humano en España, BBVA Research.
- [6] Dolado, J. J.; Morales, E. (2007): “Which factors determine academic performance of undergraduate students in economics?”. *CEPR Discussion Papers* 6237, 22 pp.
- [7] Fedriani, E. M.; Hidalgo, M. A.; Romano, I. (2017): “The prediction of academic success of university students to optimize their performance”, por aparecer.
- [8] IECA (2013): *Sistema de Información Multiterritorial de Andalucía (SIMA)*. Sevilla: Instituto de Estadística y Cartografía de Andalucía.

- [9] INE (2009): *Anuario Estadístico de España 2009*. Madrid: Instituto Nacional de Estadística.
- [10] INE (2010): *Anuario Estadístico de España 2010*. Madrid: Instituto Nacional de Estadística.
- [11] INE (2011): *Anuario Estadístico de España 2011*. Madrid: Instituto Nacional de Estadística.
- [12] Navarro, M. L.; Marcenaro, O. D. (2003): “Condiciones de acceso y otras características del estudiante como determinantes del éxito en el primer curso universitario”. En San Segundo, M. J.; Zorrilla, R. (eds.): *Economía de la Educación: AEDE XII*. Madrid: Asociación de Economía de la Educación, pp. 42–61.
- [13] Ragin, C. (2008): *Redesigning social inquiry: Fuzzy sets and beyond*. Chicago: Chicago University Press.
- [14] Raymond, J. (2002): “Convergencia real de las regiones españolas y capital humano”. *Papeles de Economía Española* 93, pp. 109–121.
- [15] Rovira, S.; Puertas, E.; Igual, L. (2017): “Data-driven system to predict academic grades and dropout”. *PLoS ONE* 12(2), pp. 1–21.
- [16] Tejedor, F. J.; García, A. (2007): “Causas del bajo rendimiento del estudiante universitario: propuesta de mejora en el marco del EEES”. *Revista de Educación* 342, pp. 443–473.
- [17] Woodside, A. G. (2013): “Moving beyond multiple regression analysis to algorithms: Calling for adoption of a paradigm shift from symmetric to asymmetric thinking in data analysis and crafting theory”. *Journal of Business Research* 66(4), pp. 463–472.
- [18] Woodside, A. G.; Zhang, M. (2013): “Cultural diversity and marketing transactions: Are market integration, large community size, and world religions necessary for fairness in ephemeral exchanges?”. *Psychology and Marketing* 30(3), pp. 263–276.

Modelos basados en grafos: una aplicación al estudio del gasto de cruceristas en Uruguay

BRIDA, JUAN GABRIEL

Grupo de Investigación en Dinámica Económica, Facultad de Ciencias Económicas y de Administración

Universidad de la República (Uruguay)

Correo electrónico: gbrida@ccee.edu.uy

SANTIÑAQUE, FLORENCIA

Grupo de Investigación en Dinámica Económica, Facultad de Ciencias Económicas y de Administración

Universidad de la República (Uruguay)

Correo electrónico: fsantinaque@iesta.edu.uy

LANZILOTTA, BIBIANA

Grupo de Investigación en Dinámica Económica, Facultad de Ciencias Económicas y de Administración

Universidad de la República (Uruguay)

Correo electrónico: bibiana@iecon.ccee.edu.uy

RESUMEN

Este trabajo introduce el uso de grafos en el análisis de los determinantes del gasto de los turistas y lo aplica al estudio del comportamiento de los pasajeros de cruceros que desembarcan en Uruguay en los puertos de Montevideo y Punta del Este. Este enfoque ofrece un abordaje alternativo a los usualmente empleados para analizar los determinantes del gasto turístico al introducir una representación gráfica que permite sintetizar y visualizar las relaciones entre el conjunto de variables que caracterizan a los turistas o grupos de turistas y los determinantes de su nivel de gasto. En particular, la metodología permite representar las relaciones de dependencia entre variables (entre nodos adyacentes) e independencias condicionadas (entre nodos no adyacentes). Para su aplicación, se consideran datos individuales de las encuestas realizadas a cruceristas correspondientes a la temporada de cruceros comprendida entre noviembre de 2014 y abril de 2015, ambos incluidos, en Uruguay. Se estudia la existencia de dependencias de las variables relativas a registrar el gasto de los cruceristas con otras variables (sociodemográficas, de contexto, etc.). El estudio muestra que las variables que mejor explican el comportamiento de los visitantes son las vinculadas al puerto de desembarco y al gasto. Asimismo, los resultados muestran que las variables socioeconómicas no están vinculadas al gasto en forma directa.

Palabras claves: modelos de grafos; gasto de los turistas; cruceros; Uruguay.

Clasificación JEL: C19; C21; D12; L83.

MSC2010: 03H10; 62P20.

Artículo recibido el 31 de octubre de 2016 y aceptado el 7 de agosto de 2017.

Graph-Based Models: An Application to the Study of Cruise Passengers' Expenditure in Uruguay

ABSTRACT

This paper introduces the use of graphs in the analysis of the determinants of tourists' expenditure, providing an alternative approach to the methods usually employed. Graph-based analysis is applied to study the behavior of cruise passengers arriving at the ports of Montevideo and Punta del Este in Uruguay. The graphical representation allows to synthesize and visualize the relationships between the set of variables that characterize tourists or tourist groups and the determinants of their level of spending. The graph-based methodology is particularly suitable to represent the dependency relationships among variables (between adjacent nodes) and conditional independence (between non-adjacent nodes). For the empirical application, individual data from the surveys of cruise passengers corresponding to the cruise season between November 2014 and April 2015 in Uruguay are considered. The existence of dependencies between spending variables and other variables that may be of interest (sociodemographic, contextual, etc.) is studied. The exercise shows that the variables that better explain visitors' behavior are linked to the port of disembarkation and the expenditure. The results also show that socioeconomic variables are not directly linked to spending.

Keywords: graph-based models; tourists' expenditure; cruise; Uruguay.

JEL classification: C19; C21; D12; L83.

MSC2010: 03H10; 62P20.



1. Introducción

El impacto económico de los flujos turísticos en la economía es a menudo significativo y actúa como motor de crecimiento económico. Con el fin de mejorar los efectos e impactos económicos de la visita de turistas a un destino, se necesitan datos y herramientas apropiadas para analizar los mercados y así dirigir la oferta del sector privado y planificar las acciones de los formuladores de políticas. En consecuencia, el tener buenos modelos analíticos para entender el comportamiento de los turistas es crucial para entender los determinantes del gasto para el consumidor-turista. En este contexto, la estadística y la econometría ofrecen herramientas valiosas para el estudio de las relaciones entre el gasto turístico y las características de los consumidores.

El análisis y la interpretación de elementos tales como la elasticidad de la demanda o el gasto medio de los turistas asociado con características específicas, pueden proporcionar información valiosa para el desarrollo de la economía del turismo. Sin embargo, los trabajos académicos que analizan los determinantes del gasto turístico a nivel individual (microeconómicos) han sido relativamente menos que los que estudian la demanda agregada (macroeconómicos), considerando tanto el número de contribuciones y la heterogeneidad de los métodos estadísticos y modelos econométricos que se aplican (Brida & Scuderi, 2013; Wang & Davidson, 2010). Usualmente estos trabajos han utilizado regresiones a los efectos de cuantificar la significatividad e impacto de cada regresor en la variable de respuesta. Este trabajo contribuye a la rama de la literatura acerca de los determinantes del gasto turístico, introduciendo una manera diferente y un enfoque complementario a las regresiones clásicas, mediante la aplicación de teoría de grafos, para estudiar el gasto de los pasajeros de cruceros que desembarcan en Uruguay en los puertos de Montevideo y Punta del Este.

La literatura en economía del turismo ha puesto creciente interés en el análisis del turismo de cruceros. Ello responde en buena medida a la acelerada expansión de este tipo de turismo a nivel mundial en los últimos 15 años, crecimiento que ha conducido a que se constituyera en uno de los más dinámicos dentro del sector turístico. Para 2015, de acuerdo a la información de la *Florida-Caribbean Cruise Association* (FCCA, 2016), el número de cruceristas habría alcanzado los 23 millones. Uruguay no ha sido ajeno a esta dinámica. Aun cuando el turismo de cruceros representa una proporción reducida del turismo receptivo total –12% en 2014, según Ministerio de Turismo (MINTUR, 2015)–, la cantidad de personas arribadas ha aumentado significativamente en la última década.¹ Estas han pasado de algo más

¹ En rigor, dicho aumento no ha sido sostenido. En las últimas dos temporadas de cruceros se ha notado un descenso en la cantidad de buques arribados al puerto de Punta del Este, lo que ha ocasionado una cierta retracción en el gasto y los turistas desde el máximo experimentado en la temporada 2012-2013.

de 56 mil visitantes (en la temporada 2004-2005) a más de 400 mil en las temporadas 2011-2012 y 2012-2013. Y si bien en las últimas temporadas los visitantes se redujeron, continuaron superando holgadamente los 300 mil.

La industria de cruceros posee efectos de distinto signo sobre los países y economías de destino (Brida *et al.*, 2010). Los beneficios se vinculan principalmente al gasto que realizan los pasajeros y tripulantes en el destino de desembarco, así como a la demanda de servicios de navegación y portuarios, todo lo cual dinamiza el empleo local, incentiva inversiones asociadas a los servicios portuarios y turísticos y genera aumento de recaudación. Como sector transable e internacionalmente competitivo, potencialmente puede generar externalidades positivas. Entre otras que mencionan Dwyer & Forsyth, (1998), se encuentran mejoras en los estándares ambientales, seguridad, amenidades turísticas, transporte, así como la posibilidad de mejoras en términos de intercambio, aprovechamiento de economías de escala, etc.

El puerto de desembarco incide en el impacto económico que el crucero tenga sobre la región. En un puerto de escala (aquel donde los pasajeros desembarcan temporalmente), el gasto de los turistas se circunscribe a transporte, *tours*, compras, alimentación y otros gastos. En el caso de los puertos de embarque el impacto del crucerismo puede ser mayor ya que, por ejemplo, incluye gastos de alojamiento lo cual es, en general, uno de los epígrafes de gasto turístico más importante (Brida *et al.*, 2014a; 2014b). En Uruguay, los puertos que reciben cruceros son el puerto de Montevideo y el de Punta del Este. El puerto de Montevideo es principalmente de escala², mientras que el de Punta del Este es únicamente puerto de escala de cruceros. En su gran mayoría, los visitantes cruceristas son de nacionalidad brasileña, siguiéndoles los argentinos en importancia. También tienen una participación significativa aquellos de nacionalidad europea y norteamericana. El gasto de los cruceristas que descienden del buque se dirige principalmente a compras y servicios gastronómicos –44% y 33%, según el Anuario Estadístico de Turismo 2015, (MINTUR, 2016) –, no incluyendo en ningún caso el epígrafe “alojamiento”, dada la condición de puertos de escala tanto para Montevideo como para Punta del Este.

La dinámica del gasto turístico general y de cruceros en particular, así como de sus determinantes, ha sido analizada desde diversos puntos de vista y enfoques estadísticos y econométricos. Desde un punto de vista macroeconómico, se ha analizado principalmente asociándolo al impacto que esta actividad tiene sobre el país de destino (Dwyer & Forsyth, 1998; Seidl *et al.*, 2006; Brida & Zapata-Aguirre, 2010). Desde un punto de vista microeconómico, se ha indagado en los determinantes del gasto turístico y específicamente de

² Desde 2011, el Puerto de Montevideo es considerado puerto de embarque solo para el grupo de cruceros Costa. (MINTUR, 2015).

cruceros desde esquemas empíricos y econométricos diversos (Henthorne, 2000; Morrison *et al.*, 1996; Seidl *et al.*, 2007; Brida *et al.*, 2010; Brida *et al.*, 2012a, 2012b; Brida *et al.*, 2014a, 2014b; Brida & Scuderi, 2013, entre otros). Específicamente para Uruguay, Risso (2012) y Brida *et al.* (2010) analizaron el gasto de los cruceristas desde un punto de vista microeconómico mediante un modelo Heckit. Risso (2012) se centró en el estudio de las temporadas 2008 a 2010, aplicando un modelo de selección de Heckman (véase Cameron & Trivedi, 2005) con el objetivo de determinar las variables que explican los diferentes tipos de gastos e identificar los factores que inciden favorablemente (o desfavorablemente) en el gasto. En particular, este trabajo encuentra que el turista argentino reduce la probabilidad del gasto por persona mientras que el brasileño la aumenta. La probabilidad de gasto es alta (más de 80%) y el desagrado por los precios reduce esta probabilidad. Brida *et al.* (2010) aplicaron los modelos *tobit* y *probit* para estimar el efecto de distintas variables en el monto y la probabilidad de gasto en varias categorías (o rubros). De hecho, mostraron que el tamaño del grupo con el que viajan los cruceristas, así como la movilidad que estos tienen dentro del país, son variables importantes para explicar su patrón de gasto. Se desprende de la revisión de la literatura que el estudio sobre las diferentes metodologías utilizadas en la medición del gasto de cruceristas es relevante y de reciente desarrollo y que cada vez gana más interés en el plano académico, pero que aún el número de casos de estudio y de metodologías utilizadas es poco numeroso.

El presente trabajo se basa en la metodología propuesta en Abbruzzo *et al.* (2014) para el análisis del gasto de los turistas internacionales en Uruguay y tiene como objetivo estudiar el comportamiento de consumo de los cruceristas a partir de un enfoque metodológico alternativo al de sus antecedentes locales. Es de señalar que, de la revisión bibliográfica realizada, se desprende que el trabajo de Abbruzzo es el primero donde aparece un enfoque metodológico que está basado en la teoría de grafos. Mediante esta metodología se identifican y analizan las variables que inciden en el gasto de los cruceristas, visualizando las mismas desde una perspectiva de red (Edwards, 2000; Jackson, 2008; Lauritzen, 1996; Whittaker, 1990). En el presente estudio se amplía y detalla la metodología utilizada y, para su aplicación, se consideran datos individuales de la encuesta realizada a cruceristas por parte del Ministerio de Turismo correspondiente a la temporada de cruceros que se extiende entre noviembre 2014 y abril 2015. (MINTUR, 2015).

En las secciones segunda y tercera, se explica con mayor profundidad esta metodología y se describen los datos respectivamente. A continuación, se presenta una cuarta sección con los resultados de la investigación y, por último, se comentan las principales conclusiones.

2. Estrategia empírica: metodología

La metodología empírica empleada en este trabajo se basa en la teoría de grafos. Los modelos basados en grafos permiten identificar relaciones entre el conjunto de variables que caracterizan a los turistas o grupos de turistas y los determinantes de su nivel de gasto. Cada una de las variables aleatorias involucradas en el modelo se representa por un nodo en el grafo G ; mientras que cada arista representa la interacción entre las variables del modelo que están asociadas a sus nodos. En este sentido, es posible obtener una simplificación gráfica tanto de las relaciones de dependencia entre variables, así como también de las independencias condicionadas entre nodos que tiene algún tipo de conexión no directa. Es así que los modelos basados en grafos tienen la ventaja de sintetizar y detectar visualmente las relaciones que se producen dentro de grandes conjuntos de variables aleatorias, a través de una salida fácil de interpretar, dada por la representación gráfica del grafo. (Abbruzzo *et al.*, 2014).

Generalmente, para estudiar asociaciones o interacciones entre dos o más variables categóricas representadas mediante tablas de contingencia, suelen aplicarse modelos log-lineales. Los modelos log-lineales se usan para analizar la relación entre dos o más variables categóricas, sin realizar distinción de variables independientes y dependientes (todas las variables se consideran variables respuesta). La estrategia básica en el modelado consiste en ajustar un modelo a las frecuencias observadas en la tabla de contingencia. Los modelos permiten representar las probabilidades conjuntas mediante frecuencias esperadas.

Sean tres variables aleatorias categóricas (X,Y,Z) , cuyo número de dimensiones posibles de respuesta son $\{i = 1, \dots, I\}$, $\{j = 1, \dots, J\}$ y $\{k = 1, \dots, K\}$ respectivamente y cuyas frecuencias observadas se pueden representar en una tabla de contingencia tridimensionales de orden $I \times J \times K$, en la que se estudian n individuos. Entonces el modelo saturado generalizado (que correspondería al ajuste perfecto) puede representarse como:

$$\log(\mu_{ijk}) = \theta + \theta_i^X + \theta_j^Y + \theta_k^Z + \theta_{ij}^{XY} + \theta_{ik}^{XZ} + \theta_{jk}^{YZ} + \theta_{ijk}^{XYZ}$$

siendo μ_{ijk} la frecuencia esperada de la casilla ijk , que se modela como la suma: del logaritmo del número de unidades experimentales n (representado por el parámetro θ); los siguientes tres términos representan el logaritmo de las probabilidades marginales de cada variable, respectivamente; los siguientes tres términos representan el logaritmo de las probabilidades conjuntas bivariadas (representa el nivel de interacción entre variables dos a dos); y el último término representa el logaritmo de la probabilidad conjunta de las tres variables en cuestión. Adicionalmente, se realiza una prueba de hipótesis estadística para testear si cada término de interacción entre variables es significativamente no negativo. Se testea si hay evidencia estadística que indique que dicho término es no nulo; en ese caso, conlleva a la aparición de una arista en el grafo para el par de nodos asociados a las variables en cuestión.

En este modelo todas las variables son condicionalmente dependientes.

Este tipo de modelos admite una representación mediante grafos. Dicho de otra forma, un grafo representa gráficamente la interacción entre un conjunto de variables, mostrando como ciertos modelos probabilísticos pueden factorizarse en distribuciones probabilísticas marginales más simples. Los modelos probabilísticos que admiten una factorización completa se denominan modelos descomponibles. Un modelo de probabilidad será descomponible cuando pueda expresarse como el producto de varios factores (modelos probabilísticos condicionados sobre la distribución conjunta). En estos casos, la estimación de parámetros se simplifica significativamente.

En el grafo G que modela las variables categóricas y la relación entre éstas, el término de interacción $\theta_{ij}^{XY} \neq 0$ representaría la existencia de una arista entre el par de nodos asociados a las variables X e Y (y además, se dirá que dichos nodos son adyacentes). Por tanto, la presencia de conexiones entre pares de nodos en el grafo indica una dependencia entre las variables asociadas a dichos nodos, condicionada al resto. En cambio, un par de nodos no adyacentes en el grafo reflejan una relación de independencia condicional de las dos variables analizadas al resto de las variables. Esta propiedad se conoce como propiedad de Markov para pares de variables. Además, condicionado solo a los nodos adyacentes, cualquier variable asociada a dichos nodos es independiente de todas las restantes; propiedad que se conoce como la propiedad local de Markov (Hojsgaard *et al.* 2012, Cap. 1). Si un subconjunto de variables cualesquiera se ve separada por una tercera variable, entonces se dice que presentan una relación de independencia condicional sobre esta tercera variable. En resumen, los modelos basados en grafos resultan útiles a la hora de encontrar tanto dependencias condicionales entre variables, reflejadas por la presencia de nodos adyacentes, como independencias condicionales entre las mismas, representado por nodos no adyacentes.

Una de las principales dificultades frente al estudio de tablas de contingencia múltiples es encontrar el mejor modelo que ajuste a los datos. En este sentido, los grafos proporcionan una ventaja por su representación e interpretación gráfica.

Los tipos de grafos que representan las interacciones entre variables mencionadas anteriormente se denominan grafos de “independencia condicional”. En particular, se estudiará la formación de bosques y árboles. Los árboles son grafos no dirigidos, conexos y acíclicos³. La unión disjunta de árboles se denomina bosque. En particular, la ausencia de dirección en las aristas indica que no se podrá establecer relaciones de causalidad entre variables y solo se podrá

³ Es decir, siempre existe un camino (sucesión de aristas) que permite alcanzar un nodo desde cualquier otro y no es posible hallar tal sucesión de aristas de modo que el nodo de comienzo y de fin sea el mismo.

visualizar si dos variables poseen algún tipo de relación de dependencia condicional al resto de las variables del grafo.

En general, si $P_{X_1, X_2, \dots, X_n}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$ es la distribución conjunta de n variables aleatorias discretas $\{X_i\}_{i=1}^n$ tomando respectivos valores $\{x_i\}_{i=1}^n$, entonces encontrar el árbol óptimo de independencia condicional consiste en aplicar un algoritmo de búsqueda “voraz” entre los n^{n-2} árboles que existen en un grafo con n nodos etiquetados (fórmula de Cayley). Para obtener de forma eficiente dicho árbol óptimo, Chow & Liu (1968) describieron un algoritmo de búsqueda de un árbol de expansión mínima basándose esencialmente en el algoritmo de Kruskal (1956). Dicho algoritmo consiste en un método iterativo por el que se va agregando una arista y un nodo adicional del grafo al árbol que se ha obtenido en la iteración previa conectando dicho nodo al árbol ya existente, optimizando algún tipo de ponderador (esencialmente el peso acumulado al sumar los pesos de todas las aristas en el árbol resultante) y asegurando que la inclusión de esa arista no supone la aparición de ciclos en el árbol resultante. Edwards *et al.*, (2010) describieron un algoritmo para la obtención de un árbol de expansión mínima a partir de considerar el “criterio de información bayesiano” (BIC) como los pesos/ponderadores de cada arista del grafo. Bajo dicho criterio, el algoritmo devuelve un bosque de expansión mínima (tal y como ocurre al considerar el algoritmo generalizado de Kruskal suponiendo pesos positivos). El ponderador BIC puede escribirse como sigue:

$$BIC(E) = -2.Ln(\hat{L}) + k.Ln(n)$$

siendo E la arista a seleccionar, \hat{L} el máximo de la función de verosimilitud del modelo agregando la arista correspondiente, k la cantidad de parámetros libres a estimar y n representando el tamaño de muestra. Dicho ponderador, por un lado, busca maximizar la función verosimilitud del modelo; pero, por otro lado, penaliza la inclusión de un mayor número de parámetros a estimar. Foygel & Drton (2010) demostraron que minimizar el BIC equivale a encontrar un árbol de expansión mínima.

A continuación, se desarrolla el algoritmo de búsqueda de un bosque óptimo basado en el algoritmo de Chow-Liu condicional (Kang *et al.*, 1997): se ordena de forma decreciente las aristas según los ponderadores mencionados anteriormente y se comienza a construir el árbol graficando los dos nodos adyacentes con el valor óptimo del ponderador seleccionado (i.e. mayor dependencia condicional). En cada paso se agregará aquella arista que produzca un mayor decremento de la función BIC y que no forme ciclo con las aristas previamente seleccionadas por el algoritmo.

- 1) Calcular el BIC para todas las aristas posibles (i.e. para las $n(n-1)/2$ aristas).

- 2) Seleccionar arista que optimice el valor BIC del modelo, suprimiéndola de la lista de posibles aristas a seleccionar en posteriores etapas.
- 3) Comprobar si la arista seleccionada en el Paso 2 no forma ciclo con las aristas incluidas en el bosque construido hasta esta etapa; en tal caso, añadir la nueva arista (y nodo) al bosque.
- 4) Si no existen más aristas para seleccionar, parar; en otro caso volver al Paso 2.

En una segunda etapa, se procede a implementar un método de selección del modelo hacia adelante (*forward selection*); partiendo del árbol de expansión mínima, en cada etapa se adicionará la arista que provoque la mayor reducción del BIC (si hubiera). En este caso, se está siendo menos restrictivo a la hora de agregar aristas, expandiendo la búsqueda al espacio del modelo descomponible. Estos modelos son los que se pueden descomponer sucesivamente en una secuencia de modelos más pequeños, donde cada uno de estos corresponde a un modelo marginal sin restricciones (véase Frydenberg & Steffen, 1989; Lauritzen, 1992). La mayor utilidad de este paso consiste en verificar si existen interacciones entre variables que resulten significativas y que dada la restricción respecto de la no formación de ciclos en el grafo del algoritmo anterior, no han sido consideradas en el bosque de expansión mínima. Si bien se consigue un grafo menos disperso, podría obtenerse interacciones entre variables que resulten de interés e incluso mejorar la posible interpretación del grafo generado.

Otra ventaja que aportan los modelos de grafos es la siguiente: si un bosque tiene n vértices y k aristas, entonces el bosque consiste en la unión disjunta de $n - k$ árboles (Chow & Liu, 1968). Por tanto, un grafo que cuente con estas características puede dar la pauta de la existencia de grupos o clústeres. Dicha información puede ser utilizada como insumo para determinar la cantidad de grupos *a priori* que requieren determinadas metodologías multivariadas (como pueden ser análisis de clústeres k -medias o PAM, entre otros).

Para la implementación de las funciones mencionadas anteriormente, se utilizaron la función *minForest* y *stepw* del paquete *gRapHD* del programa *R*.

3. Datos

Los datos sobre los cuales se aplica el método anteriormente descrito corresponden a la encuesta de cruceros correspondiente a la temporada 2014-2015 (MINTUR, 2015). El diseño de la muestra utilizada en el estudio fue realizado en base a dos muestras independientes, una para Montevideo y otra para Punta del Este (MINTUR, 2015), y comprende un total de 3275 encuestas. En Montevideo se realizaron 1927 entrevistas en 51 buques (de los 108 que arribaron en total), mientras que en Punta del Este se realizaron 1348 entrevistas en 35 buques (de un total de 64 que arribaron).

Tabla 1. Variables empleadas para la construcción de los grafos

Denominación	Descripción	Tipo	Valores
<i>Variables de gasto</i>			
TourEx	Gasto en <i>tours</i>	Cualitativa	Cero gasto, Bajo gasto, Medio gasto, Alto gasto
AlimEx	Gasto en alimentación	Cualitativa	Cero gasto, Bajo gasto, Medio gasto, Alto gasto
ShoppEx	Gasto en compras	Cualitativa	Cero gasto, Bajo gasto, Medio gasto, Alto gasto
TranEx	Gasto en transporte	Cualitativa	Cero gasto, Bajo gasto, Medio gasto, Alto gasto
RestoEx	Otros gastos	Cualitativa	Cero gasto, Bajo gasto, Medio gasto, Alto gasto
TotEx	Gasto total	Cualitativa	Cero gasto, Bajo gasto, Medio gasto, Alto gasto
<i>Variables socio-económicas</i>			
Res	Residencia	Cualitativa	Argentina, Brasil, USA y Canadá, Europa y otros, Resto América Latina
Occ	Ocupación	Cualitativa	Crucelistas, Tripulantes
<i>Variables de viaje</i>			
Nvis	Asiduidad del viaje	Cualitativa	"Primera vez" ; "Poco Leal" ; "Leal" ; "Muy Leal"
Puerto	Puerto	Cualitativa	Montevideo; Punta del Este
VisitMtdo	Visitó Montevideo	Dicotómica	Sí/No
Visitpta	Visitó Punta del Este	Dicotómica	Sí/No
VisitCol	Visitó Colonia	Dicotómica	Sí/No
VisitOtros	Visitó Otros	Dicotómica	Sí/No
<i>Tipología de grupo</i>			
Totpersonas	Total personas grupo	Cualitativa	Solo, En pareja, Más de 2 personas en el grupo
TipoGrupo ^a	Tipo de grupo	Cualitativa	Mixto, solo Mujeres, solo Hombres
<i>Variables de gusto y desagrado</i>			
GustaTodo /GustaCueros/GustaEdif/ GustaPaisaje/GustaHigiene/GustaPrecios GustaMtdo/GustaMercPuerto/GustaVinos GustaTiendas/GustaGente/GustaCasapueblo GustaCiudadVieja/GustaOrganizacion/GustaDedos GustaTranq/GustaPlaya/GustaComida GustaCasino/GustaPunta/GustaNada/GustaOtros DesagradSD/DesagradPrecios/DesagradNoTarjeta DesagradInseg/DesagradTaxis/DesagradTransito DesagradAtencion/DesagradPobreza DesagradNoTiendas/DesagradDeterioro DesagradNoBanios/DesagradGrafitti DesagradNoTaxis/DesagradPlaySuc/DesagradHigiene DesagradfaltaServPlaya/DesagradSenias DesagradTipoCambio/DesagradNada DesagradInfraest /DesagradFaltaEspect		Dicotómicas	Sí/No

a) Composición por sexo del grupo.

La encuesta de cruceristas revela una serie de características para cada uno de los turistas que desciende del crucero, así como para su grupo de pertenencia. También revela un conjunto de variables vinculadas a las actividades que los cruceristas desarrollan en su desembarco, a variables de gusto asociados a la experiencia turística, gastronómica, de compras y naturalmente acerca del gasto efectuado. En la Tabla 1 se presentan las variables empleadas en

la aplicación empírica, su denominación, descripción y valores. Nótese que las variables de gusto y desagrado son dicotómicas y solo admiten como respuesta “Sí” o “No”. A los encuestados les consultan sobre gustos y disgustos de las actividades realizadas o sitios visitados.

4. Resultados empíricos

Como marco introductorio e interpretativo de los resultados, previamente se presenta una breve descriptiva de las principales características socio-demográficas y de comportamiento de los cruceristas arribados durante la temporada 2014-2015.

Como se indicó anteriormente, más de 330 mil personas desembarcaron de los 172 buques que arribaron a Uruguay en la temporada que se estudia. De ellas, más de 200 mil lo hicieron en el puerto de Montevideo. En ambos puertos, aproximadamente el 70% de las personas embarcadas descendieron, de las cuales el 35% aproximadamente eran brasileñas. Las nacionalidades argentinas, europeas y norteamericanas le siguieron en importancia. La Tabla 2 resume algunas de estas estadísticas.

Tabla 2. Indicadores de gasto, socio-demográficos y de gusto de cruceristas

Temporada de cruceros 2014-2015				
	Buques	Personas desemb.	Gasto (USD¹)	Gasto per cápita (USD¹)
Montevideo	108	201085	7222690	35,9
Punta del Este	64	131033	3720780	28,4
Total	172	332118	10943470	33,0
Puerto de desembarco				
Nacionalidades	Montevideo		Punta del Este	
	Personas	Gasto medio (USD¹)	Personas	Gasto medio (USD¹)
Norteamericanos	17638	37,1	12729	45,3
Otros América	2901	49,7	2740	34,8
Chilenos	1849	201,3	1921	27,6
Europeos	20683	34	6397	37,2
Otros	3188	28,8	1813	42,5
Brasileños	117610	39,3	70014	28,2
Argentinos	37216	18,3	35419	18,8
Agrado/desagrado	Montevideo		Punta del Este	
	Agrado	Desagrado	Agrado	Desagrado
Todo	23,0%		25,0%	
Nada		63,4%		75,1%
Tranquilidad, segur.	9,4%	1,5%	7,0%	
Higiene		1,7%	10,0%	
Gente, cord., atención	25,1%		13,0%	1,0%
Playa, rambla, costa	14,4%		19,0%	
Otros	28,4%		26,0%	6,3%
Precios/Tipo de Cambio		12,6%		16,7%
Señalización tránsito				0,9%

¹ USD refiere a dólares corrientes.

Fuente: Anuario Turístico (MINTUR, 2015)

Un elemento que caracterizó a esta temporada es que el gasto descendió significativamente respecto de las temporadas previas (medido en dólares corrientes, cayó aproximadamente el 40% y, en moneda nacional a precios constantes, el 39%). Probablemente el deterioro de la situación macroeconómica regional y, en particular, de Brasil, haya sido determinante en la explicación de esa caída. En ese contexto, en términos de gasto per cápita, las nacionalidades del resto de América del Sur mostraron un nivel gasto muy por encima del promedio, destacándose especialmente, la de los chilenos. Como sucedió en otras temporadas, el principal rubro de gasto fue Compras y en segundo lugar Alimentación.

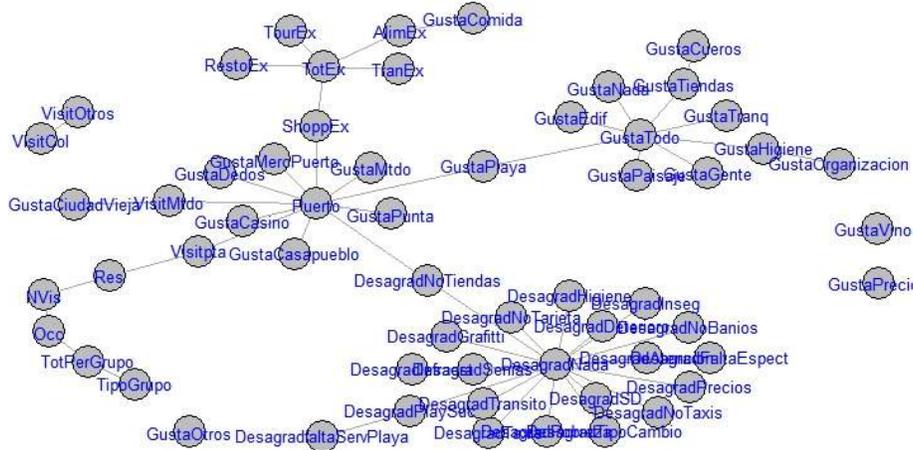
Las variables que recogen la percepción de los visitantes, las variables de gusto y disgusto, presentan algunas tendencias comunes y otras disímiles en función del lugar de desembarco. Si bien hay pequeñas diferencias en los porcentajes, es común el agrado total o el nulo desagrado, así como el agrado por playas, rambla o costa y el desagrado por precios o tipo de cambio. En las variables de gusto por la atención, la gente o cordialidad, las diferencias a favor de Montevideo son notorias. Lo contrario sucede con higiene, en donde el agrado es nulo en Montevideo y positivo en Punta del Este.

La elaboración de los grafos utilizados en este estudio se efectuó, en una primera instancia, sin restricción respecto de una distancia entre nodos respecto de las variables de interés⁴. Como resultado se obtuvo el bosque que se presenta en la Figura 1. Como puede apreciarse, este bosque posee tantos nodos como variables se están analizando y no todas se conectan directamente entre sí. Es el caso de las variables Gusta Precios, Visitó Colonia u Otros, Gusta Vino y Gusta Otros. De acuerdo con estos resultados, las variables centrales (i.e. esos nodos que concentran mayor cantidad de nodos adyacentes a su alrededor) son Gasto total (TotEx), Puerto, la variable de agrado total (Gusta Todo) y la de desagrado nulo (DesagradNada), siendo esta última la que mayor concentración presenta en relación a las otras dos variables y observando que no hay relación directa entre dichas tres variables centrales. Esta centralidad muestra dos puntos importantes: por un lado, la importancia de estas variables por su conexión con las demás y, por otro lado, indican las relaciones más fuertes de dependencias condicionadas con otras variables (nodos adyacentes).

En la Tabla 3, se presentan las primeras cinco aristas que se graficaron según el algoritmo de búsqueda de bosque de expansión mínima detallado anteriormente.

⁴ Se define la distancia entre dos nodos como el número de aristas existentes entre dichos dos nodos (téngase en cuenta que solo existe una forma dentro de un árbol de alcanzar un nodo desde otro). La bola de centro el nodo v y de radio $r > 0$ es el conjunto de nodos que están a distancia menor o igual que r .

Figura 1. Bosque de expansión mínima



Fuente: elaboración propia

Tabla 3. Primeros cinco pasos del algoritmo de búsqueda de bosque de expansión mínima

	Variable 1	Variable 2	BIC
Paso 1	ShoppEx	TotEx	3.410,39
Paso 2	Puerto	VisitMdeo	3.277,25
Paso 3	Puerto	VisitPta	2.858,45
Paso 4	AlimEx	TotEx	1.280,04
Paso 5	TotPerGrupo	TipoGrupo	1.234,22

Fuente: elaboración propia.

Según la Tabla 3, puede apreciarse que las dependencias condicionales más fuertes encontradas fueron entre las variables de gasto (Gasto en compras y Gasto total) con un peso igual a 3.410,39. El algoritmo comenzó graficando dicha arista que conecta ambos nodos. Seguidamente se graficaron las aristas que conecta la variable Puerto con la variable relacionada con la visita por la ciudad de Montevideo y la visita por Punta del Este, respectivamente. En el quinto paso del algoritmo, se unieron las variables de gasto (Gasto en alimentación y Gasto total).

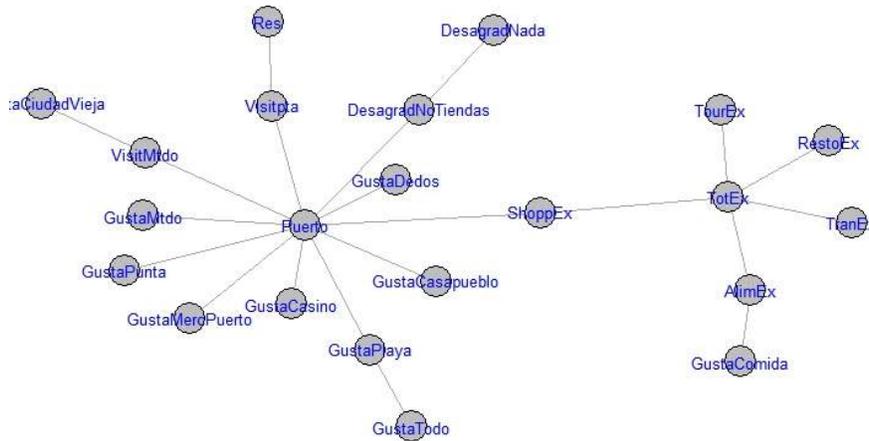
También debe destacarse que la ausencia de conexiones entre pares de nodos en el gráfico estaría indicando una relación de independencia condicional entre las variables asociadas a dichos nodos. Por ejemplo, esto es lo que ocurre entre la variable gasto en compras (ShoppEx) y la variable gusto por Punta del Este (Gusta Punta). Dichas variables se encuentran unidas por la variable Puerto indicando en este caso la existencia de una relación de independencia entre ambas, condicionada al Puerto.

Otra ventaja del uso de grafos para representar los resultados, es la posibilidad de visualizar la posible existencia de clústeres asociados a determinadas variables, como se ve reflejado en el vecindario de los nodos asociados a las variables Puerto, Gusta Todo y

Desagrada Nada, que, como ya se mencionó, son algunos de los nodos que toman importancia dado su conexión con los demás.

Asimismo, se generó un subgrafo a partir del primero, extrayendo los nodos cuya distancia respecto de Gasto Total (TotEx) no superase las 4 aristas (bola de centro Gasto total y radio 4). Dicha bola se delimita según aquellos nodos que se encuentran condicionalmente asociados en no más de 4 aristas, lográndose una representación más parsimoniosa respecto de las variables de interés (véase Figura 2).

Figura 2. Árbol de expansión mínima según bola de centro Gasto total y radio 4 aristas



Fuente: elaboración propia

En la Tabla 4 se presentan cinco medidas alternativas de centralidad o cercanía para caracterizar el grafo de la Figura 2. Estas medidas, que surgen de la vertiente teórica de redes sociales y económicas, permiten determinar la ubicación o posición de los nodos en las redes (indicador de grado de centralidad) y la cercanía considerada a través de 4 indicadores (Jackson, 2008). El grado de centralidad indica la cantidad de conexiones de cada uno de los nodos. En la Tabla 4 se presentan los nodos que presentan mayor número de conexiones, es decir: Gasto total, Puerto y Gasto en compras. Por su parte, el grado de centralidad es un indicador de cuán fácilmente un nodo puede alcanzar a otro. Los 4 indicadores empleados para representar el grado de cercanía son: Cercanía ($C(g)$) y Cercanía con factor descendente ($C_i^d(g)$), con tres variantes de este factor. El primero se define como:

$$C(g) = \frac{(n - 1)}{\sum_{j \neq i} l(i, j)}$$

donde n representa el número de nodos y $l(i, j)$ representa el número de aristas correspondiente al camino más corto entre el nodo i y el nodo j .

La cercanía con factor descendente es una forma más rica de medir la cercanía ya que dicho factor opera como ponderador (inverso) de la distancia entre los nodos. Es decir, los nodos más distantes ponderan menos que los más cercanos. Este indicador se define como:

$$C_i^d(g) = \frac{\sum_{j \neq i} \delta^{l(i,j)}}{[(n-1)\delta]}$$

donde n representa el número de nodos, $l(i,j)$ representa el número de aristas correspondiente al camino más corto entre el nodo i y el nodo j y δ representa el factor descendente o declinante y varía entre $1 > \delta > 0$. Es posible notar que cuando este factor se acerca a 0, esta medida de centralidad otorga infinitamente mayor peso a los nodos más cercanos.

Tabla 4. Medidas de centralidad y cercanía (bola de centro Gasto total)

Variables centrales	Grado de centralidad	Cercanía	Cercanía con factor descendente		
			$\delta=0,5$	$\delta=0,75$	$\delta=0,25$
Gasto total	5	0,382	0,488	0,751	0,326
Puerto	11	0,568	0,771	0,996	0,623
Gasto en compras	2	0,467	0,482	0,776	0,257

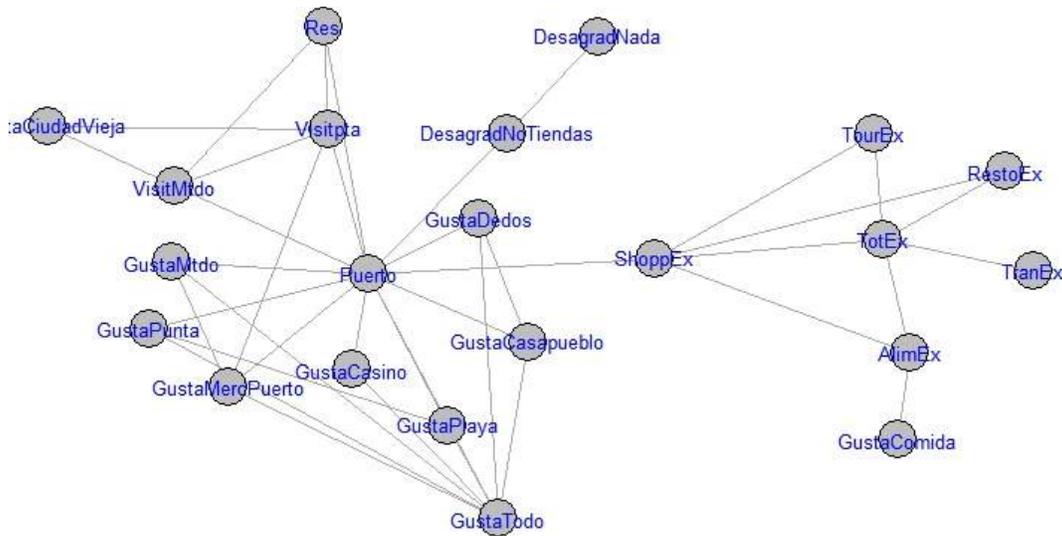
Fuente: elaboración propia

Nota: Calculado sobre la base de árbol de expansión mínima según bola de centro Gasto total (Figura 2); δ : factor descendente según lejanía ($l(i,j)$) de los nodos

Acorde a este análisis, la variable Puerto de desembarco es, bajo todos los indicadores, la de mayor centralidad y cercanía, por lo que su importancia sería significativa en el análisis del gasto. De hecho, como se visualiza en las Figuras 1 y 2, las variables de gasto se vinculan a las variables de percepción, comportamiento y características del grupo a través de la variable Puerto, a la que se unen mediante el gasto en compras.

A partir de árbol de expansión mínima generado anteriormente, se realizó *forward selection*. En la Figura 3, se destaca que la mayor cantidad de conexiones que resultaron significativas (lograron una disminución del BIC total del árbol) se encuentran en los vecindarios de los nodos asociados a las variable de Puerto y Gasto total. Específicamente se puede observar que la incorporación de conexiones entre el nodo asociado a la variable Gasto en compras y los nodos asociadas a las variables Gasto en *tour*, Gasto en alimentación y Otros gastos (*RestoEx*) provocó una disminución del BIC de dicho árbol. Sin embargo, desde el nodo asociado a la variable Puerto, solo se agregó una arista que lo conecta con el nodo asociado a Residencia. Demás interacciones que resultaron significativas se han dado entre las variables de visitas y gustos entre las que se destacan: Visita Montevideo y visita Punta del Este, Gusta Montevideo y Gusta Mercado del Puerto, Gusta Punta del Este y Gusta Playas, Gusta Ciudad Vieja y Visita Punta del Este.

Figura 3. Grafo generado mediante *forward selection*



Fuente: elaboración propia

En torno a la variable Puerto se sitúan variables de comportamiento del crucerista y del grupo, como, por ejemplo, Visita a Montevideo o Visita a Punta del Este. También se hallan conectados a este nodo las variables de percepción: Gusto (Gusta Playa, Gusta Montevideo, Gusta Casa Pueblo, Gusta Punta del Este, Gusta Casino, etc.) y de Disgusto por insuficiente oferta de tiendas. Conectado con el nodo asociado a la variable Visita a Punta del Este (véase Figura 1), a través del nodo asociado a la residencia, se halla la mayor cantidad de nodos asociados a variables que caracterizan al grupo, como ser indicador del número de visitas, ocupación, tamaño, y tipo, asociadas entre sí en ese orden. No obstante, todas ellas se encuentran relativamente alejadas del nodo central al que estarían asociadas (Puerto) y de hecho desaparecen al calcularse el árbol con criterios más restrictivos en cuanto a distancia respecto del nodo asociado a Gasto total.

En resumen, se puede decir que las variables asociadas a la variable de interés, Gasto total, son otras variables de gasto (en compras, *tours*, alimentación, otros y transporte), lo cual resulta intuitivo, y la variable de gusto por comida. Este vecindario se conecta con las restantes variables (de comportamiento, características del grupo y percepción) a través de la variable Puerto (mediante su vínculo con gasto en compras).

A la hora de aplicar un modelo de regresión que explique los componentes del gasto, se deberían tomar como variables explicativas aquellas que se encuentran adyacentes al nodo que representa la variable de interés. Por ejemplo, si se quisiera explicar el comportamiento del Gasto Total, según la Figura 3, las variables potencialmente significativas para el modelo son las que representan a los demás componentes del gasto (Gasto en compras, *tours*, transporte y alimentación), así como los términos de interacciones entre Gasto en compras: Gasto en *tours*,

serían Gasto en alimentación, *tours* y otros gastos; y un segundo grupo relacionado a la visita por Montevideo que se relaciona con variables de gusto, por ejemplo Gusta Ciudad Vieja, Gusta Cueros, Gusta Gente pero también incluye variables de desagrado de playas.

5. Conclusiones

En este trabajo se introdujo el uso de modelos basados en grafos para el estudio de los determinantes del gasto turístico. Como aplicación empírica de esta metodología, se consideran datos individuales de las encuestas realizadas a cruceristas correspondiente a la temporada de cruceros entre noviembre 2014 y abril 2015 en Uruguay. Como muestra la revisión bibliográfica, los trabajos estadísticos y econométricos anteriores al presente se acercaron a este problema mediante la aplicación de modelos econométricos clásicos. El enfoque de los modelos basados en grafos comprende un amplio conjunto de metodologías que ofrecen varias ventajas en términos de su uso y de la interpretación de los resultados. Son adecuados para resumir las interrelaciones dentro de grandes conjuntos de variables aleatorias, como es el caso de la encuesta para los cruceristas en Uruguay. Proporcionan resultados fácilmente interpretables, incluso en presencia de relaciones no lineales entre las variables. La metodología es particularmente útil para la construcción de mapas conceptuales basadas en datos y con el fin de visualizar los complejos vínculos que ocurren dentro de un conjunto de variables.

En comparación con los modelos econométricos clásicos, que pueden ser muy útiles para otros objetivos, los modelos basados en grafos ofrecen información útil y complementaria, que puede ser utilizada para la selección del modelo econométrico. Los grafos pueden ser utilizados para analizar la existencia de relaciones entre las variables consideradas. Por otra parte, a partir del grafo de independencia condicional, uno puede darse cuenta si dos o más variables están vinculadas directamente, o más bien si su conexión depende de alguna manera de otros elementos. Esto puede ser de ayuda tanto para los investigadores y académicos como para los operadores del mercado turístico. El comprobar que una relación entre dos variables se produce no de manera directa (i. e. los nodos asociados a las variables son adyacentes) sino que tiene lugar por mediación de otras variables explicativas (i. e. existe una sucesión de aristas que permiten conectar los dos nodos asociados, pero es necesario recorrer nodos adicionales y, por tanto, considerar las variables asociadas a dichos nodos), puede tener profundas implicaciones sobre las acciones a tomar hacia los conductores de una variable de respuesta. La estructura de enlaces hace que sea posible identificar aquellos elementos que son cruciales en el gobierno de las interrelaciones dentro de un conjunto de nodos. Esto se verifica por el hecho de que en algunas redes los nodos asumen una posición central con respecto a los demás. Esto ocurre para las variables Gasto total, Puerto, las variables de agrado total y la de desagrado nulo.

Otra ventaja que aportan los modelos basados en grafos consiste en obtener una visualización gráfica de un gran conjunto de variables que permita observar posibles agrupaciones o patrones de comportamiento similares entre variables; es decir, podría ofrecer una metodología complementaria al análisis de clústeres así como a otras metodologías multivariadas como pudiera ser el análisis de componentes principales (ACP).

Los resultados empíricos vinculados a las interacciones entre las variables de gasto y las de comportamiento pueden brindar interesantes sugerencias para los decisores en políticas de turismo del país y destinos. Tómese en cuenta que las variables asociadas a la variable de interés (Gasto total) son algunas de las variables de gastos específicos (compras, *trips*, alimentación, por ejemplo), así como a la variable de gusto por Comida. A su vez, recuérdese que este vecindario se conecta con las restantes variables (de comportamiento, características del grupo y percepción) a través de la variable Puerto, mediante su vínculo con Gasto en compras.

Ello permite hipotetizar que, dado que los cruceristas tienen casi todo su consumo incluido en el barco, los restaurantes y bares locales podrían obtener mejores beneficios si tratan de diferenciar su oferta del consumo en alimentos y bebidas que los cruceristas ya tienen incluido en su paquete del crucero; por ejemplo, proponiendo productos locales. Asimismo, es posible pensar que los cruceristas que deciden ir de compras en el destino, debido al “efecto riqueza”, puedan dar valor a participar en actividades culturales; dado que la cultura y las compras podrían estar compitiendo como actividades a ser realizadas por los turistas, sobre todo en este caso de los cruceristas donde el tiempo es una restricción a la cantidad de actividades que pueden hacerse. Por lo tanto, la promoción de actividades culturales debe estructurarse con el fin de captar el interés de este tipo de personas que tienen poco tiempo para pasar en el destino.

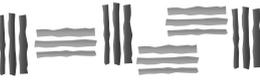
Esta investigación puede proseguir mediante la comparación de esta metodología con otras que se utilizan a la hora de agrupar variables como son el análisis de componentes principales o el análisis de clústeres de variables. Asimismo, la metodología deja el terreno preparado para poder hacer regresiones a los efectos de cuantificar la significatividad e impacto de las variables identificadas por el modelo en el gasto del turista. Además, se podría utilizar como insumo a la hora de modelar cierta variable de interés mediante un modelo de regresión, ya que el grafo proporciona información útil a la hora de seleccionar el mejor modelo de ajuste. Finalmente, y en el caso específico del estudio del gasto de los cruceristas en Uruguay, visto que se cuenta con datos uniformes para diversas temporadas, se podría analizar cada temporada con la metodología y estudiar la evolución de los determinantes del gasto.

Bibliografía

- Abbruzzo, A.; Brida, J.G. & Scuderi, R. (2014): “Determinants of individual tourist expenditure as a network: Empirical findings from Uruguay”. *Tourism Management*, 43, 36–45.
- Brida, J.G.; Bukstein, D.; Garrido, N.; Tealde, E. & Zapata-Aguirre, S. (2010): “Cruise passengers expenditure in the Caribbean port of call Cartagena de Indias: A cross-section data analysis”. *Estudios y Perspectivas de Turismo*, 19, 607–634.
- Brida, J.G.; Bukstein, D. & Tealde, E. (2013): “Exploring cruise ship passenger spending patterns in two Uruguayan ports of call”. *Current Issues in Tourism*, 18(7), 684–700.
- Brida, J.G.; Fasone, V.; Scuderi, R. & Zapata-Aguirre, S. (2014a): “ClustOfVar and the segmentation of cruise passengers from mixed data: Some managerial implications”. *Knowledge-Based Systems* 70: 128–136.
- Brida, J.G.; Garrido, N. & Such Devesa, M.J. (2012a): “Cruise passengers satisfaction: Cartagena de Indias”. *Benchmarking: An International Journal*, 19(1), 55–69.
- Brida, J.G.; Pulina, M.; Riaño, E. & Zapata-Aguirre, S. (2012b): “Cruise passenger’s experience embarking in a Caribbean Home Port.” *Ocean and Coastal Management*, 55, 135–145.
- Brida, J.G. & Scuderi, R. (2013): “Determinants of tourist expenditure: A review of microeconomic models”. *Tourism Management Perspectives*, 6, 28–40.
- Brida, J.G.; Scuderi, R. & Seijas, M.N. (2014b): “Segmenting cruise passengers visiting Uruguay: A factor-cluster analysis”. *International Journal of Tourism Research*, 16, 209–222.
- Brida, J.G. & Zapata-Aguirre, S. (2010): “Cruise tourism: economic, socio-cultural and environmental impacts”. *International Journal Leisure and Tourism Marketing*, 1 (3), 205–226.
- Cameron, A.C. & Trivedi, P.K. (2005): *Microeconometrics: Methods and applications*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Chow, C. & Liu, C. (1968): “Approximating discrete probability distributions with dependence trees”. *IEEE Transactions on Information Theory*, 14(3), 462–467.
- Dwyer, L. & Forsyth, P. (1998): “Economic significance of cruise tourism”. *Annals of Tourism Research*, 25 (2), 393–415.
- Edwards, D. (2000): *Introduction to graphical modeling*. New York: Springer.

- Edwards, D.; de Abreu, G.C.G. & Labouriau, R. (2010): “Selecting high-dimensional mixed graphical models using minimal AIC or BIC forests”. *BMC Bioinformatics*, 11(18), 13 pp.
- FCCA (2016): *Cruise Industry Overview 2016*. Pembroke Pines: Florida-Caribbean Cruise Association. Disponible en <http://www.f-cca.com/downloads/2016-FCCA-Cruise-Industry-Overview-Cruises-Statistics.pdf> <acceso 31/07/2017>.
- Foygel, R. & Drton, M. (2010): “Extended Bayesian Information Criteria for Gaussian Graphical Models”. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 23, 2020–2028.
- Frydenberg, M. & Steffen, L.L. (1989): “Decomposition of maximum likelihood in mixed graphical interaction models”. *Biometrika*, 76(3), 539–555.
- Henthorne, T.L. (2000): “An Analysis of Expenditures by Cruise Ship Passengers in Jamaica”. *Journal of Travel Research*, 38(3), 246–250.
- Hojsgaard, S.; Edwards, D. & Lauritzen, S. (2012): *Graphical models with R*. New York: Springer Verlag.
- Jackson, M. (2008): *Social and Economic Networks*. New Jersey: Princeton University Press.
- Kang, H.J.; Kim, K. & Kim, J.H. (1997): “Optimal approximation of discrete probability distribution with *k*th-order dependency and its application to combining multiple classifiers”. *Pattern Recognition Letters*, 18(6), 515–523.
- Kruskal, J. (1956): “On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem”. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7(1), 48–50.
- Lauritzen, S.L. (1992): “Propagation of probabilities, means, and variances in mixed graphical association models”. *Journal of the American Statistical Association*, 87(420), 1098–1108.
- Lauritzen, S.L. (1996): *Graphical models*. Oxford Statistical Science Series Vol. 17. New York: Oxford University Press.
- MINTUR (2015): *Temporada de Cruceros 2104-2015*. Montevideo: Ministerio de Turismo de Uruguay. Disponible en: <http://mintur.gub.uy/index.php/component/jdownloads/summary/11-turismo-de-cruceros/37-2014-2015> <acceso 1/12/2017>.
- MINTUR (2016): *Anuario de Turismo 2015*. Montevideo: Área de Investigación y Estadísticas. Ministerio de Turismo de Uruguay.

- Morrison, A.M.; Chunghui, C.; O’Leary, J.T. & Nadkarni, N. (1996): “Comparative profiles of travelers on cruises and land-based resort vacations”. *Journal of Tourism Studies*, 7(2), 15–27.
- Risso, W.A. (2012): “El gasto de los cruceristas en Uruguay 2008–2010”. *Revista de Turismo y Patrimonio*, 10 (3), 393–406.
- Seidl, A.; Guiliano, F. & Pratt, L. (2006): “Cruise tourism and community economic development in Central America and the Caribbean: The case of Costa Rica”. *Revista de Turismo y Patrimonio Cultural*, 4 (2), 213–224.
- Seidl, A.; Guiliano, F. & Pratt, L. (2007): “Cruising for colones: cruise tourism economics in Costa Rica”. *Tourism Economics*, 13(1), 67–85.
- Wang, Y. & Davidson, M. (2010): “A review of micro-analyses of tourist expenditure”. *Current Issues in Tourism*, 13(6), 507–524.
- Whittaker, J. (1990): *Graphical models in applied multivariate statistics*. New York: Wiley.



Los determinantes a largo plazo y su contribución a la tasa de ahorro de los hogares españoles en el período 1985–2016

DE ANDRÉS MOSQUERA, ANDRÉS
EAE Business School
Universitat Politècnica de Catalunya (España)
Correo electrónico: aandres@eae.es

RESUMEN

El trabajo estudia el comportamiento de la tasa de ahorro de los hogares en el período de 1985 a 2016. Se examinan las variables que la literatura considera que determinan la tasa de ahorro a largo plazo: renta, riqueza, desempleo, crédito y endeudamiento, ahorro público, estructura de la población, prestaciones sociales, tipos de interés y precios. Tras revisar la cointegración de las variables elegidas, proponemos cuatro especificaciones de la tasa de ahorro en función de sus determinantes a largo plazo: la renta permanente, la riqueza, el desempleo, el crédito, la tasa de dependencia y las prestaciones sociales. En el marco del modelo de corrección de error, contrastamos complementariamente la cointegración de las variables que confirman la validez del modelo. Los resultados muestran la especial relevancia a largo plazo de la tasa de dependencia que, como variable demográfica estructural, permite prever en cierta medida la evolución de la tasa de ahorro. Las prestaciones sociales, que muestran la importancia a largo plazo del sistema de prestaciones público, junto con el crédito y el desempleo, determinan la tasa de ahorro a largo plazo en consonancia con la fase del ciclo económico. La renta laboral-permanente incide sobre la tasa de ahorro especialmente en los cambios profundos de ciclo. La repercusión a largo plazo de la riqueza es de menor magnitud.

Palabras claves: ahorro de hogares; determinantes del ahorro; modelo de corrección de errores; ahorro precautorio; contracción del crédito; cointegración.

Clasificación JEL: E21; C13; C22.

MSC2010: 62J05; 62P20; 91B84.

Long-term determinants and its contribution to Spanish household saving rate during the period 1985–2016

ABSTRACT

The paper studies the behavior of the household saving rate during the period from 1985 to 2016. We examine the variables considered by the literature to determine the long-term saving rate: Income, wealth, unemployment, credit and indebtedness, public savings, population structure, social benefits, interest rates and prices. In the framework of the error correction model, we contrast the cointegration of the variables by means of four specifications for the saving rate according to its long-term determinants: Permanent income, wealth, unemployment, credit, dependency rate and social benefits. The results show the special long-term relevance of the dependency rate, which, as a structural demographic variable, allows us to predict the evolution of the saving rate. Equally important, social benefits show the relevance of social legislation and its impact on the survival of the welfare state. In the background, credit and unemployment determine the long-term saving rate at any stage of the economic cycle. The growth of labor income affects the saving rate especially in cycle changes when expectations on permanent income are modified. We find that wealth is less relevant. Finally, we find unconsolidated evidence about the fact that imbalances on the long-term rate are corrected in the short term through changes in labor income, wealth and credit.

Keywords: household saving; saving determinants; error correction model; precautionary saving, credit correction; cointegration.

JEL classification: E21; C13; C22.

MSC2010: 62J05; 62P20; 91B84.

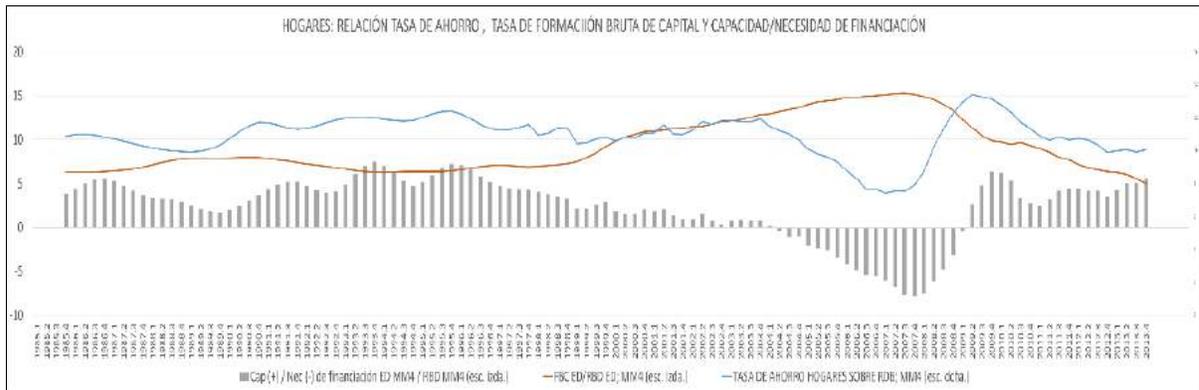


1. Introducción y objetivos

El ahorro interno del país es la suma del ahorro de cada uno de los agentes institucionales: hogares, empresas, instituciones financieras y administraciones públicas. A corto plazo, el ahorro nacional condiciona el saldo de la balanza por cuenta corriente y financia, junto con las entradas netas del resto del mundo, la inversión bruta del país. A largo plazo, es determinante para el crecimiento económico y la productividad futura.

El ahorro de los hogares incide sobre la demanda agregada y renta de equilibrio ya que facilita una senda de consumo estable y financia la inversión y la acumulación de riqueza. Los hogares españoles han sido tradicionalmente un sector ahorrador con capacidad de financiación al resto de sectores institucionales. En el Gráfico 1 se muestra la tasa de ahorro e inversión de los hogares y su saldo, capacidad o necesidad de financiación en medias móviles de orden cuatro (MM4). En general, los hogares presentan capacidad de financiación hasta 2003; desde 2003 a 2008, la disminución de la tasa de ahorro y el esfuerzo de inversión les convierte en prestatarios netos de recursos. Aunque en este marco temporal, de 1985 a 2016, se han sucedido períodos de crecimiento y recesión, la tasa de ahorro bruto ha seguido una tendencia cercana al 10% de la renta disponible desde 1985 hasta 2004, donde inicia un fuerte declive hasta 2007. A partir de la recesión iniciada en 2008, la tasa de ahorro sobrerreacciona y alcanza el 14% de la renta disponible en 2009, para caer fuertemente desde 2010 y situarse por debajo de su tendencia.

Gráfico 1. Tasa de ahorro de los hogares, inversión neta y capacidad (necesidad) de financiación



Fuente: INE, Contabilidad Nacional Trimestral

Revisados los determinantes a largo plazo de la tasa de ahorro, nuestro objetivo se dirige a explicar su evolución desde 1985 a 2016 y su alejamiento respecto a su media de largo plazo desde 2004. El marco teórico general sobre consumo y ahorro es la teoría del ciclo vital (TCV) (Ando y Modigliani, 1963; Modigliani y Ando, 1954; Modigliani y Brumberg, 1954) y la teoría de la renta permanente (TRP) (Friedman, 1957) en conjunto (TCVRP). Attanasio y Brown (1994) confirman la utilidad del enfoque de series temporales y su adecuación al marco teórico si recoge

sus premisas. Estudios similares en Turquía (Tunc y Yavas, 2016), Brasil (Paiva y Jahan, 2003) e India (Athukorala y Sen, 2004) utilizan modelo de series temporales asumiendo los fundamentos de la TCVRP sin hacer explícita la ecuación microeconómica que recoge la conducta maximizadora del agente representativo ni los supuestos de agregación.

El primer paso es la revisión, bajo el marco teórico de la TCVRP, de las variables económicas que determinan el ahorro de los hogares a largo plazo. Las fuentes señalan la renta permanente, la riqueza, el desempleo, el crédito, el ahorro público, la estructura de la población, los sistemas de previsión social y las prestaciones de jubilación, los tipos de interés y la variación de precios.

La elección e introducción de las variables del modelo se inicia con el análisis de las series temporales. En algunos casos, se incumplen las condiciones generales del modelo de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) y los estimadores no presentan las características necesarias que lo validan; en general, presentan problemas de endogeneidad que produce multicolinealidad en las regresiones estimadas (Coricelli y Roland, 2011; Deaton, 1987; Lucas, 1976) y da lugar a regresiones espurias. El incumplimiento de las condiciones clásicas para la obtención de los estimadores se reduce cuando las variables cointegran (Granger, 1981). Si dos o más series tienen el mismo orden de integración, se dice que están cointegradas de forma que existe una combinación lineal de las mismas que es estacionaria y su relación tiende a mantenerse en el tiempo. Guisán (2002) afirma que el “análisis de cointegración no es una técnica superior, de forma general, al análisis de regresión”; matiza que es conveniente usar ambos métodos y recomienda usar el segundo en fases de análisis de la causalidad.

El teorema de representación de Engle y Granger (1987) permite asegurar que podemos estimar un modelo de corrección de error y evitar las regresiones espurias cuando las variables cointegran. Utilizaremos el marco metodológico de corrección de error y estimaremos la relación entre la tasa de ahorro y sus determinantes mediante cuatro modelos que nos permitirán confirmar la cointegración de las variables.

Nos planteamos concretamente contrastar el siguiente conjunto de hipótesis. A partir de 2004, la tasa de ahorro experimenta unos movimientos que la separan de su tendencia que es explicable mediante los determinantes propuestos. En la etapa de la tasa de ahorro por debajo de la tendencia, inciden de forma conjunta una serie de circunstancias: mejoran las expectativas sobre la renta permanente, crece la riqueza y se reduce el ahorro precautorio con la mejora del empleo y el crédito. El cambio de ciclo en 2008 modifica la evolución de la tasa de ahorro que crece apoyada por el cambio de expectativas respecto a la renta permanente, la tasa de dependencia, el desempleo y la contracción continuada del crédito; únicamente la existencia de prestaciones presionan para reducir la tasa de ahorro.

Nuestro trabajo presenta ciertas novedades que consideramos de interés: por un lado revisa la disponibilidad de series temporales y enlaza las procedentes de diferentes sistemas contables procedentes de la contabilidad nacional. Metodológicamente, estudiamos cuatro especificaciones del modelo de la tasa de ahorro de los hogares en España a largo plazo y, siguiendo a Bérubé y Côté (2000), contrastamos la cointegración de las variables en el marco del modelo de corrección de error. Pretendemos poner de relieve la importancia de las variables estructurales de evolución en gran medida previsible, como la tasa de dependencia, y otras, como las prestaciones sociales, cuya magnitud depende de la coyuntura económica y de la legislación.

Tras esta introducción en la que planteamos también los objetivos y la metodología, el documento se estructura en los siguientes apartados. En la sección 2 y sus epígrafes, revisamos el marco teórico relacionado con las variables determinantes del ahorro, y justificamos la construcción de las variables, su tratamiento estadístico y su inclusión en el modelo. La sección 3 muestra los resultados obtenidos del análisis empírico y las consecuencias que se pueden extraer. En la sección 4 y final, se resume el planteamiento, los resultados y las conclusiones. El documento continúa con la bibliografía. Finalmente, aparecen los anexos en los que se incluyen los gráficos de las series, las pruebas de cointegración, las tablas con las especificaciones de los modelos y el origen y construcción de las series temporales utilizadas.

2. Los determinantes a largo plazo del ahorro de los hogares: marco teórico

Argandoña (1994) resume los motivos por los que ahorran los hogares: distribuir el consumo en una senda estable que compensa las variaciones de renta, construir un patrimonio para financiar el consumo en la jubilación, un motivo precautorio orientado a hacer frente a imprevistos, la incertidumbre sobre las rentas futuras y los cambios de ciclo, y por solidaridad con sus descendientes transmitiéndoles su ahorro como herencia.

La TCVRP parte de la conducta maximizadora del consumidor y postula que el consumo es función de la renta permanente esperada, más estable que la renta corriente. Destaca que el ahorro viene fundamentalmente motivado por su función de colchón para mantener ese nivel estable de consumo y la creación de riqueza para la jubilación. La renta permanente está constituida por la estimación que los hogares hacen de lo que será su renta laboral y la renta derivada de los activos reales y financieros que constituyen su patrimonio. Así, los cambios en la renta considerados como permanentes tienen mayor efecto sobre el consumo que los considerados transitorios, que repercuten en mayor medida sobre el colchón de ahorro.

Los mercados financieros y el crédito permiten trasladar renta, consumo y ahorro, dando lugar a esta senda estable de consumo, de forma que los individuos se endeudan –su ahorro es menor– en su juventud cuando sus ingresos corrientes son menores y mayores sus necesidades para la formación de su hogar. Y ahorran en su edad madura reduciendo su endeudamiento y formando un patrimonio para su jubilación. En los modelos básicos de la TCVRP, el consumo en las etapas finales de la vida agotaría los recursos ahorrados, dando lugar a una relación inversa entre renta permanente y tasa de ahorro: dada su renta corriente, aumentos considerados permanentes de la riqueza dan lugar a tasas de ahorro decrecientes.

El contraste con datos empíricos ha detectado desviaciones respecto a lo esperado que han puesto en cuestión los presupuestos teóricos de la TCVRP. Las restricciones de crédito dificultan el traslado de rentas y consumo, que derivan en sendas de consumo más dependientes de la renta corriente (Carroll y Summers, 1991). Tampoco la evidencia confirma que los hogares jubilados agoten sus recursos; al contrario, su tasa de ahorro no parece disminuir significativamente y se confirma su ahorro por motivos de solidaridad intergeneracional (Weil, 1994).

En versiones más actuales basadas en la TCVRP, se incorporan modelos que recogen restricciones de liquidez y ahorro precautorio que contemplan el motivo de solidaridad, como comentaremos en los epígrafes siguientes. Adicionalmente, la literatura económica ha estudiado la repercusión sobre consumo y ahorro de otras variables que determinan la tasa de ahorro a largo plazo, como la estructura demográfica, la rentabilidad del ahorro, la incertidumbre sobre la renta futura, la inflación, el ahorro público, los sistemas de pensiones y cobertura del desempleo y la riqueza de los hogares. Otras, como el ahorro por solidaridad y la concentración de la renta¹, no se incorporan en este trabajo por cuestiones metodológicas o escasa disponibilidad de series temporales.

En los siguientes epígrafes se revisan las variables que se incorporan en el modelo y se especifica su construcción, enlace y las transformaciones realizadas para su inclusión en el modelo.

2.1. La tasa de ahorro de los hogares

La Contabilidad Nacional (CN) está enfocada en obtener estimaciones de la producción de bienes y servicios (PIB), el destino de éstos (Demanda Agregada) y el ingreso o rentas generadas en el proceso de producción. En consecuencia, la renta primaria de los hogares procede de la actividad

¹ Un examen de los determinantes del ahorro puede revisarse en Argandoña (1994), Browning y Lusardi, (1996) y Loayza *et al.* (2000a).

productiva de los hogares (microempresas), de las rentas del trabajo y de las rentas de la propiedad o activos reales y financieros. Obtenemos la renta disponible sustrayendo las transferencias al sector público procedentes de las cotizaciones a la seguridad social e impuestos y, finalmente, el ahorro bruto detrayendo de la renta disponible el gasto en consumo final.

Esta acepción del ahorro como residuo presenta algunos inconvenientes: no integra los cambios en el valor de los activos o las pérdidas y ganancias potenciales derivadas de las variaciones de valor de su patrimonio. Estas variaciones no están recogidas en los ingresos corrientes (ni en el ahorro) y sí tendrían impacto en su consumo y ahorro corriente. Los impuestos también generan distorsiones en renta, consumo y ahorro: las variaciones de riqueza no realizadas no están sujetas a gravamen y sí lo están las realizadas. Asimismo, aunque en la CN se incluye un ajuste por la variación de derechos de pensiones, éstas no están sujetas a gravamen hasta que no se perciben. Estas cuestiones dificultan la aplicación de la TCVRP, que utiliza el concepto de renta permanente, un consumo que también incluye los bienes duraderos y, en consecuencia, una acepción diferente de ahorro.

Bajo el marco de la TCVRP, una acepción amplia y completa de ahorro corresponde a la diferencia entre el total de ingresos (renta permanente) y el consumo: por tanto, los ingresos incluyen las rentas y plusvalías –realizadas o no– procedentes del patrimonio mobiliario e inmobiliario, las rentas de los negocios y los beneficios en general de la riqueza (Dyner *et al.*, 2004). Esta acepción se corresponde con el flujo de ahorro y la variación de la riqueza mobiliaria e inmobiliaria a precios corrientes, que requiere construir series de ahorro integrando las cuentas financieras y la riqueza que recojan las variaciones en el valor de los activos. La dificultad de obtener o construir series temporales extensas y fiables nos obliga a abandonar esta interpretación.

La alternativa es una acepción del ahorro que destaque la conducta activa del ahorrador: la diferencia entre las rentas –excluyendo las ganancias no realizadas del capital– y el consumo. Si las rentas del capital no son anticipadas en el momento de la decisión de consumo, esta acepción recogería mejor la intención de ahorro (Dyner *et al.*, 2004). Consideramos que gran parte de las rentas de la propiedad incluidas en el ahorro bruto proceden del patrimonio mobiliario –intereses y dividendos– e inmobiliario –alquileres– que son previsibles y constituyen renta permanente.

Utilizamos las series de ahorro bruto y renta bruta disponible de la Contabilidad Nacional Trimestral de los Sectores Institucionales que sigue el Sistema Europeo de Cuentas (SEC10)² y obtenemos la tasa de ahorro de los hogares sobre renta bruta disponible. Respecto al denominador para el cálculo de la tasa de ahorro, Dynan *et al.* (2004) proponen utilizar la renta corriente o una media de los últimos períodos; aunque consideran que el componente de error en el denominador es poco probable que produzca sesgos y no encuentran evidencias de diferencias en los resultados derivados de cambios en el denominador.

La serie empleada es la tasa de ahorro bruto sobre renta disponible. Se incorpora en los modelos en tasa y ajustada de variaciones estacionales. Las pruebas de estacionariedad muestran discrepancias respecto a su orden de integración y cointegrabilidad con el resto de las variables. La serie podría ser estacionaria en torno a su media aunque existen evidencias de que la tasa de ahorro no es estacionaria sino integrada de orden uno (Maza, 1996).

2.2. La renta permanente y la renta laboral como *proxy* de la permanente

La TCVRP postula que el consumo está correlacionado con la renta permanente, ambos más estables que la renta corriente. El ahorro también podría presentar cierta relación con la renta permanente como objetivo de los hogares. Pero presentará mayor variabilidad dado que ajusta el consumo –estable y con hábitos– a las diferencias entre renta corriente y permanente. Es difícil obtener una estimación adecuada de la renta permanente y, dado que medimos el ahorro como el residuo entre renta y consumo corrientes, es probable que aparezcan correlaciones positivas entre ahorro y la variable de renta utilizada.

Para evitar esta correlación, Dynan *et al.* (2004) proponen utilizar *proxies* de la renta permanente y consideran 4 posibilidades: el consumo, la renta del trabajo con rezagos, la renta del trabajo futura y el nivel de estudios, éste último más adecuado para datos de sección cruzada (Modigliani y Ando, 1960; Zellner, 1960). El *proxy* elegido debe cumplir dos requisitos: por un lado, debe mostrar elevada correlación con la renta permanente anticipada por los hogares en el momento de la decisión de ahorro; por el otro, la variable no debe mostrar correlación con el término de error –que incluye la medida del error y el ingreso transitorio– de forma que incida sobre la tasa de ahorro solo mediante su influencia como renta permanente.

La primera posibilidad, el consumo, cumple perfectamente el primer requisito: no está correlacionado con la renta transitoria; pero el consumo transitorio puede sesgar la relación entre

² Reglamento (UE) n° 549/2013 del Parlamento Europeo y del Consejo, de 21 de mayo de 2013, relativo al Sistema Europeo de Cuentas Nacionales y Regionales de la Unión Europea: http://www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=DOUE-L-2013-81250.

tasa de ahorro y renta permanente y hacerla negativa; así la medida del error refuerza el sesgo cuando se utiliza la acepción de ahorro como diferencia entre renta y consumo. La renta laboral con rezagos presenta mayores propiedades: cuantos más rezagos y menor persistencia de la renta transitoria, menor correlación entre ellas. Abowd y Card (1989) y MaCurdy (1982) aportan evidencias de escasa persistencia de la renta transitoria. Por último, la utilización de los ingresos futuros también puede introducir sesgos: si la previsión de los hogares respecto a su futura renta laboral es mayor que la que harían basándose en su historial de ingresos, utilizar el ingreso laboral futuro sesga la relación ahorro-renta hasta hacerla inversa: mayores rentas futuras reducen el ahorro actual. La utilización de *leads* o adelantos de las variaciones de la renta laboral como *proxy* de la renta permanente permiten asimismo reducir los problemas de correlación (Mody *et al.*, 2012).

La obtención de la renta laboral a partir de la contabilidad nacional requiere distinguir los dos tipos de rentas que obtienen los hogares: las rentas obtenidas por el trabajo dependiente, de las obtenidas de forma conjunta con el capital o rentas mixtas. Las primeras aparecen en la contabilidad nacional trimestral no financiera de los sectores institucionales (CNTNFSI) en la cuenta II.1.2. Cuenta de asignación de la renta primaria (código D.1). Esta remuneración de asalariados recoge la obtenida por el trabajo dependiente tanto en sociedades como en actividades productivas sin estructura mercantil; corresponde a las rentas del trabajo que mejor se asocian con el concepto de renta permanente.

La cuenta II.1.1 Cuenta de explotación de la CNTNFSI recoge la actividad de producción del sector hogares. El valor añadido bruto (VAB) producido por los hogares se crea por su aportación al PIB mediante su trabajo dependiente (código D.1 anterior) o mediante una combinación heterogénea de factor capital y trabajo de las empresas sin estructura mercantil y trabajadores –empresarios y profesionales no asalariados– autónomos denominado EBE o renta mixta. Por tanto, la renta mixta recoge a su vez rentas del capital y rentas del trabajo, en este caso, no dependiente. Hemos estudiado la posibilidad de obtener una serie temporal de la renta laboral “acumulada” que recoja ambos tipos de rentas del trabajo: las procedentes del trabajo dependiente y las procedentes de la renta mixta. En estas últimas, aislamos y excluimos la parte de la renta mixta que corresponde a la remuneración del capital de estas microempresas. Los resultados no fueron suficientemente significativos y no se reportan, pero se mantiene como posibilidad para futuras líneas de investigación.

Finalmente, el modelo utiliza como *proxy* de la renta permanente la remuneración de asalariados o rentas del trabajo dependiente en tasa de variación (primera diferencia de su logaritmo) de la renta laboral en términos reales con un adelanto para reducir la correlación y ajustamos la serie sustrayendo las variaciones estacionales. En el Anexo 1, se muestra el gráfico

de la serie y las pruebas de cointegración; mientras que, en el Anexo 2, aparecen el origen de las series utilizadas y su enlace. Al igual que la tasa de ahorro, los test de estacionariedad muestran discrepancias aunque la mayoría de las pruebas confirman que es integrada de orden uno.

2.3. La riqueza inmobiliaria y financiera

La riqueza de los hogares procede de su ahorro acumulado, de las herencias o ahorro familiar y de la variación de precios de sus activos reales y financieros. Las variaciones de la riqueza se asocian a la renta transitoria y, en consecuencia, su propensión marginal al consumo (PMC) es menor que la asociada a la renta permanente aunque los estudios proporcionan resultados dispares: Case *et al.* (2005) obtienen propensiones bajas –entre 0,05 y 0,15–, consecuencia de un efecto riqueza de procedencia inmobiliaria, y mucho menor si procede de la riqueza financiera. Por el contrario, Dynan y Maki (2001) encuentran relevante el efecto sobre el consumo consecuencia de la variación directa en la renta corriente que procede de la riqueza financiera; por el contrario, observan de escasa repercusión en el consumo el efecto indirecto resultado de los cambios en la previsión de su renta permanente. Resultados similares obtienen Lettau y Ludvigson (2004) en EUA a partir de un indicador de riqueza neta en episodios como la crisis del mercado de capitales de 1987: solo una pequeña fracción de la variación de riqueza está relacionada con el consumo agregado de los hogares. Parece que las variaciones de riqueza inesperada y transitoria se reflejan más en el ahorro que en el consumo, por lo cual esperamos una relación negativa con la tasa de ahorro en España (Sastre y Fernández-Sánchez, 2011a).

En el gráfico 5 del Anexo 1 (RISPSA), se muestra la evolución de la riqueza inmobiliaria en tasa respecto al PIB que publica el Banco de España. Otras variables de riqueza –financiera y total– como ratio del PIB siguen patrones similares, aunque la riqueza inmobiliaria estimada en niveles muestra cierto desfase y un comportamiento más cíclico. Las series de riqueza financiera y conjunta resultaron menos significativas que la riqueza inmobiliaria en tasa sobre PIB como determinante de la tasa de ahorro. Las pruebas de estacionariedad (véase Anexo 1) muestran que es integrada de orden 1 y se introduce en niveles ajustados de variaciones estacionales. El origen de la serie se muestra en el Anexo 2.

2.4. El tipo de interés: su relación con el coste de la financiación y la rentabilidad de los activos

La existencia de mercados financieros desarrollados permite suavizar la senda del consumo mediante el ahorro y la financiación. El consumidor maximiza la utilidad derivada de su consumo a lo largo de su ciclo de vida. Este equilibrio intertemporal dependerá de la rentabilidad de su ahorro, del coste de su financiación –convergentes en mercados perfectos– y de su tasa de

preferencia por el consumo actual. El comportamiento de estas variables indica cambios en el coste de oportunidad entre consumo actual y futuro. Las consecuencias sobre consumo y ahorro dependerán del efecto renta y sustitución derivado. Un incremento en el interés real puede sustituir consumo actual por futuro, aumentar el ahorro actual y alcanzar mayores niveles de consumo futuros.

Este efecto renta derivado de sus mayores ingresos de su ahorro, es mayor en los agentes prestamistas que en los prestatarios netos. Para los prestamistas netos, un aumento en la renta corriente puede reforzar su consumo actual si consumo actual y futuro son bienes normales para una tasa de preferencia dada. Para éstos, los efectos renta y sustitución operan en sentido contrario. Para los prestatarios netos, el mayor coste de su deuda reduce los ingresos corrientes y el efecto renta negativo se acumula al efecto sustitución y tiende a aumentar el ahorro. Pese al carácter de prestamista neto del sector hogares español –excepto de 2004 a 2009–, es de esperar que el efecto renta positivo de los prestamistas no compense el negativo de los prestatarios y el efecto sustitución conjunto, resultando en consecuencia una relación directa entre interés real y ahorro.

El aumento del tipo de interés real incide en los precios y rentabilidad del resto de los activos financieros que componen la cartera de los hogares: el valor de mercado de los activos de renta fija se reduce; por otro lado, la rentabilidad de la renta variable no crece al mismo ritmo que los intereses reales, y los precios y el valor de mercado del patrimonio financiero de los hogares disminuyen. Por último, el valor actual de los flujos de rentas del trabajo y las transferencias públicas futuras disminuye con el aumento del interés real. En conjunto, un contexto de crecimiento del interés real refuerza el efecto renta negativo y el efecto sustitución.

El contraste empírico a escala internacional avala parcialmente los presupuestos teóricos y la relación directa entre interés real y ahorro (Attanasio y Weber, 2010), aunque de una magnitud reducida. La posibilidad de utilizar el interés real después de impuestos requiere distinguir entre los diferentes activos en los que se coloca el ahorro, el gravamen a aplicar y ponderar aquellos activos que posponen la imposición. Zabalza y Andrés (1991) encuentran evidencias de que la presión fiscal incide negativamente sobre el ahorro familiar pero no sobre el total del ahorro privado sugiriendo, como Maza (1996) para un conjunto de países de la Comunidad Europea, que las familias rasgan el velo societario. Una alternativa sería fijar un gravamen general fijo sobre el ahorro, aunque existe evidencia (Bérubé y Côté, 2000) de que no modifica sensiblemente los resultados.

La variable elegida como *proxy* del interés real es la rentabilidad de la deuda pública a largo plazo deflactada. La serie resulta integrada de orden 1 y se incluye en los modelos en

niveles y ajustada estacionalmente. En los Anexos 1 y 2 se muestran las pruebas de estacionariedad y la fuente.

2.5. La incertidumbre y el ahorro por precaución

Los hogares ahorran con la intención de cubrir el riesgo derivado de cambios imprevistos en su renta permanente. La incertidumbre parece influir sobre el ahorro ya que perturba la percepción sobre la renta permanente y ese colchón de ahorro permitiría cierta cobertura de riesgos inesperados. El ahorro por precaución está previsto en la TCVRP ya que el agente que optimiza la distribución intertemporal del consumo tiene en cuenta un conjunto de riesgos derivados de enfermedad, la pérdida del empleo o la inflación; pero las teorías del ahorro por motivo de precaución con base microeconómica consideran la renta permanente como incierta –variable estocástica– a diferencia de los modelos iniciales de la TCVRP.

Los primeros estudios teóricos sobre el motivo precautorio (Leland, 1968) ponen de evidencia el comportamiento de los agentes que presentan aversión al riesgo. En Carroll y Dunn (1997), se presenta una versión de la TCVRP que incluye incertidumbre en la renta: muestra el deseo de mantener saldos para hacer frente a urgencias imprevistas que, en Carroll (1997), cumple una función de amortiguador (*buffer stock*). El consumidor intenta mantener un equilibrio entre la preferencia por el consumo actual y el ahorro para evitar reducir su consumo ante eventuales crisis de renta. Mantendrá ahorro que crecerá en función del riesgo y las variaciones del valor de liquidación de esa riqueza: si el riesgo decrece o el valor de su riqueza aumenta, aumentará su consumo y disminuirá su ahorro precautorio.

La propensión media a consumir (PMC) puede alejarse de la prevista por la TCVRP si no incluimos algún indicador de incertidumbre respecto a la variación de la renta permanente. Dada la dificultad de introducir la incertidumbre en los modelos, lo habitual es utilizar variables *proxies* que intentan reflejar de forma independiente esta influencia; aunque en ciertos casos (Sastre y Fernández-Sánchez, 2011b), la inclusión de una variable que recoja su influencia no aporta más información que la que procede de la variación de la renta permanente.

Aunque la recesión de 2008 ha aumentado la incertidumbre sobre riesgos futuros, la evidencia empírica sobre su impacto en consumo y ahorro no es concluyente: Mody *et al.* (2012) introducen la volatilidad del mercado de capitales como indicador de incertidumbre y observan que el riesgo derivado de la inversión tiene escaso impacto en la tasa de ahorro. La utilización de la inflación (Loayza *et al.*, 2000a) ha sido utilizada escasamente y con resultado poco significativo. Carlson y Parkin (1975) proponen como variable *proxy* la varianza del crecimiento de la renta disponible de los hogares; Horioka (1991) utiliza una variable GARCH que recoge la volatilidad del PIB. En España, Soria *et al.* (2004) y Núñez (2013b) confirman la existencia de

ahorro precautorio mediante indicadores de volatilidad. Núñez (2013a), utilizando datos regionales españoles, confirma la existencia de un ahorro por motivos de precaución mediante una variable que refleja la volatilidad condicionada basado en una estructura ARMA-GARCH.

Dado que la mayor parte de la renta considerada permanente procede de las rentas laborales, es habitual y coherente utilizar variables relacionadas con el desempleo para estimar este ahorro precautorio. Carroll *et al.* (2003) utilizan una función que aproxima la probabilidad del desempleo y muestra evidencias de este ahorro relacionado con la aversión al riesgo.

Los trabajos con base en la TCVRP y fundamentos microeconómicos que utilizan el desempleo como *proxy* de la incertidumbre no son concluyentes en cuanto a la relevancia del desempleo sobre el ahorro: Horioka y Watanabe (1997) confirman el motivo precautorio en Japón; Hurst *et al.* (2005) consideran que este ahorro está más asociado a rentas salariales que a los empresarios autónomos (renta mixta) por lo que, en función del objeto de estudio, ha de ser esterilizado. Dado que los empresarios poseen mayor riqueza por motivos no precautorios y se enfrentan en general a mayor volatilidad en sus ingresos, la relación entre su riqueza y el riesgo asociado a su renta no se corresponde con los motivos precautorios del ahorro. Puesto que nuestro modelo excluye las rentas mixtas como permanentes, nuestra acepción de ahorro precautorio no pierde relevancia.

En muchos casos, no resulta evidente que el riesgo por desempleo permita distinguir este motivo precautorio del ahorro: Sastre y Fernández-Sánchez (2011b) utilizan un modelo de renta permanente al que asocian un indicador del riesgo de desempleo que no aporta más información que la que originan las revisiones de expectativas sobre la renta laboral. Consideran que la revisión a la baja de las expectativas de ingreso futuro de los hogares es determinante pero no suficiente para explicar la evolución de la tasa de ahorro, y muestran significativa la evidencia derivada de las condiciones de financiación. Si bien parece que ese conjunto de variables explica el aumento de la tasa de ahorro en 2008 y 2009, no parecen suficientes para explicar la caída en 2010.

Barceló y Villanueva (2010; 2016), cambiando de eje, ponderan la incidencia de la estabilidad laboral sobre el ahorro y la riqueza de los hogares españoles: estiman que la riqueza financiera de los agentes con menor riesgo de desempleo es un 30% menor que los hogares con contrato temporal y esta diferencia vendría motivada por el ahorro precautorio.

En conjunto, se espera que el aumento del desempleo, si se considera duradero, introduzca incertidumbre sobre las rentas futuras, obligue a reconsiderar la estimación de la renta permanente, reduzca el consumo y aumente la tasa de ahorro. Los sistemas de protección social ante el desempleo proporcionan cierta seguridad y reducen la incertidumbre sobre las rentas

futuras: permiten una caída más lenta de la renta disponible y ralentizan el cambio de expectativas con lo que pueden reducir ese ahorro precautorio.

Hemos estudiado de forma tentativa la introducción de la inflación o la volatilidad del PIB –que no se reportan– como proxy de la volatilidad de las rentas esperadas con escasos resultados. Finalmente, incluimos como *proxy* del ahorro por motivos de precaución la tasa de desempleo procedente de la Encuesta de Población Activa (EPA) del Instituto Nacional de Estadística (INE). La EPA, en su versión actual, publica datos mensuales desde 2002 que trimestralizamos; enlazamos las series anteriores extendiendo la serie actual hacia atrás mediante aplicación de la tasa de crecimiento de la serie antigua. En las pruebas de estacionariedad, la serie se mostró integrada de orden uno y se incluye en el modelo ajustada de variaciones estacionales.

2.6. La financiación de los hogares: incidencia del endeudamiento y el crédito sobre el ahorro

El contraste empírico de las hipótesis de la TCVRP muestra en ocasiones un exceso de sensibilidad del consumo a la renta corriente (Flavin, 1981; Hall y Mishkin, 1982) en contra de los pronósticos de la TCVRP, que se asocia a las restricciones de liquidez. Estas restricciones de crédito explicarían ese “exceso de sensibilidad” del consumo a la renta corriente: Campbell y Mankiw (1989) sugieren como indicador de los hogares sometidos a restricciones de liquidez la magnitud del coeficiente que relaciona consumo y renta corriente. Hall y Mishkin (1982) calculan que son un 20% de los hogares los que sufren estos problemas de restricción de la liquidez dado que el 80% del consumo responde a la hipótesis de la renta permanente.

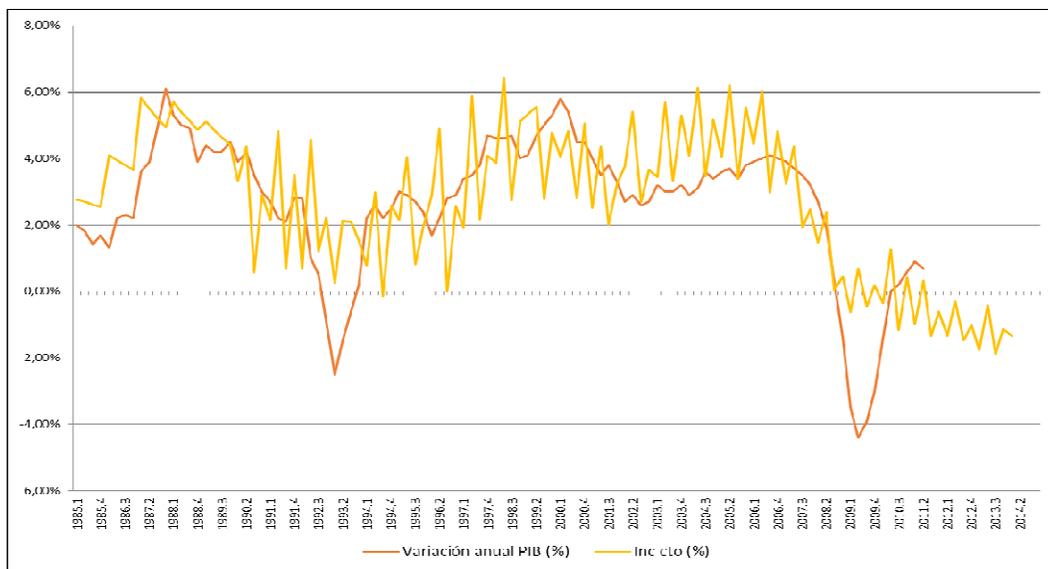
Si en períodos de bonanza la riqueza se coloca en bienes duraderos o inmuebles intrínsecamente ilíquidos, los consumidores más sometidos a restricciones de liquidez presentarán exceso de sensibilidad del consumo a las variaciones de renta corriente. Si el crédito tiene la función de trasladar renta y consumo, las dificultades de acceso al crédito inciden sobre la tasa de ahorro. Sastre y Fernández-Sánchez (2011b) confirman la repercusión de las restricciones de liquidez sobre la tasa de ahorro en España durante la crisis 2008 a 2014, tanto en su sobre-reacción inicial como en su intensa caída en 2010.

La disponibilidad de crédito está relacionada con el endeudamiento y el ahorro. Estrada *et al.* (2014) muestran que el endeudamiento influye en las condiciones financieras de la deuda ocasionando mayor incertidumbre sobre las rentas futuras. El endeudamiento puede afectar también de forma indirecta ya que ralentiza el crecimiento económico: Jordà *et al.* (2013) para una muestra de 14 países desarrollados y Bunn y Rostom (2014) en el Reino Unido, muestran que la recesión es más profunda y la senda de recuperación más lenta cuando se parte de ratios de

endeudamiento elevado. Coricelli y Roland (2011) ponderan la importancia de flujos y fondos: un retraso en la reducción del endeudamiento de los agentes (*stock*) no obstaculiza la recuperación económica; el retraso en los flujos de crédito sí.

Además del endeudamiento, el crédito concedido depende de otros factores: el Gráfico 2 muestra un comportamiento cíclico fuertemente correlacionado con las variaciones del PIB que le confiere un carácter procíclico (Gual, 2009). La contracción del crédito también proviene de la oferta: el deterioro de los fondos propios de las entidades de crédito (Santos, 2017), que Hernando y Villanueva (2014) relacionan con el sector inmobiliario, conduce a restricciones de liquidez que inciden sobre el ahorro. Sastre y Fernández-Sánchez (2011b) incluyen en un modelo de maximización de la utilidad el crecimiento del crédito destinado a bienes duraderos. Intentan reflejar la restricción del crédito por parte de la oferta, que modificaría las decisiones de distribución del consumo en el tiempo y afectaría a la tasa de ahorro; aunque esta variable recoge también reducciones de demanda de agentes no sometidos a restricción de crédito.

Gráfico 2. Tasa crecimiento del PIB y del crédito a hogares (Inc. Cto)



Fuente: Banco de España

Los hogares españoles realizan un gran esfuerzo de inversión hasta 2007. Una percepción excesiva de su renta permanente les conduce a aumentar el consumo y el crédito (Carballo-Cruz, 2011; Conefrey y Fitz Gerald, 2010). Aumenta su endeudamiento, que supera el 80% del PIB en 2009, y genera dificultades para obtener nuevo crédito (Estrada *et al.*, 2014; Ludvigson, 1999; Rinaldi y Sanchis-Arellano, 2006). La coyuntura simultánea de elevado endeudamiento y restricción de crédito puede requerir incrementos de la tasa de ahorro para reducir el apalancamiento de los hogares (Bacchetta y Gerlach, 1997).

Estudiamos la introducción en el modelo de variables que recojan el endeudamiento de los hogares y su incidencia sobre la tasa de ahorro: Coricelli y Roland (2011) construyen un ratio (*stock* de crédito/PIB) en términos de incremento en los años de recuperación; en términos de flujo, miden la diferencia entre la tasa de crecimiento del mismo ratio (crédito / PIB) entre años. Ratios similares de apalancamiento resultaron escasamente significativos.

Con datos agregados, la variable que muestra la incidencia del crédito sobre el ahorro recoge de forma conjunta los factores de oferta y demanda que finalmente repercuten sobre la tasa de ahorro. El crédito obtenido puede reflejar la situación de sobreendeudamiento de los hogares, la dificultad de trasladar rentas, el exceso de sensibilidad a las condiciones de crédito, y su repercusión sobre el ahorro de los hogares. Bérubé y Côté (2000) utilizan el ratio flujo de crédito de consumo sobre los pasivos de los hogares; Sastre y Fernández-Sánchez (2011b) incluyen el crecimiento del crédito destinado a bienes duraderos.

Nosotros construimos la variable tasa de crédito como el cociente entre los pasivos bancarios netos contraídos el trimestre anterior y el *stock* de pasivos bancarios de los hogares. Esperamos que recoja la relación inversa comentada entre crédito y tasa de ahorro. La serie resulta integrada de orden uno y se introduce en el modelo en niveles ajustada de estacionalidad.

2.7. El ahorro público

Ricardo da nombre a la tesis por la cual un aumento de los impuestos no genera renta debido al cambio de actitud de las economías domésticas que aumentan su ahorro por anticipar el aumento de gravamen posterior: la equivalencia ricardiana postula el efecto contrario al efecto multiplicador keynesiano. La introducción en el modelo de variables relativas a las medidas de política económica y el ahorro público tiene por objeto estimar la utilidad de estos instrumentos para la gestión del ciclo económico. Tiene interés sea respecto al conjunto del ahorro nacional como para el ahorro de algunos agentes en concreto, como los hogares.

La hipótesis de equivalencia ricardiana (Barro, 1974) postula la ineficacia de la política fiscal si los agentes privados descuentan políticas fiscales contractivas futuras que compensan esos efectos expansivos. Así, tanto el déficit como el ahorro público serían compensados con ahorro o desahorro privado, en cada caso. La mayoría de estudios empíricos rechazan la hipótesis aunque sí avalan parcialmente esta compensación entre ahorro público y privado (Loayza *et al.*, 2000a). Otros resultados (Roehn, 2010) estiman que ronda el 40% en términos medios en su muestra; con gran diferencia en función del origen del cambio en el presupuesto público. La compensación sería prácticamente nula respecto a la inversión pública; sería casi completa si procede de los ingresos públicos; y entre un 30 y un 50% si procede de cambios en los gastos públicos corrientes. Estas proporciones aumentan con el desarrollo de mercados financieros,

cuanto mayor es el volumen de deuda pública y cuando los agentes anticipan aumentos impositivos. La compensación no será completa, entre otras razones, porque parte de esos pasivos serán soportados por generaciones futuras.

Utilizaremos como medida del saldo presupuestario público la tasa de capacidad necesidad de financiación sobre el PIB trimestral nominal, ambas variables procedentes de la Contabilidad Nacional. La equivalencia ricardiana daría lugar a una relación inversa entre ahorro público y privado: más déficit público ha de suponer mayor ahorro privado. Si expresamos el déficit en positivo, el parámetro de la variable ha de mostrar este signo. Las pruebas de cointegración se ofrecen en el Anexo 1 y, aunque no definitivas, muestra orden de integración 1 por lo que se incluye en el modelo en forma de tasa (TSP) ajustada de variaciones estacionales.

2.8. La estructura de la población y la tasa de dependencia

La estructura de la población tiene especial importancia para determinar la tasa de ahorro en las primeras versiones de la TCVRP dado que la tasa de ahorro de los individuos varía con su edad. Así, poblaciones jóvenes (Yasin, 2008) o envejecidas (Braun *et al.*, 2009) se corresponderían con menores tasas de ahorro; la cuestión resulta difícil de contrastar con datos temporales dada la lenta variación de la estructura de la población de un país. Aunque los resultados con datos de sección cruzada confirman parcialmente estos resultados, en otros casos la evidencia no los respalda (Schultz, 2005).

Por otro lado, el aumento de la esperanza de vida aumentaría la tasa de ahorro (Belke *et al.*, 2012) que asocian con la extensión del período de jubilación y los motivos de solidaridad o herencia para con sus descendientes; estos, a su vez, podrían reducir su tasa de ahorro si contemplan la herencia. Particularmente, mejoras conjuntas de la esperanza de vida que generan mayor vida laboral tendrían escasos efectos sobre la tasa de ahorro (Bloom *et al.*, 2007), aunque las prestaciones de jubilación modificarían esta asunción: las tasas de ahorro aumentan en los países con sistemas de pensiones universales e incentivos a la jubilación anticipada, mientras que el efecto desaparece en países con sistemas alternativos (*pay as you go*).

La tasa de dependencia de la población podría recoger la incidencia sobre la tasa de ahorro de la estructura de la población: el aumento de la tasa de dependencia, sea infantil o retirada, tendría incidencia negativa sobre la tasa de ahorro. Siguiendo a Bérubé y Côté (2000), definimos la tasa de dependencia conjunta como el cociente entre la población cuya edad la hace potencialmente dependiente, entre 0 y 19 años y más de 65, y la población potencialmente activa por edad, entre 20 y 64 años.

Las pruebas de estacionariedad no son concluyentes: las pruebas indican que podría ser estacionaria con media y tendencia y otras muestran evidencias de ser integrada de orden 2. Comprobamos su inserción en el modelo en tasas y en primera diferencia de su logaritmo y contrastaremos su cointegración mediante las pruebas de los modelos.

2.9. Los sistemas de pensiones públicos

Existe abundante literatura sobre la incidencia de los planes de pensiones sobre el ahorro de los hogares (Belke *et al.*, 2012; Bloom *et al.*, 2007; Carroll y Summers, 1991; Karunaratne y Abeysinghe, 2005; Cuevas *et al.*, 1997; Samwick, 2000). En general³, apuntan que puede incentivar el retiro anticipado y aumentar el ahorro para mantener el consumo en bienes considerados mayor elasticidad renta como el ocio. En el mismo sentido opera la percepción de los contribuyentes que, en un sistema de reparto, esperan percibir, en términos financieros, prestaciones inferiores a su aportación: esta “pensión negativa” les induciría a incrementar su tasa de ahorro en sistemas de capitalización privados. En sentido contrario, los sistemas de reparto pueden reducir el ahorro precautorio que, en su defecto, cubrirían las contingencias derivadas de la mayor longevidad.

Los sistemas de reparto y capitalización son escasamente sustitutivos: los primeros suelen ser de carácter obligatorio y menos líquidos, no sirven como garantía ni como instrumento de ahorro precautorio, y la equivalencia financiera entre prestación y contraprestación genera incertidumbre. Los sistemas de capitalización, más flexibles, pueden generar mayor ahorro.

Aunque existen discrepancias respecto a la repercusión sobre el ahorro de los sistemas públicos de reparto, se aprecia cierto impacto negativo en el ahorro de los hogares en Europa (Alessie *et al.*, 2013). En los casos de impacto positivo, se aduce el efecto del retiro inducido ya comentado. En otros casos, no se aprecia impacto sugiriendo un efecto compensatorio entre la acumulación de riqueza en pensiones y privada (Boyle y Murray, 1979). En los países como Holanda, en los que, además de la pensión mínima obligatoria, se incorpora otra dependiente de las aportaciones realizadas, se observa el impacto negativo de esta última en los motivos de ahorro en la edad adulta (Euwals, 2000).

Aunque esperamos que la variable elegida tenga un efecto negativo sobre la tasa de ahorro, parece que su repercusión puede depender de las expectativas de los hogares respecto a la equivalencia financiera entre prestación y contraprestación. Si se estima que la cobertura de las prestaciones no será la misma en el futuro retiro del trabajador, éste podría aumentar su tasa de ahorro actual para cubrir eventuales disminuciones de su prestación futura.

³ Una revisión general puede realizarse en Feldstein y Liebman (2002)

Estimaremos el impacto parcial mediante un indicador de la proporción en que la pensión pública reemplaza o sustituye los ingresos previos a la jubilación (Bérubé y Côté, 2000; Carroll y Summers, 1987). La serie se construye mediante el ratio entre volumen de prestaciones recibidas por los mayores de 65 años respecto a la renta disponible —excluidas las prestaciones anteriores— *per capita* de la cohorte entre 15 y 64 años. Construimos también una serie similar a la anterior más amplia que recoge las prestaciones sociales totales, no solo la jubilación, como ratio de prestaciones sociales totales para los menores de edad y mayores de 65, y la renta disponible ajustada de estas prestaciones *per capita* de la cohorte entre 15 y 64 años.

Ambas series resultan integradas de orden 1 y se incorporan al modelo en forma de tasa ajustadas de variaciones estacionales. En el Anexo 1 se incluyen las pruebas de cointegración y en el Anexo 2, la procedencia de las series.

2.10. La inflación

El coste de trasladar renta y consumo en el tiempo depende del tipo de interés y la inflación. El ahorro tiende a aumentar, posponiendo el consumo, si los hogares anticipan caídas en el nivel de precios; si confunden tensiones inflacionarias con cambios en los precios relativos o si sobrevaloran la inflación futura (Deaton, 1977). Pueden incrementar su ahorro para mantener el valor real de su riqueza si la rentabilidad real de sus activos financieros se reduce. La inflación está relacionada con la incertidumbre sobre las rentas futuras y los hogares con mayor aversión al riesgo aumentan su ahorro precautorio (Loayza *et al.*, 2000b). Esperamos una relación inversa entre precios y tasa de ahorro

El ámbito temporal objeto de estudio se caracteriza por el control de los precios mantenidos en el intervalo (-1,6, 3,7). La inflación muestra una ligera tendencia decreciente que pudo ser anticipada por los hogares como consecuencia de la entrada en la Comunidad Europea en 1986 y en la Unión Monetaria en 1998. Si los hogares españoles hubieran acertado en sus expectativas inflacionarias decrecientes, habrían aumentado su tasa de ahorro presente accediendo a mayor consumo futuro, pero la escasa variación de la inflación puede mostrar limitada incidencia sobre la tasa de ahorro.

Esta posibilidad se refuerza ya que esterilizamos la mayoría de las variables: utilizamos algunas variables en tasas, otras en términos reales y otras ajustadas de inflación, como el interés. Con las variables expresadas en esos términos podríamos estar aislando el efecto de la variación de precios sobre la tasa de ahorro.

Para aproximar la incidencia de la variación de precios esperada sobre la tasa de ahorro, construimos un indicador de las expectativas de inflación a partir del índice de precios de

consumo. El indicador de precios se obtiene como la media centrada de ocho trimestres ponderando los datos en sentido exponencial decreciente. Las pruebas de cointegración confirman que es una serie integrada de orden 1. Finalmente mostró escasa significatividad como determinante a largo plazo de la tasa de ahorro y fue excluida del modelo.

3. Construcción del modelo de la tasa de ahorro y sus determinantes a largo plazo

Tras justificar la relación entre cada una de las variables y la tasa de ahorro de los hogares, construimos el modelo con las siguientes variables:

- TS: tasa de ahorro bruto de los hogares en relación a la renta disponible.
- DLRR: crecimiento –diferencia de logaritmo– de la renta laboral real en % adelantada un período.
- RISP: tasa de riqueza inmobiliaria sobre PIB.
- DES: tasa de desempleo procedente de la EPA.
- TC: tasa de crecimiento nominal de los pasivos netos contraídos.
- TDN: tasa de dependencia.
- TSP: tasa de ahorro del sector público (- superávit; + déficit).
- TCOP: tasa de reemplazo o cobertura de la pensión de jubilación respecto a la renta previa.
- TCPT: tasa que relaciona la renta procedente de las prestaciones sociales recibidas por cada sujeto con derecho y la renta disponible de los cotizantes –excluidas las prestaciones sociales–.
- IBR: tasa de interés o rentabilidad real esperada.
- DPE: variación de precios esperada.

Las variables que presentan variaciones estacionales –TS, DLRR, RISP, DES, TC, TSP, TCOP, TCPT, IBR– se ajustan mediante diferencias de medias móviles; TDN y DPE han sido obtenidas mediante medias ponderadas y no se ajustan a variaciones estacionales.

En la Tabla I del Anexo 1, se presentan los resultados de las pruebas de estacionariedad ADF, PP y KPSS a las series en niveles y diferencias; también hemos obtenido los test de

cointegración de Engle y Granger⁴ para cada par de variables. Dado que las variables en niveles son no estacionarias, los estimadores MCO no presentan eficiencia asintótica. Pero si las variables son integradas de orden 1, existe una relación a largo plazo entre las variables implicadas. El teorema de representación de Engle y Granger (1987) establece que, si las variables están cointegradas, participan de una relación dinámica a largo plazo, nos permite obtener una perspectiva dinámica del comportamiento conjunto y cómo participan en la transición a ese equilibrio de largo plazo.

La tasa de dependencia, ahorro de hogares y público, y crecimiento de la renta presentan discrepancias en su orden de integración. El resto de las variables resultan integradas de orden uno, aunque en algunos casos los resultados obtenidos no son concluyentes: existe disparidad entre los resultados ADF, PP y KPSS. Las mayores discrepancias se dan especialmente en la tasa de ahorro, crecimiento de la renta laboral y tasa de ahorro público que podrían ser estacionarias con deriva y, por tanto $I(0)$. La tasa de dependencia podría ser estacionaria atendiendo al test PP o integrada de orden 2 como resulta de la prueba ADF.

Como se puede observar en el Gráfico 5 del Anexo 1, la tasa de dependencia en España disminuye de forma decreciente hasta 2008 para iniciar un ligero crecimiento con similar ritmo, por lo cual muestra dos tendencias. En primera diferencia, muestra un ritmo bastante estable como corresponde a los fenómenos demográficos dando muestras de posible estacionariedad con constante y tendencia. Consideramos que la relación de cointegración con el conjunto de variables del modelo es conceptualmente más apropiada en tasas. Las tentativas, incluyendo la variable en diferencias, no mostraron mejores resultados en las pruebas de cointegración, mostrando peores resultados en el test Hansen (Phillips y Hansen, 1990) de estabilidad de parámetros.

Formulamos inicialmente la hipótesis de que las variables cointegran –son integradas de orden 1– estacionarias en torno a una media y contrastaremos la hipótesis mediante las pruebas de cointegración sobre los residuos de los modelos. Si las pruebas realizadas a los residuos de los modelos resultan satisfactorias y son estacionarios (Guisán, 2002), las estimaciones de los parámetros son superconsistentes y podríamos confirmar la validez de los modelos en los límites del marco metodológico del modelo de corrección de error.

Dado que planteamos una única ecuación, hay una única variable endógena, la tasa de ahorro, que viene determinada por las variables regresores. Si los regresores no son exógenos respecto al regresando, como puede suceder respecto a la relación entre interés y tasa de ahorro, por ejemplo, los estimadores MCO no son asintóticamente eficientes. En el marco general del

⁴ Como pruebas intermedias, estos resultados no se reportan.

modelo de corrección de error (ECM), compararemos la estimación procedente del modelo de Engle y Granger (1987), el modelo ECM, el modelo MCO dinámico (DOLS) de Stock y Watson (1993) y la estimación completamente modificada (FMOLS) de Phillips y Hansen (1990). Estos procedimientos corrigen el sesgo derivado de la endogeneidad de los regresores y presentan mejores propiedades que la estimación ECM. Aplicamos los cuatro distintos procedimientos y seguimos una metodología de lo general a lo particular (Hendry y Richard, 1982) para cada ecuación, excluyendo aquellas variables incoherentes en los signos y/o escasamente significativas. Finalmente, aplicamos los contrastes de cointegración para cada ecuación de largo plazo.

La evolución en el modelo se muestra en la Tabla II del Anexo 1. Revisamos las pruebas de cointegración mediante el modelo DOLS con cuatro rezagos y adelantos a las distintas ecuaciones con diferentes variables y estudiamos la idoneidad de los signos, los test ADF, PP y EG⁵ de los residuos generados en cada caso y la coherencia con los signos obtenidos mediante la estimación FMOLS. La especificación inicial permite rechazar la hipótesis nula de raíz unitaria –son estacionarios– de las pruebas ADF y PP de los residuos. Los resultados de los tests de cointegración de Phillips Outlaris (PO) permiten rechazar la hipótesis nula de no cointegración; pero no permiten rechazar la hipótesis nula de no cointegración del test de Engle-Granger. Mostramos destacadas en la Tabla II del Anexo 1 los resultados incoherentes: el desempleo, el crédito, la tasa de dependencia, la tasa de cobertura de la jubilación y la inflación esperada muestran signos contrarios a los teóricos esperados.

La **primera** especificación tras la inicial es consecuencia de la exclusión de la tasa de ahorro público. Mantenemos las dos versiones de las prestaciones públicas atendiendo a la posibilidad de que la cobertura de las prestaciones mantenga relación inversa y la variable que refleja el esfuerzo mostrara una relación directa; ambas resultaron de signo negativo. Aunque los test indican cointegración de la tasa de ahorro público, para ninguna de las especificaciones tentativas que la incluían, los resultados validaron el modelo. Su exclusión mejora la coherencia de los signos. El crecimiento de la renta laboral, *proxy* de la renta permanente, presenta relación directa con la tasa de ahorro, resultado no esperado pero que mantenemos en el límite de lo posible. Los test de los residuos permiten validar el modelo, pero el test EG en dos pasos y con 4 rezagos no permite rechazar la hipótesis nula de no cointegración.

En la **segunda** especificación, excluimos la tasa de cobertura de las prestaciones de jubilación por redundante y por mostrarse menos significativa que su alternativa relativa a las

⁵ Realizamos el test τ -Engle-Granger (Engle y Granger, 1987) en dos pasos para contrastar la presencia de raíces unitarias en los residuos de la regresión.

prestaciones totales. Ahora todas las variables presentan el signo adecuado aunque algunas variables –interés y renta– son poco significativas. Las pruebas de los residuos son adecuadas El test EG de cointegración no permite rechazar la hipótesis de no cointegración al 5% ($p=0,068$). En el contraste mediante la metodología FMOLS, la variable precios cambia de signo, lo cual indica que los parámetros son poco robustos.

La **tercera** especificación excluye DPE y muestra signos correctos, aunque riqueza e interés presentan escasa significatividad. Como ya comentamos, la relativa estabilidad de precios durante el período de estudio y la especificación del resto de variables en tasas o en términos reales podría reducir la relevancia de los precios sobre la tasa de ahorro. Además de la expectativa de precios, comprobamos otras series transformadas que resultaron escasamente significativas y sus resultados no se reportan. Las pruebas a los residuales permiten rechazar la presencia de raíz unitaria y el estadístico EG permite rechazar la hipótesis nula de ausencia de cointegración.

Mostramos, en la **cuarta** especificación, el modelo FMOLS de contraste: como el anterior, las variables presentan el signo correcto y son significativas. Los resultados de los test sobre los residuos son adecuados, pero el test Hansen de estabilidad de los parámetros permite rechazar la hipótesis nula de cointegración. Excluimos el tipo de interés y obtenemos mejores resultados: hemos incorporado tentativamente otras variables que permitan recoger la incidencia de interés y precios sobre la tasa de ahorro. La serie de intereses nominales y reales, activos y pasivos tampoco resultó significativa. Podría ser que la variable tasa de préstamo recoja esta incidencia de forma parcial: como se puede observar en el Gráfico 6 del Anexo I, las variables muestran relación inversa y gran correlación.

3.1. Especificaciones diferentes del modelo de la tasa de ahorro

La ecuación final de los determinantes de la tasa de ahorro a largo plazo corresponde a:

$$TS_t = \beta X_T + v_T \quad (1)$$

$$TS_t = \beta_1 DLRR_t + \beta_2 RISP_t + \beta_3 DES_t + \beta_4 TC_t + \beta_5 TDN_t + \beta_6 TCPT_t + v_T$$

Comprobamos la estabilidad de los parámetros mediante la obtención de los cuatro modelos comentados (EG, DOLS, FMOLS y ECM). Los resultados se muestran en la Tabla III del Anexo 1. La especificación EG se obtiene mediante regresión MCO (OLS) incluyendo algunos rezagos (2, 4, 1, 1, 2, 0, respectivamente) en las variables para reducir la autocorrelación. La especificación ECM se obtiene a partir de un modelo VAR con 6 rezagos bien comportado⁶ en

⁶ Las pruebas de validación de estos modelos no se reportan y están a disposición a solicitud del interesado.

el que el test de cointegración de Johansen (1992) muestra una ecuación de cointegración con constante y sin tendencia, que se muestra en la especificación ECM(VAR6) de la Tabla III del Anexo 1.

Los parámetros de cada variable son similares en todas las especificaciones: presentan el signo correcto y son significativas a excepción de la variable riqueza en el modelo ECM. Los recorridos de los parámetros están en un rango entre 0,4 y 0,8 en las variables desempleo y dependencia, e incluso menor en el caso de las prestaciones. La tasa de crédito presenta mayor variabilidad (entre 0,3 y 1,5) y el rango es similar para la tasa de dependencia. La riqueza presenta unos parámetros muy similares excepto el que procede de la formulación ECM, al igual que en el caso de la renta laboral. Los resultados procedentes de la especificación ECM están sujetos a revisión.

Las pruebas ADF, PP y EG de estacionariedad de los residuos permiten rechazar la hipótesis nula de no cointegración en todos los modelos, excepto en la especificación EG que no permite rechazar la hipótesis nula de no cointegración; en la procedente de FMOLS, el test Hansen de estabilidad de parámetros permite rechazar la hipótesis nula de cointegración al 5%, pero no al 1%. Aunque presentamos evidencias de cointegración de las variables del modelo, contrastaremos los resultados, siguiendo a Bérubé y Côté (2000), comprobando la cointegración de las variables en las cuatro especificaciones bajo el marco metodológico del mecanismo de corrección de error (ECM).

3.2. Resultados de cointegración en el marco ECM

El modelo de corrección de error propone, bajo la hipótesis de cointegración de las variables, la estimación de un modelo con dos componentes: el componente a largo plazo, expresado en (1), corresponde a la estimación de la tasa de ahorro en función de los determinantes de las especificaciones anteriores.

El componente de corto plazo se construye a partir de un vector autorregresivo (VAR) de las variables de largo plazo en diferencias para un conjunto de rezagos. La idea que subyace en el modelo consiste en que el término de error del componente de largo plazo es significativo para explicar las variaciones –diferencias– de la tasa de ahorro y que las desviaciones respecto a su tendencia común –mostradas mediante el término de error de la ecuación de largo plazo– se corrigen en cada período en la proporción que indica el término de corrección del error (γ). El modelo viene expresado como:

$$V(L)\Delta TS = D(L)\Delta X_t + \gamma[TS_{t-1} - \beta LR_{t-1}] + v_t \quad (2)$$

siendo $V(L)$ el vector autorregresivo de L rezagos y $D(L)$ el operador de rezagos. Si las variables cointegran –cuestión hipotética pero de la que tenemos indicios–, las primeras diferencias del vector de determinantes (ΔX_t) son integradas de orden cero y no inciden de forma permanente sobre la tasa de ahorro. En ese caso, podemos contrastar, como hipótesis de cointegración, la existencia de ese mecanismo de corrección de error ($\gamma < 0$) contra la hipótesis alternativa ($\gamma = 0$).

Obtenemos los coeficientes de corrección de error en dos etapas. En la primera, obtenemos el coeficiente de corrección de error de cada uno de los cuatro modelos que corresponde a los residuos. En la segunda, estimamos el parámetro γ mediante el VAR en el marco ECM introduciendo los residuos rezagados. En el caso particular del modelo ECM, introducimos la ecuación de largo plazo de forma simultánea a la obtención del coeficiente de corrección mediante mínimos cuadrados no lineales en el marco ECM.

Los resultados se muestran en la Tabla IV del Anexo 1; donde, tras las cuatro especificaciones de la tasa de ahorro en función de sus determinantes a largo plazo, se ofrece el término (γ) de corrección de error y su significatividad. En todos los casos, el parámetro es significativo y menor que uno. El rango de resultados va de 0,61 en el modelo EG a 0,17 en ECM, alcanzando 0,57 en FMOLS y 0,43 en DOLS. El recorrido es relativamente importante, pero lo es menos si excluimos la especificación ECM sometida a revisión.

Los test de estacionariedad aplicados a los residuos de cada modelo permiten rechazar la hipótesis nula de presencia de raíces unitarias (ADF y PP). Los test EG τ y z permiten rechazar la hipótesis nula de no cointegración y los test H permiten aceptar la hipótesis nula de cointegración mediante la estabilidad de los parámetros. Igualmente, los test PO τ y z permiten rechazar la hipótesis nula de no cointegración. En conjunto, podemos confirmar que los residuos del modelo ECM de las 4 especificaciones son estacionarios y las variables cointegran.

A modo de recapitulación, hemos estudiado el orden de integración de la tasa de ahorro y sus determinantes a largo plazo. Aunque hay disparidad en algunos casos, la mayoría de las variables se muestran integradas de orden 1 y planteamos, como hipótesis a contrastar, la cointegración de las variables mediante el análisis de los residuos en cuatro especificaciones. Los resultados en términos de signo y significatividad de los parámetros son adecuados. Aunque hay diferencias entre los parámetros de cada modelo, especialmente en ECM, el resto están en un intervalo estrecho que los permite considerar como robustos.

Los resultados de los test de estacionariedad de los residuos de cada una de las especificaciones indican que las variables cointegran. Planteamos, siguiendo a Bérubé y Côté (2000), un nuevo contraste de cointegración a los residuos obtenidos en un modelo de corrección de error insertando las especificaciones a largo plazo obtenidas anteriormente. Los coeficientes de

corrección de error estimados presentan el signo correcto y son estadísticamente significativos. Las pruebas de estacionariedad de los residuos permiten confirmar la cointegración de las variables. Bajo la hipótesis de cointegración de las variables, los parámetros estimados presentan propiedades estadísticas adecuadas.

Podemos concluir que la tasa de ahorro de los hogares viene determinada en el largo plazo por la interacción y variaciones de la variación en la renta laboral en términos reales como *proxy* de la renta permanente, la tasa de riqueza inmobiliaria de los hogares como *proxy* de la riqueza total, el desempleo que intenta reflejar el ahorro precautorio, la tasa de crédito que refleja la restricción de liquidez, la tasa de dependencia que representa la estructura demográfica, y la tasa de prestaciones totales sobre la renta de la población potencialmente activa. Han quedado excluidas del modelo la tasa de ahorro público, el interés real y la variación de precios. No porque no tengan incidencia sobre la tasa de ahorro, sino porque no hemos podido confirmar su cointegración o su aportación no ha resultado significativa.

3.3. Interpretación de los resultados del modelo a largo plazo y contribución de los determinantes de la tasa de ahorro

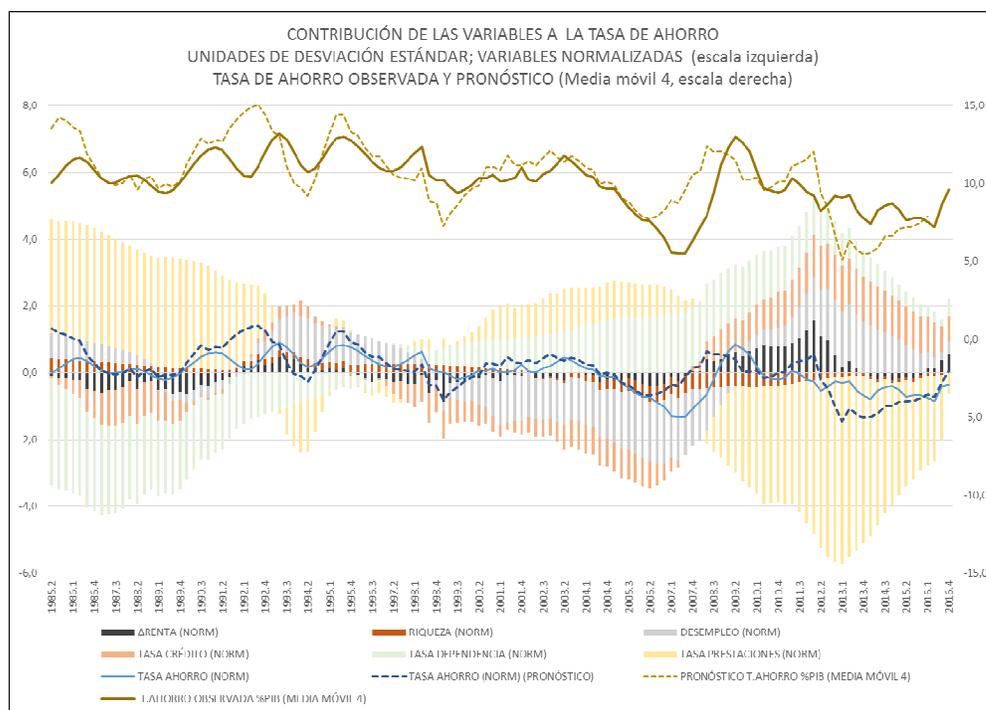
Confirmada la hipótesis de cointegración, obtenemos el pronóstico de la tasa de ahorro a largo plazo según la especificación DOLS y estandarizamos las variables con el objeto de estudiar la contribución de sus determinantes. El Gráfico 3 muestra la tasa de ahorro en tendencia mediante medias móviles de orden cuatro y la tasa de ahorro estimada, ambas referenciadas en el eje derecho y en la parte superior de gráfico; en la parte inferior, respecto al eje izquierdo, aparecen las variables normalizadas. Podemos apreciar que la tasa de ahorro muestra variaciones en torno a un valor medio del 10% en el período de estudio y parece mostrar desviaciones respecto a su media más que un cambio en su tendencia.

Los determinantes estructurales a largo plazo de la tasa de ahorro, en atención a su magnitud de incidencia, serían: prestaciones sociales, tasa de dependencia, desempleo y crédito; en menor medida, renta permanente y riqueza. En el Gráfico 5 del Anexo 1, se muestra su incidencia con las variables normalizadas. En primer lugar, revisamos la contribución de cada variable a la tasa de ahorro y seguidamente proponemos la interpretación del modelo desde 2004 en las etapas en las que muestra mayores desviaciones respecto a su media.

La incidencia de las **prestaciones sociales** sobre la tasa de ahorro cambia de sentido en cuatro intervalos. El bajo nivel relativo de las prestaciones sociales a mediados de la década de 1980 presenta gran incidencia presionando al alza la tasa de ahorro. El aumento del desempleo en la crisis de la década de 1990 y el aumento de las prestaciones derivadas tienden a reducir la tasa

de ahorro. El componente vuelve a ser positivo tras la superación de la crisis, originado por el estancamiento de las prestaciones sociales a medida que se reduce la tasa de dependencia. A partir de la crisis de 2008, el aumento del desempleo y la tasa de dependencia hacen aumentar fuertemente las prestaciones sociales que se convierten de nuevo en un componente que lastra la tasa de ahorro.

Gráfico 3. Contribución de los determinantes a largo plazo de la tasa de ahorro



Fuente: series de las variables normalizadas

La incidencia de la tasa de dependencia sobre la tasa de ahorro es de gran magnitud y cambia de sentido en 1997: en el primer intervalo, su aportación es negativa y decreciente; y desde 1997 positiva, creciente hasta 2008, para diluirse después. Podemos apreciar la trascendencia sobre la tasa de ahorro de la reducción continuada de la tasa de dependencia que, desde mediados de la década de 1980, presiona a la baja y, desde finales de la década de 1990, se convierte en impulsor de la tasa de ahorro con magnitud decreciente. El mínimo valor de la tasa de ahorro en 2008 y su crecimiento desde entonces va reduciendo su aportación.

El **desempleo** también muestra relación directa y gran incidencia sobre la tasa de ahorro cambiando de signo su aportación en cuatro intervalos relacionados con el ciclo económico: es especialmente importante en la crisis de la década de 1990, fomentando el ahorro; se torna negativo desde 1998 hasta 2009, apoyando la reducción de la tasa de ahorro. En el último intervalo desde 2009, apoya en gran medida el crecimiento reactivo del ahorro.

La **tasa de crédito** muestra cuatro intervalos relacionados con el ciclo: el crecimiento del crédito tiene a reducir el ahorro en la etapa de expansión de la década de 1980; y a aumentarlo durante la recesión de principios de la década de 1990, que coincide con cierta restricción del crédito. La fuerte expansión del crédito de 1994 a 2007 tiende a reducirlo, y desde 2007 se convierte en un fuerte componente al alza de la tasa de ahorro de forma continua hasta la actualidad.

La **renta laboral** –variación de la renta permanente– presenta menor incidencia y parece recoger cambios en las expectativas respecto a la renta permanente siguiendo el ciclo. En las etapas de crecimiento –finales de la década de 1980 y desde 1995 a 2008–, reduce la tasa de ahorro; apoya su crecimiento –crisis de principios de la década de 1990 y desde 2008–. Su incidencia muestra un máximo relativo en 2010 que confirma el retraso en su ajuste (Sastre y Fernández-Sánchez, 2011a) y un máximo absoluto en 2012 para iniciar un rápido declive.

La **riqueza** se muestra como un componente de menor importancia en la evolución de la tasa de ahorro a largo plazo. Su relación con el ahorro es inversa pero no presenta gran incidencia excepto deprimiendo el ahorro desde 2004 hasta 2012.

Presenta cierto interés la interpretación de la reducción de la tasa de ahorro desde 2004 y sí puede suponer un cambio en la tendencia de la tasa de ahorro. La reducción de la tasa de ahorro desde 2004 viene originada por la incidencia conjunta del crédito, la riqueza y la caída del desempleo, que superan la incidencia positiva de la tasa de dependencia –con incidencia creciente–, y la reducción de las prestaciones, decreciente. Dado que, excepto la tasa de dependencia, que presiona al alza, las demás variables cambian con el ciclo, no se percibe un cambio de tendencia en esta variación.

La tasa de ahorro experimenta un crecimiento reactivo a finales de 2007, alcanzando un máximo en 2009 para caer de nuevo fuertemente en 2010. El modelo anticipa esta sobre-reacción al alza desde 2006, originada por la actuación conjunta de la tasa de dependencia que desde 1997.1 (67,3% de dependientes respecto a la población en edad de trabajar) incide positivamente sobre el ahorro: presenta un máximo en 2007, inicia un lento declive y va disminuyendo su aportación positiva. El modelo formula que tasas de dependencia inferiores al 67,3% inciden positivamente sobre el ahorro. Al ritmo actual, volveremos a alcanzar esa tasa de dependencia en 2021 e incidirá negativamente sobre la tasa de ahorro.

La tasa de prestaciones, en aumento, alimenta la tasa de ahorro que se acumula a la aportación creciente de la tasa de dependencia y por la contracción del crédito ya en 2006. El desempleo reduce su aportación negativa desde 2007 y, desde finales de 2008, incide positivamente. La riqueza incide de forma escasa, lenta y continua desde 2006 hasta 2014. La

renta actúa con cierto retraso, pero de forma creciente apoyando el aumento en la tasa de ahorro desde el momento en que inician su declive en 2007, presentando un máximo en 2012 con el mayor deterioro de las rentas laborales. En general, la evolución de las variables no apoya el cambio de tendencia de la tasa de ahorro, ya que la tasa de dependencia, componente acíclico, va reduciendo su aportación al crecimiento de la tasa de ahorro.

El declive viene explicado por el fuerte aumento en la tasa de prestaciones, que se acumula y es consecuencia también del aumento en la tasa de dependencia, que reduce su aportación positiva. Desde 2012, apoya fuertemente esta caída el cambio de perspectivas sobre la renta laboral –permanente–. El crédito –restringido– mantiene su aportación positiva de forma constante, pero la aportación del desempleo y la tasa de dependencia se van reduciendo, al igual que la aportación negativa de las prestaciones sociales. Aunque se producen repuntes locales, en general, la tasa de ahorro se va reduciendo –más exageradamente según el modelo, más parsimoniosamente la tasa observada–. En la reducción, ya por debajo de la tendencia a largo plazo, tiene importancia el aumento de la tasa de dependencia y la disminución del desempleo; la reducción de las prestaciones colabora en reduciendo su aportación negativa. La perspectiva a medio plazo, si se mantiene la coyuntura alcista del ciclo, es la reducción paulatina de la tasa de ahorro dirigida por el aumento de la tasa de dependencia.

Si retomamos las hipótesis planteadas, podemos confirmar la capacidad explicativa del modelo en función de sus determinantes. La reducción de la tasa de ahorro desde 2004 no supone un cambio de tendencia dada la reversibilidad de la incidencia de la tasa de dependencia. En esa etapa mejoran las expectativas sobre la renta permanente, crece la riqueza y se reduce el ahorro precautorio con la mejora del empleo y el crédito.

El cambio de ciclo en 2008 modifica la evolución de la tasa de ahorro, que crece apoyada por el cambio de expectativas respecto a la renta permanente; la tasa de dependencia; el desempleo; y la contracción continuada del crédito. Únicamente la existencia de prestaciones presiona para reducir la tasa de ahorro. La aportación decreciente de la tasa de dependencia no supondría el mantenimiento de esas tasas elevadas de ahorro. Al contrario, el aumento de la tasa de dependencia, la reducción del desempleo y la reducción de las prestaciones irán reduciendo la tasa de ahorro mientras se mantenga el ciclo.

Como comentamos, a partir de 2021, la aportación de la tasa de dependencia será negativa y habrá más condicionantes para que la tasa de ahorro se reduzca. Si las restricciones de liquidez se reducen supondrán menor presión a la baja de la tasa de ahorro.

4. Resumen y conclusiones

Estudiamos la evolución de la tasa de ahorro de los hogares españoles y sus determinantes a largo plazo durante el período 1985 a 2016. Revisamos la literatura bajo el marco teórico de la teoría del ciclo vital y renta permanente: las variables que la literatura recoge como determinantes a largo plazo del ahorro son la renta permanente, la riqueza, el desempleo (que elegimos como *proxy* del ahorro precautorio), la tasa de crédito (que recoge la restricción de liquidez), la tasa de ahorro público, la tasa de dependencia, la tasa de cobertura de las prestaciones de jubilación o las prestaciones sociales en general, los tipos de interés y el crecimiento de los precios.

Las pruebas de cointegración de las variables no son concluyentes: la tasa de ahorro y la de dependencia podrían no ser integradas de orden uno y el sistema no sería cointegrable. Planteamos cuatro especificaciones de la tasa de ahorro en función de sus determinantes y estudiamos los residuos de los modelos que resultan estacionarios.

Como prueba complementaria, siguiendo a Bérubé y Côté (2000), planteamos la posibilidad de demostrar la cointegración de las variables en el marco del modelo de corrección de error. A partir del término de error de las cuatro especificaciones, construimos un modelo de corrección de error (ECM) y contrastamos la significatividad del coeficiente corrector del error. Los resultados de los test de los residuos de las cuatro especificaciones son positivos, por lo que podemos confirmar la cointegración de las variables y/o la consistencia de los parámetros estimados.

El modelo de largo plazo (DOLS) nos permite estudiar la evolución de la tasa de ahorro y sus determinantes. Estandarizamos las variables del modelo y estudiamos su contribución a largo plazo a la tasa de ahorro.

Comentamos la repercusión de cada variable sobre la tasa de ahorro, los intervalos que recogen su aportación positiva y negativa y reflejamos la explicación dada por el modelo en las etapas en las que la tasa de ahorro se desvía de su tendencia. Atendemos especialmente a la reducción de la tasa de ahorro a partir de 2004, la sobre-reacción al alza en 2008 y a la baja en 2010. En general, consideramos que las variaciones en la tasa de ahorro durante el período de estudio se explican mejor como desviaciones de su tendencia en respuesta a la variación de sus determinantes que como cambios en su tendencia.

Podemos confirmar las hipótesis planteadas al inicio de la investigación respecto a la incidencia de los determinantes en el declive del ahorro entre 2004 y 2008, la composición que explica el alza al inicio de la crisis y su declive nuevamente en 2010. La incidencia de las variables renta y riqueza, desempleo y crédito es muy dependiente del ciclo económico y, a no ser que haya cambios estructurales en esas variables, su aportación no supondría cambios en la

tendencia de la tasa de ahorro. Las variables tasa de dependencia y tasa de prestaciones tienen otra incidencia. La tasa de dependencia muestra que reduce la tasa de ahorro si es mayor al 67,3% de dependientes respecto a los potencialmente activos y muestra cierta correlación con la tasa de prestaciones, relacionada con la anterior y con el ciclo económico.

La evolución en esta etapa expansiva del ciclo parece mantener ese declive de la tasa de ahorro apoyada por la incidencia decreciente del aumento de la tasa de dependencia. El aumento del crédito y la evolución de la renta permanente, riqueza y empleo apoyan el declive de la tasa de ahorro. El adecuado funcionamiento de las prestaciones sociales puede sostener al alza en la tasa de ahorro.

Una situación potencialmente crítica sería una etapa expansiva del ciclo, con una tasa de dependencia superior al 67,3%, que tendrá lugar eventualmente en 2021, en la que las perspectivas de crecimiento de la renta permanente y la riqueza, el bajo desempleo y escasa restricción del crédito, unidas al aumento de la cobertura de las prestaciones públicas, redujeran la tasa de ahorro de los hogares. El aumento de la tasa de dependencia de forma sostenida sí podría suponer un cambio en la tendencia de la tasa de ahorro de los hogares.

El volumen de prestaciones sociales, su financiación, y su relación con el ahorro público sugiere que nuestro modelo debería ampliarse para contemplar esta limitación, cuestión que abordaremos en futuras líneas de investigación.

Referencias

- Abowd, J.M. & Card, D. (1989): "On the Covariance Structure of Earnings and Hours Changes". *Econometrica*, 57(2), 411–445.
- Alessie, R.; Angelini, V. & van Santen, P. (2013): "Pension wealth and household savings in Europe: Evidence from SHARELIFE". *European Economic Review*, 63, 308–328.
- Ando, A. & Modigliani, F. (1963): "The 'life cycle' hypothesis of saving: Aggregate implications and tests". *The American Economic Review*, 53(1), 55–84.
- Argandoña, A. (1994): "Factores determinantes del ahorro". *Documento de Investigación N° 276*. Barcelona: División de Investigación IESE, Universidad de Navarra. Recuperado de <http://www.iese.edu/research/pdfs/DI-0276.pdf>.
- Athukorala, P. & Sen, K. (2004): "The Determinants of Private Saving in India". *World Development*, 32(3), 491–503.
- Attanasio, O.P. & Brown, M. (1994): "Testing the life cycle model of consumption: What can we learn from micro and macro data?". *Investigaciones Economicas*, 18(3), 433–463.

- Attanasio, O.P. & Weber, G. (2010): "Consumption and Saving: Models of Intertemporal Allocation and Their Implications for Public Policy". *Journal of Economic Literature*, 48(3), 693–751.
- Bacchetta, P. & Gerlach, S. (1997): "Consumption and credit constraints: International evidence". *Journal of Monetary Economics*, 40(2), 207–238.
- Barceló, C. & Villanueva, E. (2010): "The response of household wealth to the risk of losing the job: Evidence from differences in firing costs". *Banco de España Working Papers*, 1002. Recuperado de <https://www.bde.es/f/webbde/SES/Secciones/Publicaciones/PublicacionesSeriadas/DocumentosTrabajo/10/Fic/dt1002e.pdf>.
- Barceló, C. & Villanueva, E. (2016): "The response of household wealth to the risk of job loss: Evidence from differences in severance payments". *Labour Economics*, 39, 35–54.
- Barro, R. (1974): "Are government bonds net wealth?". *The Journal of Political Economy*, 82(6), 1095–1117.
- Belke, A.; Dreger, C. & Ochmann, R. (2012): "Do Wealthier Households Save More? The Impact of the Demographic Factor". *IZA Discussion Paper Series*, 6567. Recuperado de <http://ftp.iza.org/dp6567.pdf>.
- Bérubé, G. & Côté, D. (2000): "Long-term determinants of the personal savings rate: literature review and some empirical results for Canada". *Bank of Canada Working Papers*, 2000-3. Recuperado de <http://www.bankofcanada.ca/wp-content/uploads/2010/01/wp00-3.pdf>.
- Bloom, D.E.; Canning, D.; Mansfield, R.K. & Moore, M. (2007): "Demographic change, social security systems, and savings". *Journal of Monetary Economics*, 54(1), 92–114.
- Boyle, P. & Murray, J. (1979): "Social security wealth and private saving in Canada". *The Canadian Journal of Economics*, 12(3), 456–468.
- Braun, R.A.; Ikeda, D. & Joines, D.H. (2009): "The Saving Rate in Japan: Why It Has Fallen and Why It Will Remain Low". *International Economic Review*, 50(1), 291–321.
- Bunn, P. & Rostom, M. (2014): "Household debt and spending". *Bank of England Quarterly Bulletin*, 54(3), 304–315.
- Browning, M. & Lusardi, A. (1994): "Household Saving: Micro Theories and Micro Facts". *Journal of Economic Literature*, 34(4), 1797–1855.
- Campbell, J. & Mankiw, N. (1989): "Consumption, income and interest rates: Reinterpreting the time series evidence". En O.J. Blanchard & S. Fischer (eds.): *NBER Macroeconomics*

- Annual 1989, Volume 4*. Cambridge: MIT Press, pp. 185–246.
- Carballo-Cruz, F. (2011): "Causes and consequences of the Spanish economic crisis: Why the recovery is taken so long?". *Panaeconomicus*, 58(3), 309–328.
- Carlson, J.A. & Parkin, M. (1975): "Inflation Expectation". *Economica*, 42(166), 123–138.
- Carroll, C. (1997): "Buffer-Stock Saving and the Life-Cycle/Permanent Income Hypothesis". *Quarterly Journal of Economics*, 112(1), 1–55.
- Carroll, C. & Dunn, W. (1997): "Unemployment expectations, jumping (S,s) triggers, and household balance sheets". En B.S. Bernanke & J.J. Rotemberg (eds.): *NBER Macroeconomics Annual 1997, Volume 12*. Cambridge: MIT Press, pp. 165–229.
- Carroll, C.; Dynan, K. & Krane, S. (2003): "Unemployment risk and precautionary wealth: Evidence from households' balance sheets". *The Review of Economics and Statistics*, 85(3), 586–604.
- Carroll, C. & Summers, L. (1987): "Why have private savings rates in the United States and Canada diverged?". *Journal of Monetary Economics*, 20(2), 249–279.
- Carroll, C. & Summers, L. (1991): "Consumption growth parallels income growth: Some new evidence". En B.D. Bernheim & J.B. Shoven (eds.): *National Saving and Economic Performance*. Chicago: University of Chicago Press, pp. 305–308.
- Case, K.E.; Quigley, J.M. & Shiller, R.J. (2005): "Comparing Wealth Effects: The Stock Market versus the Housing Market". *The B.E. Journal of Macroeconomics*, 5(1), 34 pp.
- Conefrey, T. & Fitz Gerald, J. (2010): "Managing Housing Bubbles in Regional Economies under EMU: Ireland and Spain". *National Institute Economic Review*, 211(1), 91–108.
- Coricelli, F. & Roland, I. (2011): "How do credit conditions shape economic recoveries?". *CEPR Discussion Papers*, 8325. Recuperado de http://cepr.org/active/publications/discussion_papers/dp.php?dpno=8325.
- Deaton, A. (1977): "Involuntary saving through unanticipated inflation". *The American Economic Review*, 67(5), 899–910.
- Deaton, A. (1987): "Life-Cycle Models of Consumption: Is the Evidence Consistent with the Theory?". Em T.F. Bewley (ed.): *Advances in Econometrics Fifth World Congress, Volume II*. New York: Cambridge University Press, pp. 121–148.
- Dynan, K.E. & Maki, D.M. (2001): "Does stock market wealth matter for consumption?". *Board of Governors FEDS Discussion Papers*, 2001-23.
- Dynan, K.E.; Skinner, J. & Zeldes, S.P. (2004): "Do the Rich Save More?". *Journal of Political*

- Economy*, 112(2), 397–444.
- Engle, R.F. & Granger, C.W.J. (1987): "Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing". *Econometrica*, 55(2): 251–276.
- Estrada, A.; Garrote, D.; Valdeolivas, E. & Vallés, J. (2014): "Household Debt and Uncertainty: Private Consumption after the Great Recession". *Banco de España Working Papers*, 1415, 33 pp.
- Euwals, R. (2000): "Do Mandatory Pensions decrease Household Savings? Evidence for the Netherlands". *De Economist*, 148(5), 643–670.
- Feldstein, M. & Liebman, J.B. (2002): "Social security". En K.J. Arrow & M.D. Intriligator (eds.): *Handbook of Public Economics, Volume 4*. Amsterdam: Elsevier, pp. 2245–2324.
- Flavin, M.A. (1981): "The Adjustment of Consumption to Changing Expectations About Future Income". *Journal of Political Economy*, 89(5), 974–1009.
- Friedman, M. (1957): *A theory of the consumption function: A study by the National Bureau of Economic Research*. Princeton: Princeton University Press.
- Granger, C.W. (1981): "Some properties of time series data and their use in econometric model specification". *Journal of Econometrics*, 16(1), 121–130.
- Guisán, M.C. (2002): "Causalidad y cointegración en modelos econométricos: Aplicaciones a los países de la OCDE y limitaciones de los tests de cointegración". *University of Santiago de Compostela Working Paper Series Economic Development*, 61. Recuperado de <http://www.usc.es/economet/aceadepdf/aceade61.pdf>.
- Gual, J. (2009): "El carácter procíclico del sistema financiero". *Estabilidad Financiera*, 16, 21–40.
- Hall, R.E. & Mishkin, F.S. (1982): "The Sensitivity of Consumption to Transitory Income: Estimates from Panel Data on Households". *Econometrica*, 50(2), 461–482.
- Hernando, I. & Villanueva, E. (2014): "The recent slowdown in bank lending in Spain: Are supply-side factors relevant?". *Journal of the Spanish Economic Association*, 5(2), 245–285.
- Hendry, D.F. & Richard, J.-F. (1982): "On the formulation of empirical models in dynamic econometrics". *Journal of Econometrics*, 20(1), 3–33.
- Horioka, C.Y. (1991): "The determinants of Japan's saving rate: The impact of the age structure of the population and other factors". *The Economic Studies Quarterly*, 42(3), 237–253.
- Horioka, C.Y. & Watanabe, W. (1997): "Why do people save? A micro-analysis of motives for household saving in Japan". *The Economic Journal*, 107(442), 537–552.

- Hurst, E.; Kennickell, A.; Lusardi, A. & Torralba, F. (2005): "Precautionary savings and the importance of business owners". *NBER Working Papers*, w11731. Recuperado de <http://www.nber.org/papers/w11731.pdf>.
- Johansen, S. (1992): "Determination of cointegration rank in the presence of a linear trend". *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 54(3), 383–397.
- Jordà, O.; Schularick, M. & Taylor, A.M. (2013): "When Credit Bites Back". *Journal of Money, Credit and Banking*, 45(2), 3–28.
- Karunaratne, W. & Abeysinghe, T. (2005): "Does mandatory pension savings crowd out private savings?: The experience of Sri Lanka". *Journal of Asian Economics*, 16(5), 830–846.
- Leland, H.E. (1968): "Saving and uncertainty: The precautionary demand for saving". *The Quarterly Journal of Economics*, 82(3), 465–473.
- Lettau, M. & Ludvigson, S. (2004): "Understanding trend and cycle in asset values: Reevaluating the wealth effect on consumption". *American Economic Review*, 94(1), 276–299.
- Loayza, N.; Schmidt-Hebbel, K. & Servén, L. (2000a): "Saving in developing countries: an overview". *The World Bank Economic Review*, 14(3), 393–414.
- Loayza, N.; Schmidt-Hebbel, K. & Servén, L. (2000b): "What Drives Private Saving Across the World?". *Review of Economics and Statistics*, 82(2), 165–181.
- Lucas, R.E. (1976): "Econometric policy evaluation: A critique". *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 1, 19–46.
- Ludvigson, S. (1999): "Consumption and Credit: A Model of Time-Varying Liquidity Constraints". *Review of Economics and Statistics*, 81(3), 434–447.
- Cuevas, A.; Mackenzie, G.A. & Gerson, P.R. (1997): "Pension regimes and saving". *IMF Occasional Papers*, 153. Recuperado de <http://www.imf.org/en/Publications/Occasional-Papers/Issues/2016/12/30/Pension-Regimes-and-Saving-2312>.
- MaCurdy, T.E. (1982): "The use of time series processes to model the error structure of earnings in a longitudinal data analysis". *Journal of Econometrics*, 18(1), 83–114.
- Maza, I.A. (1996): *El comportamiento del ahorro y su composición: evidencia empírica para algunos países de la Unión Europea*. Estudios Económicos nº 55, Madrid: Banco de España.
- Modigliani, F. & Ando, A.K. (1954): "Tests of the Life Cycle Hypothesis of Savings: Comments and Suggestions". *Bulletin of the Oxford University Institute of Economics & Statistics*, 19(2), 99–124.

- Modigliani, F. & Ando, A.K. (1960): "The 'Permanent Income' and 'Life Cycle' Hypothesis of Saving Behavior: Comparison and Tests". En I. Friend & R. Jones (eds.): *Proceedings of the Conference on Consumption and Saving, Volume 2*. Philadelphia: University of Pennsylvania, pp. 49–174.
- Modigliani, F. & Brumberg, R. (1954): "Utility analysis and the consumption function: An interpretation of cross-section data". En K.K. Kurihara (ed.): *Post-Keynesian Economics*. New Brunswick: Rutgers University Press, pp. 388–436.
- Mody, A.; Ohnsorge, F. & Sandri, D. (2012): "Precautionary savings in the Great Recession". *IMF Economic Review*, 60(1), 114–138.
- Núñez, J.A. (2013a): "¿Condiciona la incertidumbre las decisiones de consumo de las familias? Un análisis con datos regionales españoles". En J.A. Camacho Ballesta & Y. Jiménez Olivencia (eds.): *Desarrollo regional sostenible en tiempos de crisis, Volumen 2*. Granada: Universidad de Granada, pp. 581–599.
- Núñez, J.A. (2013b): "On private consumption and uncertainty. Empirical evidence from Spanish regional data". *Investigaciones Regionales*, 25, 111–131.
- Paiva, C. & Jahan, S. (2003): "An empirical study of private saving in Brazil". *Brazilian Journal of Political Economy*, 23(1), 121–132.
- Phillips, P.C.B. & Hansen, B.E. (1990): "Statistical inference in instrumental variables regression with I(1) processes". *The Review of Economic Studies*, 57(1), 99–125.
- Rinaldi, L. & Sanchis-Arellano, A. (2006): "Household debt sustainability: What explains household non-performing loans? An empirical analysis". *European Central Bank Working Paper Series*, 570, 43 pp. Recuperado de <https://www.ecb.europa.eu/pub/pdf/scpwps/ecbwp570.pdf>.
- Roehn, O. (2010): "New Evidence on the Private Saving Offset and Ricardian Equivalence". *OECD Economics Department Working Papers*, 762, 35 pp.. Recuperado de http://www.oecd-ilibrary.org/economics/new-evidence-on-the-private-saving-offset-and-ricardian-equivalence_5kmft7qb5kq3-en?crawler=true.
- Samwick, A.A. (2000): "Is pension reform conducive to higher saving?". *Review of Economics and Statistics*, 82(2), 264–272.
- Santos, T. (2017): "Antes del diluvio: The Spanish banking system in the first decade of the euro". En E.L. Glaeser; T. Santos & G. Weyl (eds.): *After the Flood: How the Great Recession Changed Economic Thought*. London: University of Chicago Press, pp. 153–208.
- Sastre, T. & Fernández-Sánchez, J.L. (2011a): "El ajuste del consumo duradero y

- no duradero en España durante la crisis económica". *Boletín Económico del Banco de España*, 01/2011, 91–102. Recuperado de <https://www.bde.es/f/webbde/SES/Secciones/Publicaciones/InformesBoletinesRevistas/BoletinEconomico/11/Ene/Fich/art3.pdf>.
- Sastre, T. & Fernández-Sánchez, J.L. (2011b): "La tasa de ahorro durante la crisis económica: el papel de las expectativas de desempleo y de la financiación". *Boletín Económico del Banco de España*, 11/2011, 63–77. Recuperado de <http://www.bde.es/f/webbde/SES/Secciones/Publicaciones/InformesBoletinesRevistas/BoletinEconomico/11/Nov/Fich/art4.pdf>.
- Schultz, T.P. (2005). "Demographic Determinants of Savings: Estimating and Interpreting the Aggregate Association in Asia". *IZA Discussion Paper Series*, 1479, 38 pp. Recuperado de <http://ftp.iza.org/dp1479.pdf>.
- Soria, J.; Mera, A.; García, M.; Campos, J.A.; Marchante, A.J. & Roper, M.Á. (2004): "¿Ahorran por motivo precaución los hogares españoles?". *RAE: Revista Asturiana de Economía*, 30, 161–176.
- Stock, J. & Watson, M. (1993): "A simple estimator of cointegrating vectors in higher order integrated systems". *Econometrica*, 61: 4, 783–820.
- Tunc, C. & Yavas, A. (2016): "Not all credit is created equal: Mortgage vs non-mortgage debt and private saving rate in Turkey". *Central Bank Review*, 16(1), 25–32.
- Weil, D. (1994): "The saving of the elderly in micro and macro data". *The Quarterly Journal of Economics*, 109(1), 55–81.
- Yasin, J. (2008): "Demographic Structure and Private Savings: Some Evidence from Emerging Markets". *African Review of Money Finance and Banking*, 2008, 7–21.
- Zabalza, A. & Andrés, J. (1991): "¿Afecta la fiscalidad al ahorro?". *Moneda y Crédito*, 192, 41–78.
- Zellner, A. (1960): Tests of some basic propositions in the theory of consumption. *The American Economic Review*, 50(2), 565–573.

Anexo 1: Representación de las series, pruebas de cointegración y validación de los modelos

Gráfico 4. Representación de las series utilizadas

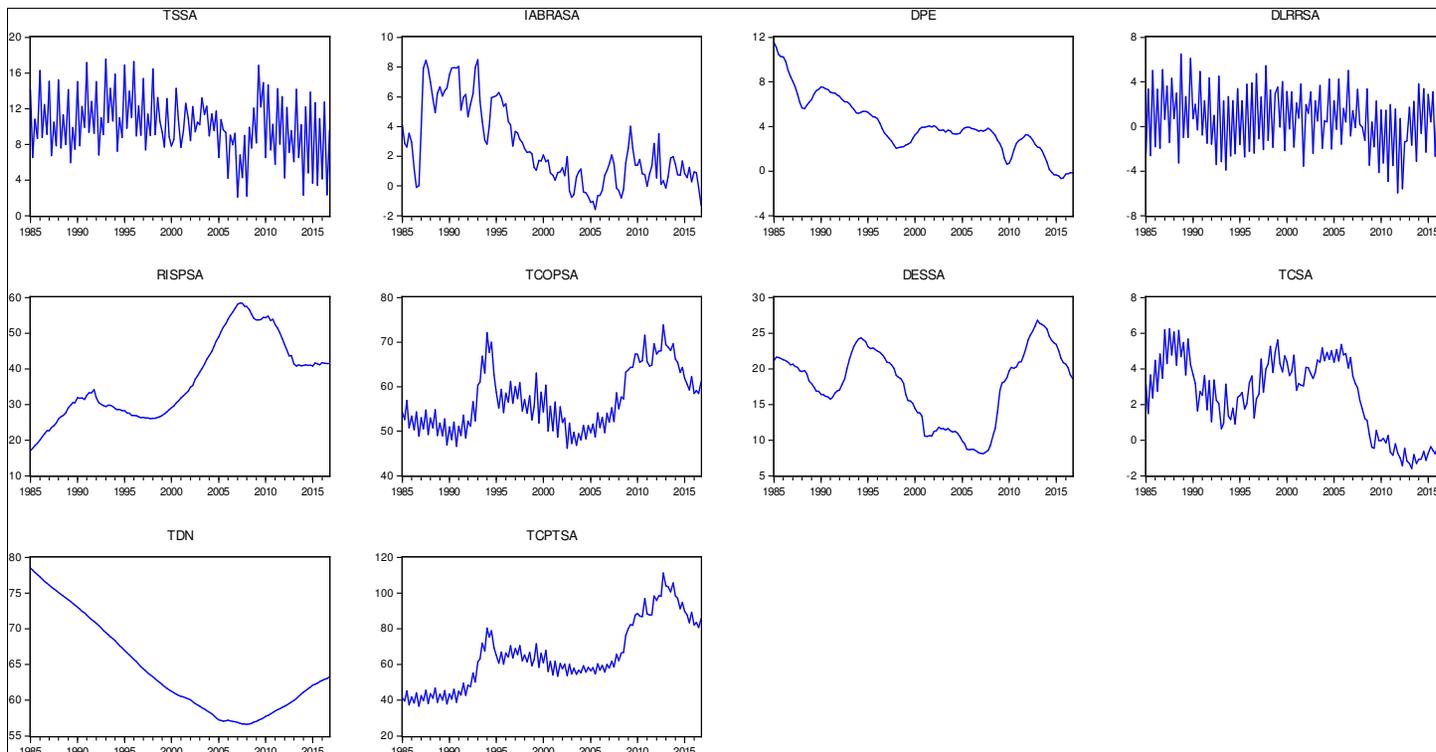


Gráfico 5. Incidencia de los determinantes a largo plazo sobre la tasa de ahorro

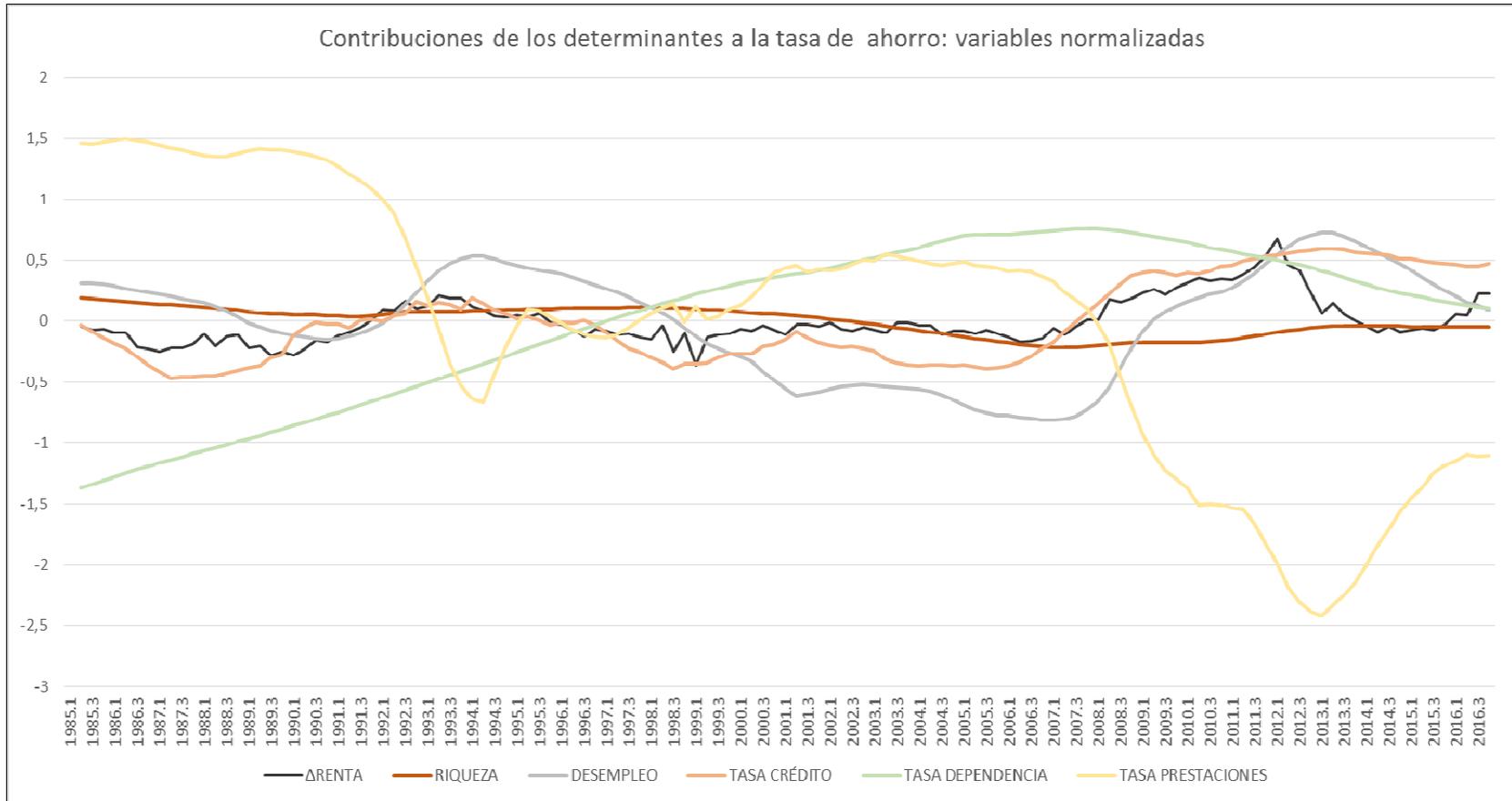


Tabla I. Resumen de las pruebas de cointegración

	Variable Serie original del modelo	Augmented Dickey Fuller (ADF)				Phillips Perron (PP)				KPSS Conflicto (** indica p<,05)			
		Series	Series del modelo	ni cte. ni tendencia	con cte. sin tendencia	con cte. y tendencia	Orden de integración	ni cte. ni tendencia	con cte. sin tendencia	Cte. Y tendencia	Orden de integración	con cte. sin tendencia	Cte. Y tendencia
NIVELES	Tasa Ahorro %PIB	TS	-0,93	-3,36**	-4,34***		-3,08***	-15,18***	-15,84***	I(0)	0,63*	0,084	I(0)
	Δ Renta Laboral	DLRR	-1,904	-2,17	-2,54	I(1)	-17,51***	-18,09***	-18,85***	I(0)	0,387*	0,067	I(0)
	T. Riqueza %PIB	RISP	0,017	-1,73	-1,89	I(1)	0,51	-1,73	-1,19	I(1)	0,96***	0,12*	I(1)
	Tasa Desempleo	DES	-0,809	-2,45	-2,44	I(1)	-0,61	-1,61	-1,62	I(1)	0,2	0,19**	I(1)
	Tasa Crédito	TC	-1,19	-1,36	-2,08	I(1)	-1,58	-2,53	-3,97*	I(1)	0,65**	0,19**	I(1)
	Tasa dependencia	TDN	0,35	-1,78	0,51	I(1)	-2,49**	-3,17**	3,21	I(0)	1,11***	0,33***	I(1)
	T.Cobertura Jubilación	TCOP	0,13	-2,43	-2,82	I(1)	0,04	-3,86***	-4,87***	I(0)	0,48**	0,11	I(1)
	T. Prestaciones Sociales	TCPT	0,16	-1,84	-2,82	I(1)	-0,644	-1,723	-1,6845	I(1)	0,97***	0,113*	I(1)
	Interés real	IBR	-1,83**	-2,17	-3,37*	I(1)	-1,62*	-2,04	-3,30*	I(1)	0,93***	0,196**	I(1)
	Δ Precios Esperado	DPE	-2,62***	-1,43	-2,64	I(1)	-2,98***	-2,39	-3,27*	I(1)	1,17***	0,15**	I(1)
T.ahorro público	TSP	-1,57	-2,28	-2,31	I(1)	-4,06***	-7,29***	-7,34***	I(0)	0,18	0,16**	I(1)	
1º DIFERENCIA	Ahorro	TS	-5,74***	-5,73***	-5,71***	I(0)	-67,05***	-67,05***	-67,40***	I(0)	0,09	0,08	
	Renta L	DLRR	-11,90***	-11,85***	-11,80***	I(0)	-116,71***	-116,37***	-115,41***	I(0)			
	Riqueza	RISP	-2,88***	-2,92**	-2,99	I(0)	-5,49***	-5,69***	-5,97***	I(0)	0,22	0,12*	
	Desempleo	DES	-4,88***	-4,87***	-4,87***	I(0)	-5,05***	-5,04***	-5,05***	I(0)			
	Crédito	TC	-4,09***	-4,10***	-4,09***	I(0)	-22,78***	-22,82***	-23,31***	I(0)			
	T. dependencia	TDN	-1,24	-0,8	-2,46	I(1)	-1,19	-0,65	-2,46	I(1)	1,15***	0,27***	I(1)
	T.cob.Jub	TCOP	-4,03***	-4,02***	-4,01**	I(0)	-24,79***	-24,75***	-24,66***	I(0)	0,05	0,05	I(0)
	T. Prest.Soc.	TCPT	-3,33***	-3,40**	-3,40*	I(0)	-20,33***	-20,68***	-20,63***	I(0)			
	Interés real	IBR	-10,58***	-7,62***	-7,66***	I(0)	-14,04***	-17,46***	-20,64***	I(0)	1,107***	0,161**	I(1)
	T.Precios	DPE	-5,11***	-5,62***	-5,61***	I(0)	-40,05***	-40,20***	-40,21***	I(0)			
T.ahorro público	TSP	-4,59***	-4,58***	-4,55***	I(0)	-33,59***	-33,47***	-33,37***	I(0)				
2º DIF	Tasa dependencia	TDN	-11,07***	-11,13***	-11,10***	I(0)	-11,11***	-11,23***	-11,20***	I(0)	0,09	0,05	I(0)

Casos confirmatorios de cointegración

El test ADF y PP contrasta la hipótesis nula de presencia de raíz unitaria contra la alternativa de estacionariedad. Se muestra el valor del estadístico de contraste y el p-valor asociado (*, **, ***)

* denota un nivel de significación al 10%; ** al 5%; *** al 1%. Los valores proceden de MacKinnon (1996)

Tabla II. Pruebas de cointegración de las variables

ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS A LARGO PLAZO													TEST DE COINTEGRACIÓN SOBRE LOS RESIDUOS				
Signo esperado (+/-)													Test resid		Test EG		Test H
		+	-	+	-	+	+	-	-	+	+						
	LAG/LEAD	RENTA DLRR	RIQUEZA RISP	DESEMPLEO DES	CRÉDITO TC	AH.PUB. TSP	T.DEPEND. TDN	COB.PREST.J TCOP	T.PREST.SOC TCPT	I.REAL IABRA	D.PRECIOS DPE	C	ADF	PP	EG tau	EG Z	Test H
INICIAL	DOLS (4,4)	TS = -0,023 [T-STAT] [-0,03]	-0,014 [-0,20]	-0,36 [-1,36]	0,21 [0,49]	0,49 [3,43]	0,12 [0,35]	0,18 [1,20]		0,23 [0,56]	-0,24 [-0,33]	-4,42 [-0,16]	-4,73 [0,0]***	-11,22 [0,0]***	-4,8 0,308	-120,9 [0,0]***	0,03 p>0,2
	DOLS (4,4)	TS = -0,57 [T-STAT] [-0,82]	0,08 [1,11]	-0,63 [-2,31]	0,56 [1,44]		0,71 [1,69]	0,55 [4,18]	0,35 [2,20]	-0,13 [-0,33]	-1,33 [-1,59]	-47,1 [-1,5]	-11,46 [0,0]***	-114,5 [0,0]***	-4,8 0,374	-336 [0,0]***	0,029 p>0,2
1ª	DOLS (4,4)	TS = -0,57 [T-STAT] [-0,82]	0,08 [1,11]	-0,63 [-2,31]	0,56 [1,44]		0,71 [1,69]	0,55 [4,18]	0,35 [2,20]	-0,13 [-0,33]	-1,33 [-1,59]	-47,1 [-1,5]	-11,46 [0,0]***	-114,5 [0,0]***	-4,8 0,374	-336 [0,0]***	0,029 p>0,2
	DOLS (4,4)	TS = 1,42 [T-STAT] [1,28]	-0,15 [-1,4]	0,59 [0,56]	-1,56 [-3,86]		-1,38 [-2,73]	-0,04 [-0,13]	-0,54 [-3,86]	0,56 [1,61]	1,31 [1,77]	132,4 [2,91]	-4,97 [0,0]***	-11,5 [0,0]***	-5,56 0,108	-336 [0,0]***	0,029 p>0,2
2ª	DOLS (4,4)	TS = -0,05 [T-STAT] [-0,05]	-0,09 [-1,48]	0,53 [1,44]	-1,24 [-2,48]		-0,93 [-2,89]	-0,36 [-2,37]	-0,36 [0,80]	0,36 [1,53]	0,82 [1,53]	88,2 [1,53]	-4,17 [0,0]***	-11,49 [0,0]***	-5,54 [0,068]	-325 [0,0]***	0,028 p>0,2
	DOLS (4,4)	TS = -1,63 [T-STAT] [-3,58]	-0,05 [-0,72]	0,59 [1,66]	-1,07 [-2,23]		-0,75 [-2,68]	-0,45 [-2,92]	-0,45 [0,41]	0,16 [3,09]		83,5 [4,19]	-5,28 [0,0]***	-12,89 [0,0]***	-5,62 [0,030]	-321,7 [0,0]***	0,03 p>0,2
3ª	DOLS (4,4)	TS = -0,87 [T-STAT] [-10,87]	-0,09 [-2,94]	0,48 [3,49]	-0,24 [-1,43]		-0,56 [-5,06]	-0,21 [-4,25]	0,32 [3,09]			55,4 [6,48]	-4,23 [0,0]***	-12,23 [0,0]***	-5,58 [0,033]	-321,7 [0,011]	1,46 p<0,01
	FMOLS	TS = -0,87 [T-STAT] [-10,87]	-0,09 [-2,94]	0,48 [3,49]	-0,24 [-1,43]		-0,56 [-5,06]	-0,21 [-4,25]	0,32 [3,09]			55,4 [6,48]	-4,23 [0,0]***	-12,23 [0,0]***	-5,58 [0,033]	-321,7 [0,011]	1,46 p<0,01
4ª	DOLS (4,4)	TS = -1,49 [T-STAT] [-3,46]	-0,08 [-1,51]	0,68 [2,32]	-1,29 [-3,31]		-0,8 [-3,12]	-0,49 [-3,85]				89,27 [4,16]	-5,41 [0,0]***	-11,56 [0,0]***	-5,2 [0,039]	-176,4 [0,011]	0,03 p>0,2
	DOLS (4,4)	TS = -1,49 [T-STAT] [-3,46]	-0,08 [-1,51]	0,68 [2,32]	-1,29 [-3,31]		-0,8 [-3,12]	-0,49 [-3,85]				89,27 [4,16]	-5,41 [0,0]***	-11,56 [0,0]***	-5,2 [0,039]	-176,4 [0,011]	0,03 p>0,2
5ª	DOLS (4,4)	TS = -1,49 [T-STAT] [-3,46]	-0,08 [-1,51]	0,68 [2,32]	-1,29 [-3,31]		-0,8 [-3,12]	-0,49 [-3,85]				89,27 [4,16]	-5,41 [0,0]***	-11,56 [0,0]***	-5,2 [0,039]	-176,4 [0,011]	0,03 p>0,2
	FMOLS	TS = -1,49 [T-STAT] [-3,46]	-0,08 [-1,51]	0,68 [2,32]	-1,29 [-3,31]		-0,8 [-3,12]	-0,49 [-3,85]				89,27 [4,16]	-5,41 [0,0]***	-11,56 [0,0]***	-5,2 [0,039]	-176,4 [0,011]	0,03 p>0,2
FINAL	DOLS (4,4)	TS = -1,49 [T-STAT] [-3,46]	-0,08 [-1,51]	0,68 [2,32]	-1,29 [-3,31]		-0,8 [-3,12]	-0,49 [-3,85]				89,27 [4,16]	-5,41 [0,0]***	-11,56 [0,0]***	-5,2 [0,039]	-176,4 [0,011]	0,03 p>0,2

Estadístico t entre corchetes

Estimaciones de los parámetros del modelo a largo plazo mediante el procedimiento DOLS (SW) y FMOLS para contrastar signos

ADF y PP test prueban la hipótesis nula de presencia de raíz unitaria en los residuos del modelo

EG τ y EG z: Engel Granger estadístico tau y z que prueban la hipótesis nula de existencia de raíz unitaria. P valores obtenidos por MacKinnon (1996)

La estimación FMOLS de Phillips-Hansen utiliza los residuos que son filtrados mediante un VAR(2) para corregir la correlación serial

El Test H de Hansen de estabilidad de los parámetros contrasta la hipótesis nula de cointegración mediante una prueba de estabilidad de los parámetros aunque el valor del estadístico de contraste p está aproximado para 4 tendencias estocásticas.

Se muestra el estadístico de contraste

La probabilidad asociada al estadístico, entre corchetes * nivel de significación al 10%; ** al 5%; *** al 1%.

Los p-valor proceden de MacKinnon (1996)

Tabla III. Pruebas de cointegración de las variables finales

ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS A LARGO PLAZO									TEST DE COINTEGRACIÓN SOBRE LOS RESIDUOS						
		RENTA	RIQUEZA	DESEMPL	CRÉDITO	T.DEPEND.	T.PREST.SOC.	C	Test resid		Test EG		Test H	Test PO	
		DLRR	RISP	DES	TC	TDN	TCPT		ADF (t)	PP	EG (t)	EG(z)	Test H	PO tau	PO Z
DOLS (4,4)	TS =	-1,49	-0,08	0,68	-1,29	-0,8	-0,49	89,27	-8,31	-12,58	-5,2	-176,5	0,03	-12,47	-123,7
	[T-STAT]	[-3,46]	[-1,51]	[2,32]	[-3,31]	[-3,12]	[-3,85]	[4,16]	[0,0]***	[0,0]***	[0,039]	[0,0]***	p>0,2	[0,0]***	[0,0]***
EG	TS =	-1,06	-0,09	0,34	-0,49	-0,36	-0,21	46,7	-4,32	-11,32	-4,12	-50,5	0,04	-11,95	-186,8
	[T-STAT]	[-13,22]	[-2,56]	[2,65]	[-2,53]	[-3,31]	[-4,24]	[6,14]	[0,0]***	[0,0]***	0,33	0,01	p>0,2	[0,0]***	[0,0]***
FMOLS	TS =	-0,908	-0,08	0,58	-0,29	-0,54	-0,25	55,9	-3,52	-12,83	-5,24	-176,4	1,12	-12,31	-132,2
	[T-STAT]	[-10,71]	[-2,44]	[4,21]	[-1,58]	[-4,69]	[-4,95]	[6,14]	[0,0]***	[0,0]***	[0,039]	[0,0]***	p=0,023	[0,0]***	[0,0]***
ECM (VAR6)	TS =	-2,34	-0,01	0,77	-1,66	-0,90	-0,60	99,63	-11,82	-11,87	-11,66	-127,6	0,3	-11,78	-121,3
	[T-STAT]	[-6,56]	[-0,25]	[3,277]	[-6,24]	[-4,34]	[-6,07]	[5,832]	[0,0]***	[0,0]***	[0,0]***	[0,0]***	p>0,2	[0,0]***	[0,0]***

Estadístico t entre corchetes
 Estimación de los parámetros del modelo a largo plazo mediante los 4 procedimientos: DOLS, FMOLS, EG y ECM
 ADF y PP test prueban la hipótesis nula de presencia de raíz unitaria en los residuos del modelo
 EG τ y EG z: Engel Granger estadístico tau y z que prueban la hipótesis nula de existencia de raíz unitaria.
 El Test H de Hansen de estabilidad de los parámetros contrasta la hipótesis nula de cointegración mediante una prueba de estabilidad de los parámetros aunque el valor del estadístico de contraste p está aproximado para 4 tendencias estocásticas.

Se muestra el estadístico de contraste;
 La probabilidad asociada al estadístico, entre corchetes
 * denota un nivel de significación al 10%; ** al 5%; *** al 1%.
 Los p-valor proceden de MacKinnon (1996)

Tabla IV. Pruebas de cointegración de los modelos de corrección de error

ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS A LARGO PLAZO (1)									TÉRMINO DE CORRECCIÓN DE ERROR	TEST DE COINTEGRACIÓN SOBRE LOS RESIDUOS (1)						
		DLRR	RISP	DES	TC	TDN	TCPT	C	γ	Test resid		Test EG (ECM)		Test H	Test PO	
										ADF	PP	EG (ty)	EG Z	Test H	PO tau	PO Z
DOLS (4,4)	TS =	-1,49	-0,08	0,68	-1,29	-0,8	-0,49	89,27	-0,43	-10,81	-11,65	-11,52	-109,7	0,1	-11,85	-108,9
	[T-STAT]	[-3,46]	[-1,51]	[2,32]	[-3,31]	[-3,12]	[-3,85]	[4,16]	[-3,48]	[0,0]***	[0,0]***	[0,0]***	[0,0]***	p>0,2	[0,0]***	[0,0]***
EG	TS =	-1,06	-0,09	0,34	-0,49	-0,36	-0,21	46,7	-0,61	-5,39	-11,32	-10,96	-121,6	0,084	-11,02	-115,2
	[T-STAT]	[-13,22]	[-2,56]	[2,65]	[-2,53]	[-3,31]	[-4,24]	[6,14]	[-8,72]	[0,0]***	[0,0]***	[0,0]***	[0,0]***	p>0,2	[0,0]***	[0,0]***
FMOLS	TS =	-0,908	-0,08	0,58	-0,29	-0,54	-0,25	55,9	-0,57	-2,99	-11,77	-11,66	-128,97	0,07	-11,8	-119,4
	[T-STAT]	[-10,71]	[-2,44]	[4,21]	[-1,58]	[-4,69]	[-4,95]	[6,14]	-8,42	[0,0]***	[0,0]***	[0,0]***	[0,0]***	p>0,2	[0,0]***	[0,0]***
ECM VAR6	TS =	-2,34	-0,01	0,77	-1,66	-0,90	-0,60	99,63	-0,17	-12,06	-12,13	-12,06	-133,5	0,1	-12,2	-125,8
	[T-STAT]	[-6,56]	[-0,25]	[3,27]	[-6,24]	[-4,34]	[-6,07]	[5,83]	[-2,87]	[0,0]***	[0,0]***	[0,0]***	[0,0]***	p>0,2	[0,0]***	[0,0]***

(1) Notas en las tablas anteriores

Anexo 2. Procedencia de las series utilizadas

La fuente principal de datos es la Contabilidad Nacional de los sectores institucionales que publica el Instituto Nacional de Estadística y las cuentas financieras que publica el Banco de España. Dado que estas series con detalle trimestral no tienen la antigüedad requerida, se han complementado con las cuentas anuales de los sectores institucionales. Por un lado, ha sido necesario enlazar ambas series y, en algunos casos, desagregar las series anuales en trimestrales mediante regresión, que mantienen la tasa de crecimiento en términos anuales. El sistema de enlace empleado es aplicar las tasas de crecimiento –normalmente anual– calculadas en la serie a sustituir –las publicadas en base a la CN86 y CN95– a las series más largas y actuales –CN2010–. En algunos casos, se trimestraliza la serie mediante el *software* R –paquete *tempdisagg*, método Denton-Cholette–. Si la variable es flujo, el flujo anual se descompone en 4 trimestrales cuya suma (*conversion sum*) corresponde al flujo anual. Si la variable es fondo, “escala” los valores al valor final (*conversion last*). El método Denton-Cholette desagrega las series minimizando la suma de los cuadrados de las desviaciones entre los niveles de forma similar a un modelo de regresión lineal⁷. Esto mantiene la tasa de crecimiento anual de la serie original en la serie obtenida, aunque carece de la estacionalidad de las series trimestrales.

AHORRO Y RENTA BRUTA DISPONIBLE

- Ahorro (CNE B86) (Código B86): cuentas de los sectores institucionales. s.80 Hogares. Millones de pesetas. Saldo.N.4 Ahorro bruto. Datos anuales de 1985 a 1997. Supondremos que es un flujo acumulado (saldo) a final del año en curso. Desagregamos los datos mediante el método Denton-Cholette y el *software* R. Los datos están en millones de pts. corrientes. Convertimos a €.
- Ahorro (CNE B95): datos anuales de 1995 a 2003. Utilizamos de esta serie únicamente los valores del año 1998. Expresamos en mil. pts. e incorporamos a la serie anterior (1985 a 1997) para desagregar en trimestral de forma coherente.
- Ahorro (CNE B10) (código B.8g): datos trimestrales de 1999 a 2014. SEC 2010. Millones de € corrientes.

RENTA DEL TRABAJO Y RENTA MIXTA

- Contabilidad Nacional Trimestral. SEC95. Rentas. Unidades: Millones Euros (tabla-3158 CN1995). 1981.1 a 2004.4. Datos corregidos de efectos estacionales y de calendario. En esta

⁷ <https://cran.r-project.org/web/packages/tempdisagg/tempdisagg.pdf>
<http://journal.r-project.org/archive/2013-2/sax-steiner.pdf>

serie disponemos de la remuneración de asalariados y el EBE. Se deflacta mediante la serie IPC.

- Contabilidad Nacional Trimestral de España. SEC10. Base 2010. Producto interior bruto precios de mercado. PIB pm Rentas (Precios corrientes) Unidades: Millones Euros. 1996.1 a 2016.4. Datos corregidos de efectos estacionales y de calendario. Se deflacta mediante la serie IPC.

RENTA NACIONAL BRUTA DISPONIBLE

- RNBD (CNE B86): datos anuales de 1985 a 1997. (SEC-79). Supondremos que es un flujo acumulado (saldo) a final del año en curso. Desagregamos los datos mediante el método Denton-Cholette y el *software* R. Los datos están en millones de pts. corrientes. Convertimos a €.
- RNBD (CNE B95): datos anuales de 1995 a 2003. Comparamos con los resultados anteriores. Utilizamos de esta serie únicamente los valores del año 1998. Expresamos en mil pts. e incorporamos a la serie anterior (1985 a 1997) para desagregar en trimestral de forma coherente con la anterior.
- RNBD (CNE B10): datos trimestrales de 1999 a 2014. SEC 2010. Millones de € corrientes.

INFLACIÓN IPC

Los datos proceden de los tres años base:

IPC Base 92: datos mensuales años 1984.12 a 2001.12.

Índice de Precios de Consumo (IPC) Base 2010 (2011=100): obtenemos IPC recalculando los valores de la serie base 92 enlazándolos con la base 2011 manteniendo las variaciones mensuales de la serie original. Reducción serie IPC mensual a IPC trimestral: media de los 3 meses.

Serie DPE: obtenemos la serie expectativas de inflación como la media ponderada de 8 trimestres; la ponderación es una serie exponencial decreciente en el tiempo.

DESEMPLEO

Datos EPA (Encuesta de Población Activa) INE.

Datos disponibles desde 2002T1. Datos mensuales trimestralizados mediante media móvil MM3. Obtenidos en mayo de 2015.

(http://www.ine.es/dyngs/INEbase/es/operacion.htm?c=Estadistica_C&cid=1254736176918&menu=ultiDatos&idp=1254735976595)

Obtenemos la serie anterior a 2002 continuando la serie de 2014 con las tasas de crecimiento de las series anteriores. Somos conscientes de que se producen cambios en la metodología en 2001, en 2005 y 2014 derivados de la nueva estructura de la población obtenida en los censos por lo que los resultados se consideran provisionales.

RIQUEZA

DESCRIPCIÓN: Riqueza inmobiliaria de los hogares. Estimación basada en la evolución estimada del parque de viviendas, de la superficie media de las mismas y del precio medio del m². Éste último se calcula a partir de diversas fuentes.

CÓDIGO SERIE: D_TKB070C0_ESTI.

CÓDIGO UNIDAD: Euros.

EXPONENTE: 6.

UNIDAD: Millones de euros.

FRECUENCIA: Trimestral.

SERIE: 1T.1980 a 4T.2016.

Fuente: Banco de España.

Obtención en: mayo de 2017 (http://app.bde.es/bie_www/?Idioma=es).

CRÉDITO:

Construimos la tasa de crecimiento del préstamo concedido (TCP) como tasa de crecimiento trimestral del saldo de crédito bancario concedido a los hogares. Obtenemos TCP de las cuentas financieras del Banco de España como el cociente entre el flujo trimestral de crédito y el saldo dos trimestres antes ($TCP = \text{pasivos netos contraídos} / \text{Pasivos. Hogares. Préstamos}$). Como afirma Ayuso (2013)⁸, esperamos que “los cambios en el saldo no asociados a operaciones de crédito o amortizaciones (como, por ejemplo, los préstamos fallidos que se dan de baja del balance de las entidades o las transferencias a la Sareb) no afectan a este indicador”. A partir de los saldos de préstamos –balance– y los pasivos contraídos, obtenemos el ratio tasa de crecimiento del saldo del crédito como cociente ($\text{pasivos contraídos} - \text{flujo} - / \text{saldo de crédito}$). Los datos para obtener el indicador proceden de dos fuentes diferentes:

- El ratio trimestral se obtiene de la forma mencionada desde 1990.1T hasta 2014.T4.
- Desde 1985.1T hasta 1989.4T, los datos proceden de la serie anual de las cuentas financieras de la economía española del Banco de España (CF_2_20A.27 serie DM_Z#ES8000H95); se

⁸ Ayuso, J. (2013): “Un análisis de la situación del crédito en España”. *Boletín Económico del Banco de España*, 20/2013, 81–99.

descomponen en serie trimestral mediante el paquete R *tempdissag*. El ratio se calcula como cociente entre la variación habida en el trimestre y el saldo dos trimestres anteriores.

CF_2_20A.27. (DM_Z#ES8000H95). Pasivos. Hogares e instituciones sin fines de lucro. Préstamos. Miles de Euros. Serie anual desde 1980; cuatrimestral desde diciembre de 1989. Fuente: Banco de España. Cuentas financieras Hogares. Desagregamos los datos en cuatrimestrales mediante R *tempdissag*. Calculamos las operaciones financieras –pasivos contratados– como diferencia entre los datos cuatrimestrales obtenidos.

CF_2_201.11. (DM_Z#ES8000O95). Pasivos. Hogares. Préstamos. Miles de Euros. Serie cuatrimestral desde diciembre de 1989. Fuente. Banco de España. Cuentas financieras Hogares.

TASA DE DEPENDENCIA

Cociente: población dependiente sobre población activa.

Población dependiente: de 0 a 19 años más la población de más de 65 años.

Población potencialmente activa: población entre 20 y 64 años.

Instituto Nacional de Estadística. Principales series desde 1971. Población residente.

Unidad: nº de personas.

http://www.ine.es/dyngs/INEbase/es/categoria.htm?c=Estadistica_P&cid=1254735572981.

Consulta: julio de 2016.

AHORRO PÚBLICO

Contabilidad Nacional de España Base 86. Cuentas de los sectores institucionales. S.60 Administraciones públicas. Unidades: Millones de pesetas.

Saldo.N.5 Capacidad (+) o necesidad (-) de financiación. Datos anuales de 1985 a 1997.

Convertidos a euros y trimestralizados mediante el sistema habitual.

Datos de 1998.1 a 1998.4 Obtenidos mediante medias móviles de orden 4 de los 4 trimestres anteriores.

Contabilidad Nacional de España. Base 2010. Cuentas no financieras trimestrales por sector institucional. Administraciones públicas (S.13): operaciones y saldos contables.

1999 T I - 2016 T IV. Unidad: millones de euros.

B.9. Capacidad(+)/Necesidad(-) de financiación.

Obtenemos la Tasa de ahorro público como: Capacidad Necesidad de financiación / PIB trimestral nominal.

RENTABILIDAD-INTERÉS

DESCRIPCIÓN: Mercado de valores. Mercado primario de renta fija. Deuda negociable del Estado. Bonos a 3 años. Tipo de interés medio a la emisión.

NOMBRE SERIE: D_1G1ABIS0.

CÓDIGO UNIDAD: Porcentaje.

EXPONENTE: 2.

UNIDAD: Porcentaje.

FRECUENCIA: Mensual.

Obtenemos la rentabilidad real deflactando la serie con el índice de precios mencionado.

TASA DE REEMPLAZO DE LAS PENSIONES (TCOP)

DESCRIPCIÓN: Contabilidad Nacional de España.

METODOLOGÍA: Metodología del año SEC2010. Año base 2010.

VALORACIÓN: Precios corrientes. Operaciones y otros Flujos: Prestaciones sociales distintas de las transferencias sociales en especie. Sector de Destino: Recursos. Hogares e instituciones sin fines de lucro al servicio de los hogares.

NOMBRE SERIE: DSPC102010CD62000_RS14A.T.

CÓDIGO UNIDAD: Euros.

EXPONENTE: 6.

UNIDAD: Millones de Euros.

FRECUENCIA: Trimestral. Datos trimestrales de 1999.1 a 2016.4.

Obtenemos los datos de 1985.1 a 1998.4 enlazando la serie anterior mediante las tasas de crecimiento trimestrales de la serie:

DESCRIPCIÓN: SEC2010.Administraciones Públicas. Administraciones de Seguridad Social. Operaciones no financieras. Empleos. Prestaciones sociales. Pensiones contributivas. Acumulada. Tasa variación interanual.

NOMBRE SERIE: DPUDMNSEC2010_D62110_EF_ASG_TAC.

CÓDIGO UNIDAD: Porcentaje.

EXPONENTE: -2.

UNIDAD: Porcentaje.

FRECUENCIA: Mensual.

TCOP

Deflactamos la serie obtenida mediante IPC. Calculamos la tasa de reemplazo mediante la fórmula: (prestaciones de jubilación / población de +65) / ((renta disponible - prestaciones) / población entre 15 y 65). Estimamos las prestaciones de jubilación como la proporción de prestaciones de jubilación sobre las prestaciones totales durante el período.

TCPT

(Prestaciones totales / población de 0 a 15 y +65) / ((renta disponible - prestaciones) / población entre 15 y 65).

Las series de población proceden de:

Instituto Nacional de Estadística: Censo de Población.

Principales series desde 1971.

Resultados Nacionales.

TABLA 10258.

Población residente por fecha, sexo y grupo de edad.

Unidades: Personas.



Tarificación de bonos sobre catástrofes (*cat bonds*) con desencadenantes de índices de pérdidas. Modelación mediante un proceso de Ornstein-Uhlenbeck

PÉREZ-FRUCTUOSO, MARÍA JOSÉ

Departamento de Economía y Administración de Empresas

Universidad a Distancia de Madrid (España)

Correo electrónico: mariajose.perez@udima.es

RESUMEN

Este artículo propone un modelo aleatorio en tiempo continuo para calcular el índice de pérdidas desencadenante de los bonos sobre catástrofes a partir de la cuantía declarada de siniestros hasta el momento de su vencimiento.

Bajo la hipótesis de que la cuantía total de una catástrofe se define como la suma de la cuantía declarada de siniestros y la cuantía de siniestros pendiente de declarar, modelizamos la dinámica lineal decreciente de esta última cuantía mediante un proceso browniano aditivo o proceso de Ornstein-Uhlenbeck. La cuantía declarada de siniestros, entonces, se obtiene por diferencia entre la cuantía total de los siniestros y la cuantía de siniestros pendiente de declarar.

Finalmente, se comprueba la validez del modelo propuesto estimando sus parámetros fundamentales y contrastando la bondad del ajuste realizado sobre una muestra de series de datos de seis inundaciones ocurridas en diferentes localidades españolas propensas a sufrir este tipo de catástrofes.

Palabras claves: bonos sobre catástrofes; cuantía de siniestros pendiente de declarar; cuantía declarada de siniestros; tasa de declaración de siniestros; índice de pérdidas por catástrofes; proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Clasificación JEL: C51; C52.

MSC2010: 60G15; 62P05.

Pricing Loss Index Triggered Cat Bonds. An Ornstein-Uhlenbeck Process-Based Model

ABSTRACT

This paper develops a continuous-time random model of loss index triggers for cat bonds on the basis of the loss amount incurred until their maturity. Assuming that total loss amount due to a catastrophe is defined as the sum of the incurred loss amount plus the incurred-but-not-yet reported loss amount, we model the decreasing linear dynamics of the latter amount by means of an additive Brownian process (or Ornstein-Uhlenbeck process); and get the former by the difference between the total loss amount and the incurred-but-not-yet-reported loss amount. Finally, we test the validity of the model by estimating its core parameters and by contrasting the goodness of fit through a data series of six floods occurred in several Spanish cities prone to suffer such kind of catastrophes.

Keywords: catastrophe bonds; incurred-but-not-yet-reported loss amount; incurred loss amount; claim reporting rate; loss index trigger; Ornstein-Uhlenbeck process.

JEL classification: C51; C52.

MSC2010: 60G15; 62P05.



1. Introducción

Los bonos sobre catástrofes son activos financieros que condicionan su cobertura a la ocurrencia de un determinado desencadenante (*trigger*) establecido en el momento de la emisión. La selección de este desencadenante se realiza en función de los riesgos cubiertos y la forma en que se estructure el proceso de indemnización, tratando, desde el punto de vista del inversor, de maximizar su transparencia y, desde el punto de vista del patrocinador, de minimizar el riesgo de base o de cobertura insuficiente. Por esta razón, a lo largo del tiempo, los desencadenantes utilizados en los procesos de titulización del riesgo asegurado han ido variando desde los desencadenantes iniciales de indemnización y de índices paramétricos a la tendencia actual de índices de pérdidas sectoriales (o índices de pérdidas de la industria aseguradora). Ello se debe, básicamente, a que, frente a la estructura apoyada en los libros de contabilidad del desencadenante de indemnización, los desencadenantes de índices de pérdidas son más simples de comprender para el inversor y reducen el riesgo moral. Además, desde el punto de vista del asegurador, evitan que mucha de su información cercana a la confidencialidad se haga pública. Sin embargo, el principal inconveniente de este sistema de estructuración de los bonos sobre catástrofes deriva de utilizar índices pobremente desarrollados que no representen fielmente las pérdidas de la industria y generen riesgo de base.

Un aspecto relevante en el análisis, tanto teórico como práctico, de estos instrumentos financiero-actuariales con desencadenantes de índices de pérdidas, es su tarificación a lo largo de un horizonte temporal determinado. Desde un enfoque exclusivamente actuarial, para fijar el precio de un producto de seguros, tradicionalmente se trabaja con las hipótesis de la Teoría Clásica del Riesgo, que suponen las cuantías individuales de los siniestros como variables aleatorias independientes y equidistribuidas. Además, la prima se obtiene aplicando el principio de mutualidad a partir del cual los riesgos se distribuyen entre toda la masa asegurada; de forma que, en promedio, los errores se compensan y la esperanza matemática de la siniestralidad total, o prima pura, es suficiente para llevar a cabo la cobertura. Sin embargo, este procedimiento de determinación del precio del seguro es incongruente con la valoración realizada en los mercados financieros, en los que la cuantificación de los activos derivados se obtiene, evitando las oportunidades de arbitraje, mediante la réplica de carteras formadas por activos simples cuyos resultados son iguales, en todo momento del periodo de negociación, al del activo derivado objeto de valoración. La tarificación de los bonos sobre catástrofes en este contexto requiere la definición de un modelo que permita calcular la evolución temporal de la cuantía total de las pérdidas derivadas de una catástrofe y, por tanto, de la ratio de siniestralidad subyacente de este tipo de contratos.

Diversos autores se han ocupado de esta cuestión. Cummins y Geman (1995) y Geman y Yor, (1997) desarrollan modelos de valoración de opciones y futuros sobre riesgos catastróficos basados en dos hipótesis: por una parte, utilizan procesos geométricos de Wiener para describir la declaración

instantánea de los siniestros y, por otra, procesos de Poisson, que incorporan al modelo la posibilidad de ocurrencia de grandes catástrofes. Aase (1999, 2001) modela la dinámica del índice de pérdidas a través de un proceso de Poisson compuesto con saltos aleatorios para valorar futuros y opciones sobre futuros sobre catástrofes como caso particular del modelo desarrollado por Embrechts y Meister (1997), que representa el comportamiento del subyacente mediante una mixtura de procesos de Poisson compuestos y una frecuencia de siniestralidad aleatoria. Loubergé *et al.* (1999) aplican el modelo de valoración de opciones sobre catástrofes desarrollado por Cummins y Geman (1995), para calcular el precio de un bono catastrófico cuyo desencadenante es un índice de pérdidas de la industria aseguradora. Lee y Yu (2002) incorporan el riesgo de crédito en la valoración de los bonos catastróficos a través de un movimiento geométrico browniano así como factores prácticos asociados al azar moral y al riesgo de base. Cox y Pedersen (2000) proponen un método de cálculo del precio de un bono sobre catástrofe en mercados incompletos a partir de la definición de una determinada estructura temporal de los tipos de interés y de una estructura de probabilidades de ocurrencia del riesgo catastrófico. Muermann (2003) utiliza la modelación del índice de pérdidas desarrollado por Aase (1999) para realizar una valoración, consistente en términos actuariales, de las opciones y futuros negociados en el *Chicago Board of Trade* (en adelante, CBOT) durante la década de los 90 del siglo pasado. Nowak y Romaniuk (2013) aplican modelos de ETTI (tipos de interés *spot* libres de riesgo) bajo la hipótesis de que la ocurrencia de la catástrofe es independiente del comportamiento de los mercados financieros. Finalmente, Zong-Gang y Chao-Qun (2013) consideran un entorno de tipos de interés estocásticos para describir las pérdidas catastróficas a través de un proceso de Poisson compuesto no homogéneo.

Esta revisión de la literatura financiero-actuarial pone de manifiesto el uso frecuente del movimiento geométrico browniano para modelar el comportamiento del índice de pérdidas desencadenante de los derivados vinculados a seguros en general y, dentro de este tipo de activos, de los bonos sobre catástrofes en particular. Trabajar bajo esta hipótesis lleva a asumir un crecimiento exponencial, en promedio, de la declaración de siniestros instantánea; mientras que lo que revela la evidencia empírica es que dicho crecimiento tiende a ser uniforme en el tiempo. En Cummins y Geman (1995), se asume además, que esta tasa es discontinua al introducir el proceso de salto debido a las grandes catástrofes en la definición de $S(t)$; en Geman y Yor (1997), la introducción de las grandes catástrofes se hace en la definición del índice de pérdidas, $L(t)$, directamente. Este planteamiento agregado en cuanto al comportamiento de la velocidad de declaración de los siniestros no se corresponde con una distribución más o menos uniforme de la ocurrencia de los mismos dentro de un intervalo temporal concreto, pues es difícil entender que el proceso de agregación siniestral sea exponencial y no lineal.

Para resolver estas inconsistencias, Alegre *et al.* (2003) desarrollan un modelo aleatorio en tiempo discreto que modela el comportamiento del índice de pérdidas subyacente de los futuros y opciones sobre riesgos catastróficos negociadas en el CBOT, a partir de la definición de la cuantía total de una catástrofe como la suma de dos variables aleatorias, la cuantía declarada de siniestros y la cuantía de siniestros pendiente de declaración, limitando la posibilidad de ocurrencia de catástrofes a una por periodo. Para reflejar la incertidumbre del ritmo de las declaraciones en el tiempo, se define un proceso estocástico discreto formado por variables aleatorias de Bernoulli, denominadas tasas nominales de declaración de siniestros, que permiten simular periódicamente dos velocidades de declaración de siniestros, una rápida y otra lenta. Finalmente, los autores demuestran que, dividiendo infinitamente los periodos de observación, el modelo discreto aleatorio tiende a un modelo continuo basado en un proceso de Wiener.

Posteriormente, Pérez-Fructuoso (2008, 2009) realiza una extensión al campo continuo del modelo discreto aleatorio anterior asumiendo que la dinámica de la cuantía de siniestros pendiente de declarar sigue un movimiento geométrico browniano representativo de un decrecimiento temporal de esta variable a razón de una función real de variable real, denominada tasa de declaración de siniestros, para la cual se proponen tres definiciones alternativas: constante, asintótica y mixta. Para el caso de una tasa de declaración de siniestros constante (tasa instantánea de declaración de siniestros), la cuantía declarada de siniestros, variable fundamental para el cálculo del índice de pérdidas en caso de ocurrencia de una catástrofe, se obtiene entonces fácilmente como diferencia entre la cuantía total de la catástrofe y la cuantía de siniestros pendiente de declarar.

Con el objetivo de desarrollar una modelización más ajustada del índice de pérdidas por catástrofes desencadenantes de los bonos sobre catástrofes, en este artículo se presenta una definición alternativa para la dinámica de las declaraciones de siniestros basada en un proceso de Ornstein-Ulhenbeck. La incorporación de un movimiento browniano aditivo a través del proceso de Ornstein-Ulhenbeck permite considerar la irregularidad de las declaraciones de siniestros de forma constante en el tiempo y no proporcional a la cuantía de siniestros pendiente de declarar.

La estructura del artículo es la siguiente. Tras la presentación de las hipótesis básicas sobre las que se modela la ocurrencia de las catástrofes y la declaración de los siniestros y describir las expresiones más relevantes obtenidas en el modelo original, la Sección 3 presenta las soluciones de las variables “cuantía declarada de siniestros” y “cuantía de siniestros pendientes de declarar” cuando la dinámica de ésta última se representa mediante un proceso de Ornstein-Ulhenbeck. En la Sección 4, se calcula el índice de pérdidas por catástrofes a partir de los resultados obtenidos en la sección anterior. En la Sección 5, se realiza una validación del modelo propuesto a través de la estimación de los parámetros del modelo original y del modelo de Ornstein-Ulhenbeck y de la comparación de los

resultados obtenidos en ambos casos. Y finalmente, la Sección 6 presenta las principales conclusiones alcanzadas con la realización del artículo.

2. Revisión del modelo original de elaboración del índice de pérdidas

2.1. Hipótesis sobre la ocurrencia de catástrofes

Siguiendo a Pérez-Fructuoso (2008), se considera que $[0, T] \subset [0, T']$ es el periodo de riesgo del bono sobre catástrofes, tal que $T' \geq T$ es la fecha de vencimiento o amortización del contrato y $\tau \in [0, T]$ el momento en el que se produce la catástrofe cubierta con la emisión del bono.

Se define K_τ^i como la variable aleatoria que representa la cuantía total de la catástrofe de intensidad i ocurrida en el momento τ con $i=1, 2, 3$ de forma que: $i=1$, si la catástrofe ocurrida es de pequeña cuantía; $i=2$, si es de cuantía media; e $i=3$, si es de gran cuantía (Alegre *et al.*, 2003).

Finalmente, se introduce en el modelo una variable indicador, δ_τ^i , cuyo valor es 0 si no se produce la catástrofe cubierta en el bono en un momento $\tau \in [0, T]$, o 1 en otro caso.

2.2. Hipótesis sobre la declaración de siniestros. Principales soluciones del modelo original

En el modelo original desarrollado por Pérez-Fructuoso (2008), se asume que el proceso de declaración de los siniestros asociado a la ocurrencia de una catástrofe se inicia en el mismo instante en el que ésta se produce y se extiende hasta el momento del vencimiento del bono, T' . Entonces, para un momento de valoración $t \in (\tau, T'] \subset [0, T']$, se define la cuantía total de la catástrofe ocurrida en el momento τ , K_τ^i , como la suma de dos variables aleatorias:

$$K_\tau^i = S_\tau^i(t) + R_\tau^i(t) \quad (1)$$

donde $S_\tau^i(t)$ es la cuantía declarada de siniestros y $R_\tau^i(t)$ la cuantía de siniestros pendientes de declaración ambas referidas al momento de valoración t .

A partir del análisis de la evidencia empírica, se considera como hipótesis fundamental del modelo que la intensidad en la declaración de los siniestros es muy elevada inmediatamente después de la ocurrencia de la catástrofe y va disminuyendo con el tiempo hasta anularse cuando ya no quedan más siniestros por declarar. Como consecuencia de ello, y en una primera fase de construcción del modelo, se representa la siniestralidad instantánea a través de una ecuación diferencial que describe un crecimiento de la cuantía de siniestros declarada proporcional a la variable cuantía de siniestros pendiente de declarar:

$$dS_\tau^i(t) = \alpha_\tau^i R_\tau^i(t) dt \quad (2)$$

siendo α_τ^i un valor constante denominado *tasa instantánea de declaración de siniestros* con $\alpha_\tau^2 > \alpha_\tau^3$ y $\alpha_\tau^1 \rightarrow \infty$.

Las variables $R_\tau^i(t)$ y $S_\tau^i(t)$ están sujetas a las siguientes condiciones de contorno:

- (a) Condición de contorno inicial, $t = \tau$: si el momento de valoración del bono coincide con el momento de ocurrencia de la catástrofe:

$$R_\tau^i(t) = K_\tau^i \text{ y } S_\tau^i(t) = 0,$$

la cuantía de siniestros pendiente de declaración coincide con el volumen total de la catástrofe y, consecuentemente, la cuantía declarada de siniestros es cero.

- (b) Condición de contorno final, $t \rightarrow \infty$: si la valoración del bono se produce en un momento lo suficientemente alejado de la ocurrencia de la catástrofe (tiende a infinito):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_\tau^i(t) = 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} S_\tau^i(t) = K_\tau^i,$$

las pérdidas asociadas a la catástrofe ya se han declarado en su totalidad y, por tanto, ya no queda ningún siniestro pendiente de declarar.

Diferenciando la ecuación (1), resulta:

$$dS_\tau^i(t) = -dR_\tau^i(t)dt \quad (3)$$

y substituyendo en la ecuación (2), $dS_\tau^i(t)$ por el resultado obtenido en la expresión (3), se obtiene la ecuación diferencial que describe la evolución de la cuantía de siniestros pendiente de declarar, $R_\tau^i(t)$, como:

$$dR_\tau^i(t) = -\alpha_\tau^i R_\tau^i(t)dt \quad (4)$$

Para capturar el comportamiento irregular de las declaraciones de siniestros catastróficos a lo largo del tiempo, se introduce un proceso de Wiener en la ecuación (4) dando lugar a la siguiente ecuación diferencial estocástica (Pérez-Fruitoso, 2008, 2009):

$$dR_\tau^i(t) = -\alpha_\tau^i R_\tau^i(t)dt + \sigma_\tau^i R_\tau^i(t)dW_\tau^i(t - \tau) \quad \forall t \in [\tau, T] \quad (5)$$

siendo α_τ^i la tasa instantánea de declaración de siniestros, que representa la tendencia del proceso; σ_τ^i una constante que indica la volatilidad del proceso; y $W_\tau^i(t - \tau)$ un proceso de Wiener estándar asociado a la catástrofe del tipo i ocurrida en el momento τ .

La ecuación diferencial (5) se resuelve aplicando el lema de Itô a la transformación $y = \ln R_{\tau}^i(t)$ (Arnold, 1974), de donde, considerando las condiciones de contorno (a) y (b), se obtiene:

$$R_{\tau}^i(t) = K_{\tau}^i e^{-\left(\alpha_{\tau}^i + \frac{(\sigma_{\tau}^i)^2}{2}\right)(t-\tau) + \sigma_{\tau}^i W_{\tau}^i(t-\tau)} \quad (6)$$

La cuantía declarada de siniestros hasta t , $S_{\tau}^i(t)$, se deriva fácilmente como diferencia entre la cuantía total de la catástrofe y la cuantía de siniestros pendiente de declarar, substituyendo (6) en la ecuación (1), que establece la relación entre las variables $R_{\tau}^i(t)$ y $S_{\tau}^i(t)$; esto es:

$$S_{\tau}^i(t) = K_{\tau}^i - R_{\tau}^i(t) = K_{\tau}^i \left[1 - e^{-\left(\alpha_{\tau}^i + \frac{(\sigma_{\tau}^i)^2}{2}\right)(t-\tau) + \sigma_{\tau}^i W_{\tau}^i(t-\tau)} \right] \quad (7)$$

y sin necesidad de definir una ecuación diferencial estocástica para describir su dinámica.

3. Variaciones del modelo original. El modelo de Ornstein-Uhlenbeck

En el modelo original, cuando incorporamos la irregularidad en el comportamiento de las declaraciones de siniestros en el tiempo, asumimos que su intensidad es proporcional a la cuantía de siniestros pendiente de declarar y lo representamos mediante un movimiento browniano geométrico.

El proceso de Wiener introducido en el modelo recoge las diferencias en la intensidad de declaración de siniestros ya que se considera que cada catástrofe tiene características propias no explicitadas en el modelo. Sin embargo, perturbar la tasa de declaración de siniestros con un ruido blanco amplificado por σ_{τ}^i puede dar lugar a valores de dicha tasa negativos, lo que provocaría un crecimiento temporal de la cuantía de siniestros pendiente de declarar, $R_{\tau}^i(t)$, debido a la variación inversa definida para dicha variable. Esto puede suceder cuando, después de realizadas las declaraciones de siniestros, la tasación de los peritos dé lugar a valoraciones de pérdidas inferiores a las estimadas inicialmente. Por ello, la incorporación de la aleatoriedad mediante un proceso de Wiener únicamente es válida para valores de σ_{τ}^i tales que la probabilidad de que la cuantía de siniestros pendiente de declarar sea creciente, es prácticamente despreciable.

Para solventar esta posible contradicción en el modelo original, consideramos en este artículo que la irregularidad de la intensidad en la declaración de los siniestros es constante en el tiempo y, por tanto, no depende de la cuantía de siniestros pendiente de declarar. Este hecho queda reflejado introduciendo un proceso de Wiener en la ecuación (4) mediante un movimiento browniano aritmético en lugar de uno geométrico, dando lugar a la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dR_\tau^i(t) = \alpha_\tau^i R_\tau^i(t) dt + \sigma_\tau^i dW_\tau^i(t - \tau) \quad (8)$$

Este tipo de proceso gaussiano se conoce como proceso de Ornstein-Uhlenbeck y su solución puede obtenerse a través del cálculo de Itô. Para ello, construimos un polinomio de Taylor de la función $f(Z_t, t)$, donde Z_t es un proceso de Itô de la forma $dZ_t = a_t dt + b_t dW_t$, $dt \rightarrow 0$, y detenemos su desarrollo en $o(dt)$:

$$\begin{aligned} df(Z_t, t) &= \frac{\partial f(Z_t, t)}{\partial Z_t} dZ_t + \frac{\partial f(Z_t, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(Z_t, t)}{\partial Z_t^2} (dZ_t)^2 + L \\ &= \frac{\partial f(Z_t, t)}{\partial Z_t} (a_t dt + b_t dW_t) + \frac{\partial f(Z_t, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(Z_t, t)}{\partial Z_t^2} (a_t dt + b_t dW_t)^2 + L \\ &= \frac{\partial f(Z_t, t)}{\partial Z_t} (a_t dt + b_t dW_t) + \frac{\partial f(Z_t, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(Z_t, t)}{\partial Z_t^2} b_t^2 + o(dt) \\ &= \left(a_t \frac{\partial f(Z_t, t)}{\partial Z_t} + \frac{\partial f(Z_t, t)}{\partial t} + b_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(Z_t, t)}{\partial Z_t^2} \right) dt + b_t \frac{\partial f(Z_t, t)}{\partial Z_t} dW_t \end{aligned} \quad (9)$$

Utilizamos (9) para aplicar el proceso de Itô en (8) con la función $f(R_\tau^i(t), t) = R_\tau^i(t) e^{\alpha_\tau^i t}$:

$$d(R_\tau^i(t) e^{\alpha_\tau^i t}) = (-\alpha_\tau^i R_\tau^i(t) e^{\alpha_\tau^i t} + \alpha_\tau^i R_\tau^i(t) e^{\alpha_\tau^i t}) dt + \sigma_\tau^i e^{\alpha_\tau^i t} dW_\tau^i(t - \tau) = \sigma_\tau^i e^{\alpha_\tau^i t} dW_\tau^i(t - \tau) \quad (10)$$

Integrando entre 0 y $t - \tau$ ambos lados de la igualdad y considerando la condición de contorno inicial establecida en la Sección 2, la expresión de la cuantía de siniestros pendiente de declarar, $R_\tau^i(t)$, en este caso es:

$$R_\tau^i(t) = K_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i (t - \tau)} + \sigma_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i (t - \tau)} \int_0^{t - \tau} e^{\alpha_\tau^i s} dW_\tau^i(s) \quad (11)$$

A partir de este resultado, la cuantía declarada de siniestros hasta t , $S_\tau^i(t)$, se obtiene de forma simple, substituyendo (11) en la ecuación (1) y operando:

$$\begin{aligned} S_\tau^i(t) &= K_\tau^i - \left(K_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i (t - \tau)} + \sigma_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i (t - \tau)} \int_0^{t - \tau} e^{\alpha_\tau^i s} dW_\tau^i(s) \right) = \\ &= K_\tau^i (1 - e^{-\alpha_\tau^i (t - \tau)}) - \sigma_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i (t - \tau)} \int_0^{t - \tau} e^{\alpha_\tau^i s} dW_\tau^i(s) \end{aligned} \quad (12)$$

$R_\tau^i(t)$ es un proceso gaussiano cuyos momentos principales, media y varianza, resultan:

$$\begin{aligned}
E[R_\tau^i(t)] &= K_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i(t-\tau)} \\
\text{Var}[R_\tau^i(t)] &= E[R_\tau^i(t) - E(R_\tau^i(t))]^2 = E\left[\sigma_\tau^i e^{\alpha_\tau^i(t-\tau)} \int_0^{t-\tau} e^{\alpha_\tau^i s} dW_\tau^i(s)\right]^2 = \\
&= (\sigma_\tau^i)^2 e^{-2\alpha_\tau^i(t-\tau)} E\left(\int_0^{t-\tau} e^{2\alpha_\tau^i s} (dW_\tau^i(s))^2\right) = (\sigma_\tau^i)^2 e^{-2\alpha_\tau^i(t-\tau)} E\left(\int_0^{t-\tau} e^{2\alpha_\tau^i s} ds\right) = \\
&= (\sigma_\tau^i)^2 e^{-2\alpha_\tau^i(t-\tau)} \frac{1}{2\alpha_\tau^i} (e^{2\alpha_\tau^i(t-\tau)} - 1) = \frac{(\sigma_\tau^i)^2}{2\alpha_\tau^i} (1 - e^{-2\alpha_\tau^i(t-\tau)})
\end{aligned}$$

y, por tanto, $R_\tau^i(t)$ sigue una distribución normal de parámetros:

$$R_\tau^i(t) \approx N\left(K_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i(t-\tau)}, \frac{(\sigma_\tau^i)^2}{2\alpha_\tau^i} (1 - e^{-2\alpha_\tau^i(t-\tau)})\right) \quad (13)$$

4. Determinación del índice de pérdidas por catástrofes en el modelo de Ornstein-Uhlenbeck

Un índice de pérdidas por catástrofes se define como el cociente entre la cuantía total de pérdidas asociadas a una o varias catástrofes ocurridas a lo largo de un determinado periodo de tiempo y un valor constante cuya definición depende del tipo de índice utilizado. Este índice permite cuantificar la magnitud de las declaraciones de siniestros que se esperan en la industria aseguradora después de la ocurrencia de una o varias catástrofes.

Los bonos sobre catástrofes que utilizan índices de pérdidas como desencadenantes de las indemnizaciones sólo consideran, para la elaboración de dichos índices, la ocurrencia de una catástrofe durante el periodo de riesgo y, a la hora de realizar los pagos, se basan en el valor que el índice de pérdidas utilizado alcance en el momento del vencimiento del contrato, T' . Por tanto, el valor del índice al vencimiento del bono T' puede definirse como:

$$LI(T') = \delta_\tau^i \times \frac{S_\tau^i(T')}{cte} = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta_\tau^i = 0 \\ \frac{S_\tau^i(T')}{cte} & \text{si } \delta_\tau^i = 1 \end{cases} \quad (14)$$

Substituyendo en (14) $S_\tau^i(T')$ por su expresión dada en la ecuación (12), el valor de dicho índice tiene la siguiente expresión:

$$LI(T') = \delta_{i,\tau} \times \frac{S_\tau^i(T')}{cte} = \frac{\delta_\tau^i}{cte} \times \left[K_\tau^i (1 - e^{-\alpha_\tau^i(T'-\tau)}) - \sigma_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i(T'-\tau)} \int_0^{T'-\tau} e^{\alpha_\tau^i s} dW_\tau^i(s) \right] \quad (15)$$

Resulta evidente que $LI(T')$ es aleatorio porque $S_\tau^i(T')$ es una variable aleatoria: *a priori*, en el momento de la emisión del bono, se desconoce si se va a producir la catástrofe cubierta en el mismo y, por tanto, se ignora el momento de su ocurrencia y la cuantía de los daños asociados a dicha catástrofe.

A continuación, se analiza cómo se va modificando la distribución de probabilidad del índice de pérdidas cuando, en lugar de realizar la valoración en el momento de la emisión del bono, se alcanza un instante $t \in [\tau, T']$ y se incorpora la información disponible sobre las declaraciones siniestralas realizadas hasta ese momento. Para ello, se define una nueva variable aleatoria condicionada, $LI^*(T') = LI(T')/F_t$, que representa la cuantía total de las pérdidas declaradas hasta T' , siendo F_t una filtración que representa la posible historia de declaraciones de siniestros realizadas durante el intervalo $[\tau, t]$.

Para obtener $LI^*(T') = LI(T')/F_t$, se calcula, en primer lugar, la cuantía total de declaraciones de pérdidas en cualquier momento $t \in [\tau, T']$, $LI(t)$, que es el condicionante de $LI(T')$ (es decir $LI(t) \cong F_t$), resultando:

$$LI(T') = \delta_{i,\tau} \times \frac{S_\tau^i(T')}{cte} = \frac{\delta_\tau^i}{cte} \times \left[K_\tau^i (1 - e^{-\alpha_\tau^i (t-\tau)}) - \sigma_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i (t-\tau)} \int_0^{t-\tau} e^{\alpha_\tau^i s} dW_\tau^i(s) \right] \quad (16)$$

Determinado $LI(t)$, se introduce en la variable $LI(T')$ dando lugar al siguiente valor del índice condicionado:

$$LI^*(T') = \frac{(\delta_\tau^i / F_t)}{cte} \left[L(t) + (K_\tau^i / F_t) (1 - e^{-\alpha_\tau^i (T'-t)}) - \sigma_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i (T'-t)} \int_{t-\tau}^{T'-t} e^{\alpha_\tau^i s} dW_\tau^i(s) \right] \quad (17)$$

A partir de esta expresión, el precio del bono sobre catástrofes en un momento t de su periodo de negociación puede calcularse aplicando la teoría general de valoración de opciones –véase, por ejemplo, Loubergé *et al.* (1999) o Pérez-Fructuoso (2008)–.

5. Validación del modelo. Estimación de los parámetros y comparación de los modelos original y de Ornstein-Ulhembeck

En la aplicación práctica del modelo teórico desarrollado para determinar un índice de pérdidas por catástrofes desencadenante de los bonos sobre catástrofes, los principales parámetros a estimar son la tasa de declaración de siniestros y la volatilidad incorporada mediante el proceso de Wiener en el modelo original y a través del proceso de Ornstein-Ulhembeck en el modelo alternativo. Para ello, se

dispone de datos sobre el porcentaje de siniestros pendiente de declarar, acumulado semanalmente, en 6 inundaciones ocurridas en distintas regiones de España en las que este tipo de sucesos se producen con elevada frecuencia¹: Alcira (01/10/1991), San Sebastián (23/06/1992), Barcelona (14/09/1999), Zaragoza (20/10/2000), Valencia (20/10/2000) y Murcia (20/10/2000).

Semana	Alcira	San Sebastián	Barcelona	Zaragoza	Valencia	Murcia
0	100	100	100	100	100	100
1	84,94	88,08	90,68	60,11	97,54	88,46
2	53,65	36,04	68,38	56,91	80,18	75,55
3	34,96	23,67	50,68	38,3	60,15	48,7
4	24,05	16,68	41,42	29,79	43,16	31,13
5	18,86	12,29	31,58	23,4	31,96	21,41
6	13,36	9,94	25,43	19,15	27,55	15,78
7	10,53	8,72	19,56	18,09	19,54	11,27
8	8,04	7,76	16,68	15,43	15,29	8,71
9	6,94	6,8	13,28	15,43	14,76	8,24
10	5,23	5,78	10,54	10,64	14,7	6,57
11	4,08	5,18	8,15	6,91	11,06	5,36
12	3,71	4,33	6,8	3,72	8,46	4
13	3,56	3,45	6,13	3,72	6,98	3,38
14	2,6	2,69	3,41	2,66	6,21	2,6
15	1,75	1,81	3,41	2,66	5,17	2,8
16	1,3	1,59	2,61	1,6	4,22	2,29
17	0,77	1,39	1,81	1,6	3,5	2,25
18	0,29	1,16	1,26	1,6	2,72	2,14
19	0,0	0,96	0,56	0	2,26	1,67
20		0,76	0,0		1,88	1,28
21		0,45			1,69	1,09
22		0,28			1,61	0,93
23		0,2			0,9	0,66
24		0,17			0,54	0,66
25		0,11			0,36	0,62
26		0,06			0,19	0,16
27		0,0			0,0	0,0

Tabla 1: Datos asociados a seis inundaciones ocurridas en España

En el modelo original $R_{\tau}^i(t)$ es una variable aleatoria cuya distribución depende de la distribución de probabilidad de la cuantía total de la catástrofe, K_{τ}^i . Si realizamos la hipótesis, habitual en la literatura actuarial, de que dicha cuantía es un valor constante –véase, por ejemplo, Cummins y Geman (1995) o Geman y Yor (1997) –, la variable $R_{\tau}^i(t)$ seguirá una distribución lognormal, siendo los parámetros de la distribución normal asociada (Johnson *et al.*, 1994):

$$N\left(\ln K_{\tau}^i - \left(\alpha_{\tau}^i + \frac{(\sigma_{\tau}^i)^2}{2}\right)(t - \tau), \sigma_{\tau}^i \sqrt{t - \tau}\right)$$

con $E[R_{\tau}^i(t)] = K_{\tau}^i e^{-\alpha_{\tau}^i(t-\tau)}$.

¹ Estos datos se han obtenido a través del Departamento Técnico y de Reaseguro del Consorcio de Compensación de Seguros.

Sin embargo, considerando las propiedades de la distribución normal así como las características de los datos disponibles, es posible obtener una expresión más apropiada para obtener los estimadores de los parámetros de los modelos analizados, α_τ^i y σ_τ^i , a partir de la cuantía de siniestros pendiente de declarar en t y en $t-1$, operando como sigue:

$$\frac{R_\tau^i(t)}{R_\tau^i(t-1)} = \frac{K_\tau^i e^{-\left(\alpha_\tau^i + \frac{(\sigma_\tau^i)^2}{2}\right)(t-\tau) + \sigma_\tau^i w_\tau^i(t-\tau)}}{K_\tau^i e^{-\left(\alpha_\tau^i + \frac{(\sigma_\tau^i)^2}{2}\right)(t-\tau-1) + \sigma_\tau^i w_\tau^i(t-\tau-1)}} = e^{-\left(\alpha_\tau^i + \frac{(\sigma_\tau^i)^2}{2}\right) + \sigma_\tau^i w_\tau^i(1)}$$

Esto implica que $\frac{R_\tau^i(t)}{R_\tau^i(t-1)}$ sigue una distribución lognormal, con parámetros de tendencia y dispersión de la distribución normal asociada:

$$\ln \frac{R_\tau^i(t)}{R_\tau^i(t-1)} \sim N\left(-\left(\alpha_\tau^i + \frac{(\sigma_\tau^i)^2}{2}\right), (\sigma_\tau^i)^2\right)$$

Entonces, si definimos la variable $X(t)$ como:

$$X(t) = -\ln \frac{R_\tau^i(t)}{R_\tau^i(t-1)} \sim N\left(\alpha_\tau^i + \frac{(\sigma_\tau^i)^2}{2}, (\sigma_\tau^i)^2\right) \quad (18)$$

y aplicamos sobre este resultado el método de estimación de máxima-verosimilitud, el estimador de la tasa de declaración de siniestros resulta:

$$(\hat{\alpha}_\tau^i)_{EMV} = \bar{X} - \frac{(\hat{\sigma}_\tau^i)_{EMV}^2}{2} \quad (19)$$

donde $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X(t)$ y $(\hat{\sigma}_\tau^i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X(t) - \bar{X})^2$ son, respectivamente, la media y la varianza muestral.

La varianza muestral ha sido estimada a través de la cuasi-varianza muestral, ya que esta última es un estimador insesgado de la primera:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (X(t) - \bar{X})^2 \quad (20)$$

Con los datos disponibles en la Tabla 1, calculamos en primer lugar la media muestral para cada catástrofe. Una vez obtenida dicha media, determinamos la cuasi-varianza aplicando la ecuación (20) y, finalmente, calculamos la tasa de declaración de siniestros, $(\hat{\alpha}_\tau^i)_{EMV}$, substituyendo los valores obtenidos de la media muestral y la cuasi-varianza en la ecuación (19). Los resultados derivados de este proceso se muestran en las Tablas 2 y 3.

	\bar{x}	$(\hat{\sigma}_\tau^i)^2$	$(\hat{\alpha}_\tau^i)_{EMV}$
Alcira	0,324613586	0,0422098269	0,3035086722
San Sebastián	0,28533003	0,0351605321	0,2677497687
Barcelona	0,27289414	0,0311010319	0,2573436251
Zaragoza	0,22973148	0,0434054683	0,2080287412
Valencia	0,240099621	0,0257693877	0,2281115136
Murcia	0,24760583	0,068754683	0,2132287838

Tabla 2: Estimadores para el modelo original

Alcira	$N(0,324613586;0,0422098269)$
San Sebastián	$N(0,28533003;0,0351605321)$
Barcelona	$N(0,27289414;0,0311010319)$
Zaragoza	$N(0,22973148;0,0434054683)$
Valencia	$N(0,240099621;0,0257693877)$
Murcia	$N(0,24760583;0,068754683)$

Tabla 3: Distribuciones normales de $X(t)$ para el modelo original

En el modelo de Ornstein-Ulhemberk, $R_\tau^i(t)$ es un proceso gaussiano definido en (13) como:

$$R_\tau^i(t) \approx N \left(K_\tau^i e^{-\alpha_\tau^i(t-\tau)}, \frac{(\hat{\sigma}_\tau^i)^2}{2\alpha_\tau^i} (1 - e^{-2\alpha_\tau^i(t-\tau)}) \right)$$

A continuación, obtenemos una expresión cerrada para los estimadores de los parámetros tasa de declaración de siniestros y volatilidad en este modelo, aplicando el método de máxima-verosimilitud. Para ello, en primer lugar determinamos la función de densidad de $R_\tau^i(t)$ condicionada a $R_\tau^i(t-1)$ en un proceso de Ornstein-Ulhembeck:

$$f(R_\tau^i(t) | R_\tau^i(t-1), \alpha_\tau^i, \sigma_\tau^i) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{(\hat{\sigma}_\tau^i)^2}{2\alpha_\tau^i} (1 - e^{-2\alpha_\tau^i \Delta t}) \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\left(R_\tau^i(t) - R_\tau^i(t-1) e^{-\alpha_\tau^i \Delta t} \right)^2}{\frac{(\hat{\sigma}_\tau^i)^2}{\alpha_\tau^i} (1 - e^{-2\alpha_\tau^i \Delta t})}}$$

y, considerando que $\Delta t = t - (t-1) = 1$, el logaritmo de la función de densidad condicional resulta:

$$\ln f(R_\tau^i(t) | R_\tau^i(t-1), \alpha_\tau^i, \sigma_\tau^i) = -\frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(\sigma_\tau^i)^2}{2\alpha_\tau^i} (1 - e^{-2\alpha_\tau^i}) \right) - \frac{\alpha_\tau^i}{(\sigma_\tau^i)^2} \frac{(R_\tau^i(t) - R_\tau^i(t-1)e^{-\alpha_\tau^i})^2}{(1 - e^{-2\alpha_\tau^i})}$$

A partir de esta expresión, sumando todas las funciones de densidad individuales para las n observaciones, se obtiene la siguiente función log-verosímil:

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha_\tau^i, \sigma_\tau^i) &= \sum_{j=1}^n \ln f(R_\tau^i(j) | R_\tau^i(j-1), \alpha_\tau^i, \sigma_\tau^i) = \\ &= -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \left(\frac{(\sigma_\tau^i)^2}{2\alpha_\tau^i} (1 - e^{-2\alpha_\tau^i}) \right) - \frac{\alpha_\tau^i}{(\sigma_\tau^i)^2 (1 - e^{-2\alpha_\tau^i})} \sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j) - R_\tau^i(j-1)e^{-\alpha_\tau^i})^2 \end{aligned} \quad (21)$$

Para obtener el estimador del parámetro σ_τ^i , derivamos la ecuación (21) respecto de dicho parámetro e igualamos a cero:

$$\frac{\partial \ln L(\alpha_\tau^i, \sigma_\tau^i)}{\partial \sigma_\tau^i} = -\frac{n}{\sigma_\tau^i} + \frac{2\alpha_\tau^i}{(\sigma_\tau^i)^3 (1 - e^{-2\alpha_\tau^i})} \sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j) - R_\tau^i(j-1)e^{-\alpha_\tau^i})^2 = 0 \quad (22)$$

Operando en la expresión (22), el estimador máximo-verosímil de σ_τ^i , $(\hat{\sigma}_\tau^i)_{EMV}$ resulta:

$$(\hat{\sigma}_\tau^i)_{EMV}^2 = \frac{2\alpha_\tau^i}{n(1 - e^{-2\alpha_\tau^i})} \sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j) - R_\tau^i(j-1)e^{-\alpha_\tau^i})^2 \quad (23)$$

Seguidamente, sustituimos el estimador dado por la expresión (23) en la función log-verosímil (21) para obtener la misma función, pero dependiente exclusivamente de α_τ^i :

$$\ln L(\alpha_\tau^i) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j) - R_\tau^i(j-1)e^{-\alpha_\tau^i})^2 \right) - \frac{n}{2} \quad (24)$$

El estimador máximo-verosímil de α_τ^i , $(\hat{\alpha}_\tau^i)_{EMV}$ se calcula derivando, en primer lugar, la expresión (24) respecto a α_τ^i e igualando a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\alpha_\tau^i, \sigma_\tau^i)}{\partial \alpha_\tau^i} &= -\frac{n}{2} \frac{2 \sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j) - R_\tau^i(j-1)e^{-\alpha_\tau^i}) R_\tau^i(j-1)}{\sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j) - R_\tau^i(j-1)e^{-\alpha_\tau^i})^2} = \\ &= -n \frac{\sum_{j=1}^n R_\tau^i(j) R_\tau^i(j-1) - \sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j-1))^2 e^{-\alpha_\tau^i}}{\sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j) - R_\tau^i(j-1)e^{-\alpha_\tau^i})^2} = 0 \end{aligned}$$

Entonces, resolviendo esta ecuación para α_τ^i , $(\hat{\alpha}_\tau^i)_{EMV}$, resulta:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^n R_\tau^i(j) R_\tau^i(j-1) - \sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j-1))^2 e^{-\alpha_\tau^i} \\ \Leftrightarrow e^{-\alpha_\tau^i} &= \frac{\sum_{j=1}^n R_\tau^i(j) R_\tau^i(j-1)}{\sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j-1))^2} \\ \Leftrightarrow -\alpha_\tau^i &= \ln \left(\frac{\sum_{j=1}^n R_\tau^i(j) R_\tau^i(j-1)}{\sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j-1))^2} \right) \\ \Leftrightarrow (\hat{\alpha}_\tau^i)_{EMV} &= -\ln \left(\frac{\sum_{j=1}^n R_\tau^i(j) R_\tau^i(j-1)}{\sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j-1))^2} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

Por tanto, las expresiones de los estimadores máximo-verosímiles de los parámetros del modelo de Ornstein-Uhlenbeck son:

$$\begin{aligned} (\hat{\alpha}_\tau^i)_{EMV} &= \ln \left(\sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j-1))^2 \right) - \ln \left(\sum_{j=1}^n R_\tau^i(j) R_\tau^i(j-1) \right) \text{ y} \\ (\hat{\sigma}_\tau^i)_{EMV}^2 &= \frac{2 \hat{\alpha}_\tau^i}{n(1 - e^{-2\hat{\alpha}_\tau^i})} \sum_{j=1}^n (R_\tau^i(j) - R_\tau^i(j-1)e^{-\hat{\alpha}_\tau^i})^2 \end{aligned}$$

Los resultados obtenidos para la estimación de los parámetros del modelo de Ornstein-Uhlenbeck en las seis inundaciones consideradas y el proceso gaussiano seguido por $R_t^i(t)$ se muestran en las Tablas 4 y 5.

	$(\hat{\alpha}^i)_{EMV}$	$(\hat{\sigma}^i)_{EMV}^2$
Alcira	0,2990821063	16,3988925399
San Sebastián	0,3858518171	52,6399850026
Barcelona	0,2068640449	9,2310979432
Zaragoza	0,3385379521	28,6902771354
Valencia	0,1773690288	14,8410725629
Murcia	0,2297645911	14,3896476717

€

Tabla 4: Estimadores para el modelo de Ornstein-Uhlenbeck

Alcira	$N\left(K_t^i \exp(-0,2990821063t); 27,4153688791(1 - \exp(-0,5981642126t))\right)$
San Sebastián	$N\left(K_t^i \exp(-0,3858518171t); 68,2126954814(1 - \exp(-0,7717036342t))\right)$
Barcelona	$N\left(K_t^i \exp(-0,2068640449t); 22,3119922743(1 - \exp(-0,4137280898t))\right)$
Zaragoza	$N\left(K_t^i \exp(-0,3385379521t); 42,3737973252(1 - \exp(-0,6770759041t))\right)$
Valencia	$N\left(K_t^i \exp(-0,1773690288t); 41,8367080763(1 - \exp(-0,3547380577t))\right)$
Murcia	$N\left(K_t^i \exp(-0,2297645911t); 31,3138930696(1 - \exp(-0,4595291821t))\right)$

Tabla 5: Proceso gaussiano seguido $R_t^i(t)$ por para el modelo de Ornstein-Uhlenbeck

Para contrastar la bondad del ajuste realizado y determinar qué modelo se ajusta mejor a la realidad que queremos representar, realizamos una comparación de los errores de los estimadores en las 6 inundaciones disponibles para el modelo original y el modelo de Ornstein-Uhlenbeck mediante un análisis gráfico; véanse Figuras 1 a 12.

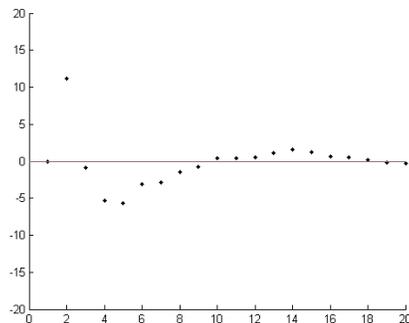


Figura 1: Errores Serie Alcira modelo original

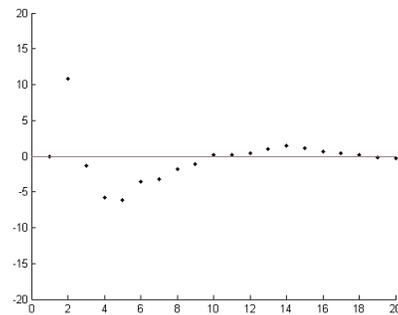


Figura 2: Errores Serie Alcira modelo OU

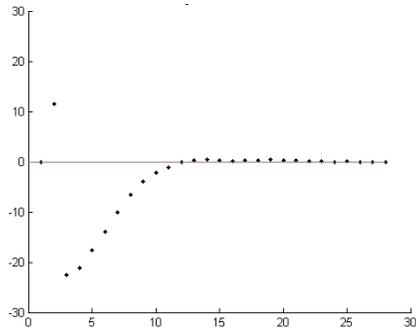


Figura 3: Errores Serie San Sebastián modelo original

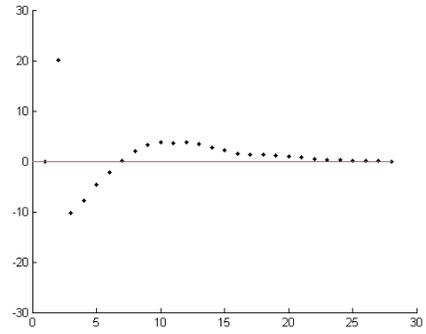


Figura 4: Errores Serie San Sebastián modelo OU

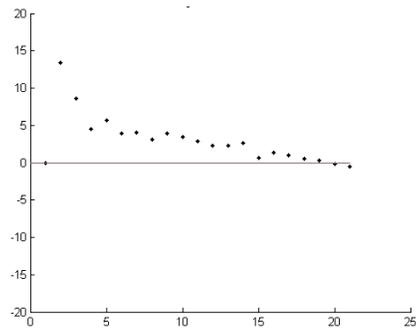


Figura 5: Errores Serie Barcelona modelo original

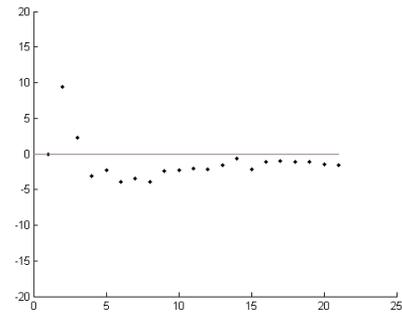


Figura 6: Errores Serie Barcelona modelo OU

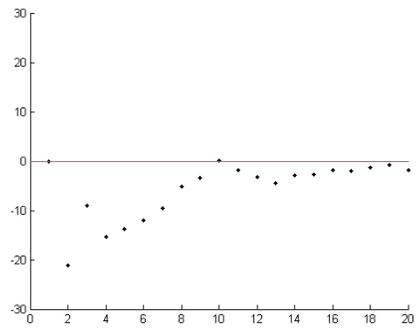


Figura 7: Errores Serie Zaragoza modelo original

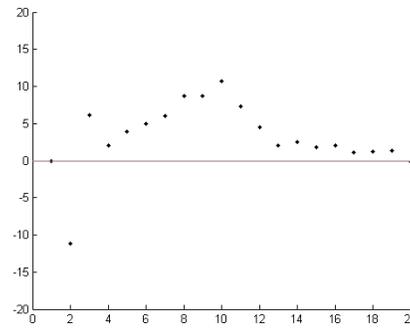


Figura 8: Errores serie Zaragoza modelo OU

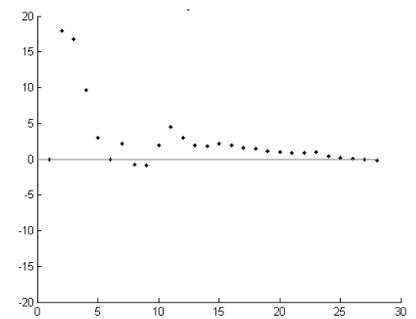


Figura 9: Errores Serie Valencia modelo original

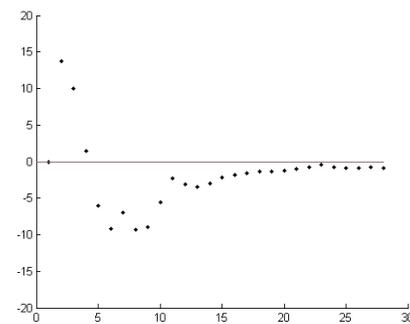


Figura 10: Errores Serie Valencia modelo OU

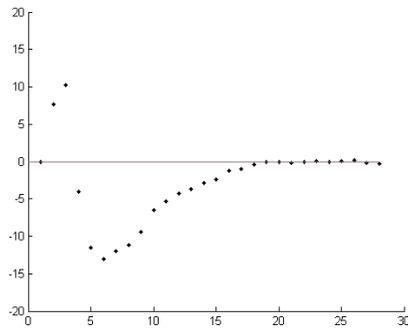


Figura 11: Errores Serie Murcia modelo original

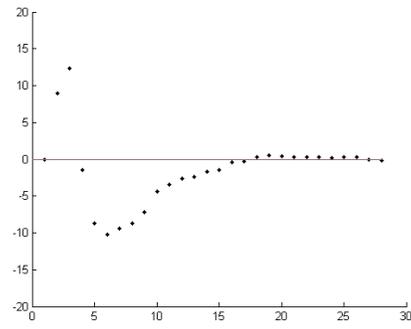


Figura 12: Errores serie Murcia modelo OU

Del análisis visual de los gráficos de errores mostrados en las Figuras 1 a 12, podemos extraer la siguientes conclusiones:

- Los dos modelos desarrollados dan lugar a los mismos resultados en la serie de datos de Alcira.
- El modelo de Ornstein-Uhlenbeck parece ajustarse mejor que el modelo original en la serie de datos de Barcelona.
- No es posible concluir cuál de los dos modelos se ajusta mejor a los datos disponibles sobre la inundación ocurrida en Valencia.
- Los errores para las estimaciones de la serie de datos de Murcia son mayores que los errores que se producen en las tres series de datos analizadas anteriormente. A pesar de ello, el modelo de Ornstein-Uhlenbeck parece presentar menores errores y por tanto sería la mejor aproximación a los datos reales disponibles.
- La inundación ocurrida en Zaragoza presenta unas características algo diferentes al resto de inundaciones analizadas. El proceso de declaración de siniestros en este caso se vio alterado por la ocurrencia, inmediatamente después de la catástrofe original, de otras inundaciones de menor intensidad lo que condicionó los datos disponibles, dando lugar a mayores errores en las estimaciones realizadas sobre los valores reales. Por esta razón, el análisis gráfico en este caso, pone de manifiesto que el modelo de Ornstein-Uhlenbeck se ajusta mejor al principio del proceso declaración; mientras que para las semanas finales del mismo, el modelo original resulta más fiable.
- Finalmente, las predicciones sobre la inundación de San Sebastián producen los mismos resultados que en el caso anterior. El modelo de Ornstein-Uhlenbeck se ajusta mejor al principio y el modelo original al final del proceso de declaración de siniestros.

En resumen, para las series de datos de Alcira y Valencia, los dos modelos dan lugar a los mismos resultados. Sin embargo, en el resto de series, el modelo de Ornstein-Uhlenbeck parece dar mejores resultados (menores errores) que el modelo original. Para verificar estos resultados gráficos, calculamos la raíz de la suma cuadrado de los errores para cada modelo (véase Tabla 6), a partir de la siguiente expresión:

$$RSCE = \sqrt{SCE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}$$

donde Y_i es el valor observado e \hat{Y}_i es el valor estimado.

	RSCE Modelo Original	RSCE OU
Alcira	3,2541320138	3,3478729786
San Sebastián	7,926406564	4,9404532812
Barcelona	4,3877716557	2,9974719773
Zaragoza	8,0230716144	5,5091970335
Valencia	5,2483780645	5,0638737475
Murcia	5,8600227682	4,9538378985
Media	5,7832970622	4,4687844861

Tabla 6: Valores de la RSCE para los modelos original y de Ornstein-Uhlenbeck

Como puede derivarse de los resultados obtenidos, el modelo de Ornstein-Uhlenbeck presenta unos errores menores para todas las inundaciones consideradas, excepto para Alcira en la que el modelo de Ornstein-Uhlenbeck tiene un error ligeramente superior al modelo original. En los casos de San Sebastián, Zaragoza y Murcia, los errores cometidos con el modelo original se reducen considerablemente al realizar el ajuste con el modelo de Ornstein-Uhlenbeck. Podemos concluir, por tanto, que el modelo de Ornstein-Uhlenbeck ajusta mejor que el modelo original la realidad catastrófica que queremos representar.

6. Conclusiones

Para determinar el índice de pérdidas por catástrofes y proceder posteriormente a la valoración del activo derivado del que es subyacente, la mayor parte de los modelos precedentes –véase, por ejemplo, Cummins y Geman (1995) o Geman y Yor (1997)– asumen un crecimiento temporal de la cuantía declarada de siniestros y representan dicha evolución a través de un movimiento geométrico browniano. La hipótesis central de este artículo, sin embargo, establece un modelo browniano aditivo o proceso de Ornstein-Uhlenbeck para representar la dinámica lineal decreciente de la variable cuantía de siniestros pendientes de declarar. Una vez determinada esta variable, el total de siniestros declarados se obtiene como diferencia entre la cuantía total de la catástrofe y la cuantía de siniestros pendiente de declaración, eliminando de esa forma la necesidad de definir una ecuación diferencial estocástica para describir su dinámica. El índice de pérdidas catastróficas resulta de multiplicar la

cuantía declarada de siniestros por una variable aleatoria dicotómica que indica si se ha producido o no la catástrofe.

El modelo continuo propuesto en este trabajo permite calcular fácilmente el índice de pérdidas desencadenante de los bonos sobre catástrofes, lo que simplifica considerablemente su tarificación a lo largo de su periodo de maduración.

La estimación de los parámetros, tanto del modelo original como del modelo alternativo basado en un proceso browniano aditivo de Ornstein-Uhlenbeck, se ha realizado aplicando la metodología de máxima verosimilitud sobre los datos de las seis inundaciones disponibles ocurridas en diferentes localidades españolas. La comparación realizada de los dos modelos, mediante el análisis gráfico de los errores y el cálculo de la raíz cuadrada del error cuadrático medio, permite concluir que el modelo alternativo propuesto, desarrollado a partir de un proceso gaussiano de Ornstein-Uhlenbeck, es el que mejor ajusta la realidad que queremos representar.

Referencias

- Aase, K. (1999): "An Equilibrium Model of Catastrophe Insurance Futures and Spreads". *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 24, 69-96.
- Aase, K. (2001): "A Markov model for the pricing of catastrophe insurance futures and spreads". *Journal of Risk and Insurance*, 68 (1), 25-50.
- Alegre, A.; Pérez-Fructuoso, M.J. & Devolder, P. (2003): "Modèles discrets d'options sur risques catastrophiques". *Belgian Actuarial Bulletin*, 3, 28-32.
- Arnold, L. (1974): *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. New York: John Wiley & Sons.
- Cummins, J.D. & Geman, H. (1995): "Pricing Catastrophe Insurance Futures and Call Spreads: An Arbitrage Approach". *Journal of Fixed Income*, 4, 46-57.
- Cox, S.H. & Pedersen, H. (2000): "Catastrophe Risk Bonds". *North American Actuarial Journal*, 4(4), 56-82.
- Embrechts, P. & Meister, S. (1997): "Pricing insurance derivatives, the case of CAT futures". En H. Bühlmann (ed.): *Securitization of Insurance Risk: The 1995 Bowles Symposium*. SOA Monograph M-FI97-1. Schaumburg: Society of Actuaries, pp. 15-26.
- Geman, H. & Yor, M. (1997): "Stochastic time changes in catastrophe option pricing". *Insurance: Mathematics and Economics*, 21, 185-193.
- Johnson, N.L., Kotz, S. & Balakrishnan, N. (1994): *Continuous Univariate Distributions, Volume 1*. New York: John Wiley & Sons.

- Lee, J.P. & Yu, M.T. (2002): "Pricing default-risky Cat bonds with moral hazard and basis risk". *Journal of Risk and Insurance*, 69 (1), 25-44.
- Loubergé, H.; Kellezi E. & Gilli, M. (1999): "Using Catastrophe-Linked Securities to Diversify Insurance Risk: A Financial Analysis of Cat Bonds". *Journal of Insurance Issues*, 22 (2), 125-146.
- Muermann, A. (2003): "Actuarially Consistent Valuation of Catastrophe Derivatives". *The Wharton Financial Institutions Center Working Paper Series*, 03-18, 21 pp. Recuperado de <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.201.6584&rep=rep1&type=pdf>.
- Nowak, P. & Romaniuk, M. (2013): "Pricing and simulations of catastrophe Bonds". *Insurance: Mathematics and Economics*, 52, 18-28.
- Pérez-Fructuoso, M.J. (2009): "Elaborating a catastrophic loss index for insurance-linked securities (ILS) a continuous model". *Asian-Pacific Journal of Risk and Insurance*, 3(2), 34-45.
- Pérez-Fructuoso, M.J. (2008): "Modeling loss index trigger for Cat bonds: A continuous approach". *Variance*, 2(2), 253-265.
- Zong-Gang, M. & Chao-Qun, M. (2013): "Pricing catastrophe risk Bonds: a mixed approximation method". *Insurance: Mathematics and Economics*, 52, 243-254.



El compromiso exportador en Colombia: un análisis de redes neuronales

ESCANDÓN BARBOSA, DIANA MARCELA

Departamento de Gestión de Organizaciones

Pontificia Universidad Javeriana, Cali (Colombia)

Correo electrónico: dmescandon@javerianacali.edu.co

HURTADO AYALA, ANDREA

Universidad del Valle, Cali (Colombia)

Correo electrónico: andrea.hurtado.ayala@correounivalle.edu.co

RESUMEN

El compromiso exportador suele ser un aspecto empresarial clave para explicar por qué unas empresas exportan más que otras. En este artículo se analizan los determinantes del compromiso exportador en las pymes colombianas desde el punto de vista comportamental y actitudinal mediante un modelo de redes neuronales estimado sobre una muestra de 306 pymes exportadoras. Los resultados permiten concluir que las pymes colombianas se centran en invertir sus recursos financieros propios para impulsar las exportaciones, y la actitud del empresario al riesgo resulta determinante para asumir la actividad exportadora como estrategia empresarial generadora de mayores rendimientos.

Palabras claves: compromiso exportador; pymes; redes neuronales; recursos financieros; directivos.

Clasificación JEL: F23; M16; M12.

MSC2010: 91G80; 68T05; 62M45.

Export Commitment in Colombia: An Analysis of Neural Networks

ABSTRACT

The export commitment is often a key to explain why some firms export more than other business aspect. This article discusses the determinants of export commitment in Colombian SMEs from the behavioral and attitudinal viewpoint using a neural network model estimated on a sample of 306 exporting SMEs. The results suggest that Colombian SMEs focus on investing their own resources to boost exports and employers' behavior risks making decisive for export activity as a business strategy that generates higher returns.

Keywords: export commitment; SMEs; neural networks; financing resources; managerial.

JEL classification: F23; M16; M12.

MSC2010: 91G80; 68T05; 62M45.



1. INTRODUCCIÓN

La actividad de internacionalización es de suma importancia para cualquier nación y para cualquier empresa. Desde el punto de vista de los gobiernos, la actividad de internacionalización es crucial porque contribuye al desarrollo económico de los países; además, el nivel de internacionalización aumenta la prosperidad social y ayuda al desarrollo de la industria nacional y crea nuevos puestos de trabajo. Este intercambio con el exterior, amplía la accesibilidad del consumidor a bienes y servicios, mejorando el estándar y calidad de vida de las personas (Rosales, 1997).

Se entiende como internacionalización el conjunto de compromisos que permite el establecimiento de vínculos, más o menos estables, entre las empresas y los mercados internacionales (Alonso, 1994). Esta internacionalización tiene un resultado reflejado en la extensión de los objetivos de la empresa con respecto a la exportación de un producto a un mercado extranjero, a través de la planificación y ejecución de la estrategia de mercadeo internacional. Estos resultados son tanto cuantitativos como cualitativos y dependen, en gran medida, del compromiso exportador de las empresas (O’Cass y Julian, 2003). El éxito en la expansión internacional de una empresa depende de actitudes, percepciones y expectativas de la dirección respecto a la contribución de la misma, al logro de las metas y fines empresariales (Cavusgil, 1984; Gray, 1977). Para medir el compromiso que tiene una empresa frente a la actividad exportadora, se deben tener en cuenta los recursos financieros que invierte la empresa, el rol que desempeñan los directivos para diseñar una estrategia de expansión internacional, y la capacidad del recurso humano encargado de dirigir el proceso exportador (Leonidou y Katsikeas, 1996).

Son numerosas las investigaciones que han evidenciado la relación directa entre el compromiso exportador y el resultado de la empresa en los mercados exteriores (Aaby y Slater, 1989; Louter *et al.*, 1991; Cavusgil y Zou, 1994; O’Cass y Julian, 2003; Lages y Montgomery, 2004). Por consiguiente, es importante determinar que las empresas con alto compromiso exportador están dispuestas a formular estratégicamente su negocio e invertir mayores recursos en los mercados exteriores, adquiriendo más competencia para el desarrollo de las operaciones internacionales lo cual influirá de manera positiva en su resultado exportador.

Teniendo en cuenta lo anterior, esta investigación pretende: analizar los factores que determinan ese compromiso exportador aplicado a las pymes colombianas, determinando cómo influye el apoyo financiero propio y la experiencia internacional del recurso humano sobre el compromiso exportador de las pymes colombianas; y establecer la relación entre la inversión en capital humano y el compromiso exportador en la pymes colombianas.

2. MARCO TEÓRICO

Una manera de entender cómo los organismos públicos deben enfocarse hacia las necesidades de las empresas, es a través de la consideración de las barreras que encuentran en el comercio internacional (Rosson y Seringhaus, 1991; Hibbert, 1990). Los exportadores y los no exportadores difieren en la percepción de los factores que se consideran obstáculos a la exportación (Amposah *et al.*, 1997; Barcelo, 1998), mientras los exportadores apuntan a los factores externos, los no exportadores apuntan a factores como el desconocimiento de cómo iniciarse en un nuevo mercado, la no percepción de demandas comerciales y la suficiencia de la demanda interna.

Este tipo de cuestionamientos conduce la atención hacia el análisis del compromiso exportador de las empresas, que está enmarcado por diferentes variables que soportan el crecimiento de las empresas y el mercado donde desarrollan sus estrategias que deben estar alineadas con la economía del país objetivo y subsectores a integrar. Todo esto permitirá al empresario con su experiencia formular alternativas de financiamiento, recurso humano, estructura organizacional y comportamiento en el tiempo.

2.1 UNA CONCEPCIÓN DEL COMPROMISO EXPORTADOR

El análisis del compromiso exportador se divide en dos enfoques: el primer enfoque considera el compromiso exportador como una actitud y/o disposición positiva por parte de la dirección de la empresa hacia la actividad exportadora (Cavusgil y Nevin, 1981; Bello y Barksdale, 1986); y el segundo enfoque conceptualiza el compromiso exportador como una conducta centrada en la manifestación de su existencia, específicamente analizando la planificación empresarial, los recursos financieros y la gestión de la empresa destinada a la exportación (Cavusgil y Zou, 1994).

A partir de estos dos enfoques, se considera que el compromiso exportador se manifiesta mediante actitudes del directivo frente al comercio internacional (Pauwels y Matthyssens, 1999), recursos financieros, gerenciales y humanos destinados a las actividades exportadoras (Cavusgil y Zou, 1994), y contratación de directivos con conocimientos en negocios internacionales (Czinkota y Ronkainen, 2002).

Es importante enfatizar que el nivel de compromiso exportador depende ampliamente de los siguientes factores:

- El papel que desempeñen los directivos en el diseño e implantación de la estrategia de expansión internacional y del nivel de recursos disponibles para su desarrollo (Leonidou y Katsikeas, 1996).
- La predisposición de los dirigentes para destinar recursos de todo tipo a la actividad exportadora (Donthu y Kim, 1993).

Dentro de los factores enunciados que determinan el compromiso que asumen las empresas al momento de exportar, se puede analizar el carácter evolutivo proporcionado por las cualidades subjetivas del empresario partiendo desde sus niveles más bajos de compromiso, analizando cómo se va desplazando hacia formas superiores de internacionalización debido a su recorrido y acumulación de experiencias que elevan las capacidades frente al exterior y disminuyen la percepción al riesgo (Lages y Montgomery, 2004).

Según Cannon y Willis (1983) y Rosson y Seringhaus (1991), exportar es un proceso dinámico y las necesidades de apoyo de las empresas varían a la vez que acumulan experiencia. Las empresas, de acuerdo a su tamaño y nivel financiero, requieren diferentes tipos de ayuda, las cuales varían porque algunas empresas a pesar del tiempo de creación y buen nivel financiero pueden tener poca participación internacional por su bajo compromiso exportador y baja exposición al riesgo (Pauwels y Matthyssens, 1999).

Reid (1981) argumenta que la actitud de quien toma las decisiones, la experiencia, la motivación y las expectativas, son determinantes que van variando según la etapa del proceso en que se encuentre la organización.

Por otra parte, las empresas internacionalizadas deben afrontar una serie de problemas que son el origen de la necesidad de ayuda por parte de los organismos de promoción. Según Kotabe y Czinkota (1992), los problemas en la internacionalización varían en función de la etapa del proceso de internacionalización y este nivel avanza centrándose en ayudas ofrecidas por diferentes instituciones u organizaciones como recursos financieros, recursos humanos, recursos tecnológicos, así como en dificultades derivadas de la inversión exterior, conocimientos del mercado exterior, problemática logística y barreras comerciales.

Ahora bien, los directivos de la empresa, según Leonidou *et al.* (1998) y O’Cass y Julian (2003), son el elemento fundamental que guía la empresa en el inicio, desarrollo, mantenimiento y éxito de la actividad exportadora. Por lo tanto, un aspecto clave lo constituyen la formación, el conocimiento de idiomas y las capacidades y habilidades de los recursos humanos dedicados a la actividad exportadora para su estrategia competitiva.

2.1.1 EL COMPROMISO EN RECURSOS

Los objetivos de una empresa con respecto a la exportación se alcanzan a través de la planificación y ejecución de una estrategia de comercialización de las exportaciones, cuyos objetivos pueden lograrse siempre y cuando la organización cuente con una serie de recursos destinados para tal fin (Cavusgil y Zou, 1994). Los recursos, capacidades y limitaciones de las empresas influyen profundamente en la elección de su estrategia de *marketing* y en su capacidad de ejecutar la estrategia elegida (Aaker 1988; Porter 1980).

Dentro del compromiso exportador (Gundlach *et al.*, 1995; Meyer y Allen 1991), la dimensión económica es considerada bajo dos formas: la cantidad de los recursos económicos asignados a un determinado mercado de exportación y la especificidad de estos recursos; es decir, la dificultad de encontrar usos alternativos para los recursos asignados.

Tanto recursos como habilidades de una empresa constituyen sus fuentes de ventaja competitiva sostenible (Day y Wensley 1988; Porter 1985), incluyendo habilidades como la experiencia internacional (Douglas y Craig 1989), el grado de participación de las empresas internacionales, y los recursos disponibles para el desarrollo de las exportaciones (Terpstra 1987). La posesión de tales recursos y capacidades permite a un exportador identificar las

condiciones de los mercados de exportación, desarrollar estrategias de *marketing* adecuadas y ejecutarlas eficazmente.

Cavusgil y Zou (1994) señalan que las empresas comprometidas a exportar poseen la habilidad de planificar las tareas de entrada y asignar recursos gerenciales y no gerenciales esenciales para la exportación. El compromiso exportador permite configurar los flujos de información del mercado para reducir la incertidumbre y los riesgos relacionados con la exportación, y también permite a una empresa asignar recursos correctamente y proactivamente hacia las actividades de exportación en curso (Styles y Ambler, 2000) para lograr ventajas posicionales en el extranjero.

Las capacidades específicas para la exportación afectan el compromiso exportador de una empresa y son esenciales para procesar e interpretar información procedente de los mercados extranjeros (O’Cass y Julian, 2003). Zou y Stan (1998) señalan que las capacidades específicas son uno de los principales determinantes del éxito exportador de las empresas. Estas capacidades incluyen la fluidez en lenguas extranjeras y la educación formal en negocios internacionales, dado que esto ayuda a desarrollar más la gestión de prácticas efectivas para el desarrollo y procesamiento de la información acerca de las necesidades y preferencias de los consumidores extranjeros (Morgan *et al.*, 2004); adicionalmente, los contactos permanentes con los mercados extranjeros, a través de visitas periódicas o asistencia a ferias internacionales, fortalecen el enfoque exportador de la empresa (Bello y Gilliland, 1997), y el conocimiento de la idiosincrasia de los mercados extranjeros reduce la incertidumbre en la toma de decisiones y favorece la expansión de la actividad exportadora (Julien y Ramangalahy, 2003).

Morgan *et al.* (2004) indican que los recursos dan forma al compromiso exportador. En este sentido, se consideran los recursos que se derivan del tamaño de la empresa, otros asociados a la experiencia de la empresa en los mercados exteriores o aquellos que se derivan de la estructura disponible para la realización de la actividad exportadora y vinculados a la recopilación de información sobre los mercados extranjeros. Las grandes empresas, que generalmente poseen más recursos financieros y de gestión, tienen una mayor capacidad de producción, alcanzan economías de escala superiores y se enfrentan a niveles más bajos de riesgo percibido en operaciones de exportación (Bonaccorsi, 1992;

Brouthers *et al.*, 2009). Del mismo modo, el tamaño de la empresa influye en el número de empleados y directivos vinculados a la exportación, así como sobre las actitudes empresariales hacia la asignación de recursos para exportación (Katsikeas 1994). La experiencia en la exportación es indicativa del nivel de conocimiento de los mercados extranjeros, y estos conocimientos generan oportunidades y son una fuerza impulsora en la internacionalización de la empresa (Bodur, 1994).

Por otra parte, las empresas que demuestran altos niveles de compromiso exportador, generalmente cuentan con un departamento de exportación para lograr sus metas de exportación (Katsikeas, 1994). La existencia del departamento de exportación separado facilita la comercialización y el diseño de tareas para desplegar más recursos de forma efectiva (Jain, 2002). Por último, las decisiones relacionadas con el compromiso de recursos a los mercados extranjeros dependen del nivel de conocimiento de la empresa acerca de las oportunidades y amenazas de los mercados extranjeros (Cavusgil y Zou, 1994). La presencia de un sistema de recolección de información sobre los mercados extranjeros ayuda a reducir la incertidumbre en el desarrollo de exportaciones y así genera una actitud más proactiva para acercarse a las oportunidades de exportación (Souchon y Diamantopoulos, 1996). Esto requiere un mayor nivel de recursos destinados a la actividad de exportación, así como una mayor propensión y voluntad de seguir exportando en el futuro.

2.1.2 COMPROMISO DADO EN LA ACTITUD DEL DIRECTIVO

Dentro de esta parte del compromiso exportador, se tiene en cuenta la motivación, la identificación, la lealtad, la participación y comportamiento del directivo (Gundlach *et al.*, 1995). En la mayoría de los estudios de resultados de exportación, esta dimensión se operacionaliza evaluando el apoyo de los gerentes, porque permite determinar la estrategia elegida y sus objetivos. La estrategia del directivo refleja su actitud frente a sus recursos internos y habilidades, y las oportunidades y riesgos creados por su ambiente externo (Hofer y Schendel, 1978).

La alta dirección debe imponer las condiciones necesarias para que una empresa sea competitiva, facilitando la implementación de diferencias reflejadas en el conocimiento del mercado y la habilidad de los empleados, aspectos que influyen en el éxito exportador

(Porter, 1991; Storey, 1994). Generalmente, se resalta el papel de la dirección sobre el compromiso exportador de la empresa (Leonidou *et al.*, 1998, Da Silva y Rocha, 2001; Arteaga, 2003; Chrysochoidis y Theoharakis, 2004), distinguiendo las percepciones de los directivos que afectan las políticas exportadoras de la empresa, particularmente en las pymes, donde el directivo tiene un rol central en la identificación de los factores que incentivan las exportaciones (Chetty y Blankenburg, 2000).

Se menciona que la decisión de exportar combina el estímulo de la empresa y la percepción por parte del directivo de los factores que favorecen la internacionalización (Simpson y Kujawa, 1974), generando un ambiente adecuado para identificar las ventajas y barreras frente a la exportación. Dentro de la percepción del directivo, se incluyen aspectos relacionados con el riesgo que en muchas ocasiones está ligado a la experiencia exportadora de la empresa y a la importancia dada a las barreras a la exportación (Miesenböck, 1988; Leonidou y Katsikeas, 1996). En el caso de las pymes, el riesgo percibido ante las exportaciones es más alto con respecto a las empresas grandes (Rialp-Criado, 1997); la existencia de ciertas percepciones hacia la exportación se resume en el riesgo a exportar (Eshghi, 1992) y también se asocia con el nivel de tolerancia asumido por el directivo. La importancia que los directivos conceden a las barreras a la exportación se asocia a la incertidumbre de poder superarlas, e influye negativamente sobre la actividad exportadora (Aaby y Slater, 1989; Louter *et al.*, 1991; Leonidou *et al.*, 1998).

3. METODOLOGIA

En esta investigación se utilizó la metodología cuantitativa para explorar los determinantes del compromiso exportador. Mediante un método de muestreo aleatorio estratificado, fueron seleccionadas 306 empresas exportadoras colombianas. A estas empresas se les realizó una encuesta en el año 2012 (ANIF, 2012), conformada por un cuestionario con componentes sobre *marketing*, innovación, desarrollo exportador, entre otros aspectos interrogados.

Con el objeto de determinar los principales determinantes del compromiso exportador en las empresas colombianas, se parte de la escala de compromiso exportador de Lages y Montgomery (2004), que es una adaptación de la escala creada por Cavusgil y Zou (1994). Esta medida considera una escala de 1 a 5, donde 1 es muy en desacuerdo y 5 es

muy de acuerdo, haciendo referencia a la percepción de los encuestados sobre cuatro aspectos que representan el compromiso exportador de una empresa: 1) la planificación empresarial, 2) cantidad de recursos invertidos en la actividad exportadora, 3) compromiso de la administración, y 4) inversión de mayores recursos financieros para la exportación con respecto a la inversión para el mercado interno.

Esta escala está conformada por los dos enfoques que definen el compromiso exportador y que fueron explicados en el marco teórico; poseen medidas de tipo actitudinal y comportamental. En esta investigación, se adaptan tres indicadores que recogen los aspectos mencionados por Cavusgil y Zou (1994) y Lages y Montgomery (2004); y siendo consecuentes con autores como Donthu y Kim (1993) y Bello *et al.* (2003), que evaluaron el compromiso exportador con indicadores del nivel de recursos financieros y humanos comprometidos en el comercio internacional y la actitud de los dirigentes frente a las operaciones en mercados internacionales.

La utilización de indicadores de tipo formativo en lugar de escalas, es validada por Diamantopoulos (1999), quien considera que este tipo de medición también es de carácter idóneo, siempre y cuando el constructo a medir (en este caso, compromiso exportador) sea una función de sus indicadores (Bollen, 1989) y, por lo tanto, se debe verificar la validez y fiabilidad de la escala conformada por indicadores.

En esta investigación se adaptaron los siguientes indicadores:

- Recursos financieros internos (RFpropios): cantidad de recursos propios invertidos en la empresa para actividades de exportación.
- Recursos financieros externos (RFexter): cantidad de recursos externos adquiridos e invertidos en la empresa para actividades de exportación.
- Recursos humanos (KH): cantidad de recursos invertidos en formación de capital humano.
- Capacidad de gestión (GEST): número de años de experiencia en los negocios internacionales (directivo).

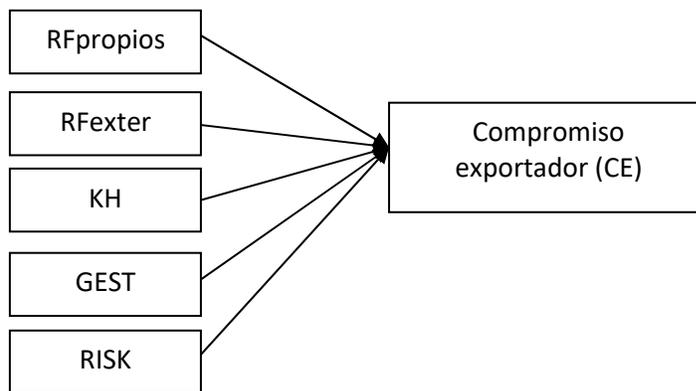
Para medir el componente actitudinal del directivo, se utiliza la siguiente variable dicotómica (respuesta sí/no):

- Actitud al riesgo (RISK): propensión a asumir riesgos.

Ahora bien, la variable compromiso exportador (CE) se mide preguntando a los directivos si hubo un alto compromiso de la administración para las actividades de exportación. Esta variable es de tipo dicotómica (sí/no) y permite comprobar si el compromiso exportador depende de las variables mencionadas anteriormente.

De acuerdo a la descripción de las variables, la investigación sobre los determinantes del compromiso exportador de las empresas exportadoras colombianas se puede expresar por medio de la Figura 1.

Figura 1. Modelo: determinantes del compromiso exportador



3.1. MODELO

Para el desarrollo del análisis estadístico, se aplica el modelo de redes neuronales artificiales por ser un procedimiento que recientemente se ha utilizado para analizar datos, y que se considera dentro de los métodos de técnicas multivariantes (Hair *et al.*, 1999). Las redes neuronales se basan en la imitación de la estructura y funcionamiento del cerebro humano y poseen una alta capacidad para agrupar partiendo de la definición de ciertas variables (Hawley *et al.*, 1990).

Las redes neuronales artificiales son un instrumento que permite procesar datos con un sistema diferente a los métodos estadísticos comunes, dado que simula el sistema neuronal humano, conectando diversas unidades de procesamiento de información llamadas neuronas (variables), pasando por tres tipos de procesos llamados capas: capas de entrada,

ocultas y salida (Hawley *et al.*, 1990). Las redes neuronales se encuentran conformadas por los siguientes conceptos: el tipo de modelo de red neuronal, que puede ser perceptrón multicapa o función de base radial; las unidades de procesamiento o nodos encargados de almacenar y procesar la información y generar el resultado; la red o sistema de nodos que sirven de canal de comunicación entre los nodos de entrada y los nodos de salida; y la función de aprendizaje que recoge los errores de predicción y da como resultado el modelo con mejor ajuste.

Para estimar este modelo, es necesario cumplir con ciertos pasos con el fin de que la red neuronal estimada sea capaz de explicar la variable objeto de investigación. Los pasos seguidos fueron:

- 1) Selección de las variables relevantes para el estudio: de acuerdo al apartado anterior, se definieron cinco variables determinantes del compromiso exportador. Para ello, se realizó una elección conforme a escalas y medidas testeadas con anterioridad. Dado que el modelo debe incluir variables que puedan predecir realmente a la variable dependiente (compromiso exportador), se realizó un análisis de fiabilidad de la escala por medio del alpha de Cronbach, que debe ser superior de 0,8 (Nunnally, 1978), logrando cumplirse en los diferentes indicadores relacionados con el compromiso exportador como: recursos financieros internos (0,881), recursos financieros externos (0,893), capacidad de gestión (0,926), recursos humanos (0,939) y actitud al riesgo (0,918). Esta verificación de fiabilidad permite garantizar que el modelo tenga la capacidad de proporcionar una respuesta correcta y generalizable.
- 2) Pre-procesamiento de los datos: utilizando el *software* SPSS 20, se implementa el algoritmo de aprendizaje *backpropagation* en una arquitectura del tipo perceptrón multicapa, que constituye una red neuronal que simula la capacidad del cerebro humano para acopiar y almacenar información a través de capas de entradas que tienen una capa de salida asociada que representa el resultado deseado, y reduciendo el margen de error entre el resultado real y el que ofrece la red. El algoritmo *backpropagation* (Rumelhart y McClelland, 1986) se basa en un proceso iterativo que incorpora en la red los datos a procesarse.

- 3) Resultados y validación: dado que el método de redes neuronales artificiales itera varias veces hasta encontrar el mejor modelo capaz de ser generalizado, los datos se subdividen en tres grupos: entrenamiento, validación y test (Ripley, 1996). Este es un proceso realizado por el *software* y que requiere de esta subdivisión para evitar problemas de sobreajuste del modelo, dado que el grupo de entrenamiento minimiza los errores, el grupo de validación controla el proceso y el grupo test corrobora la eficacia del modelo obtenido proporcionando una estimación sin sesgos de error.
- 4) Validación del rendimiento de la red neuronal: puede obtenerse por medio de diferentes indicadores: índices de especificidad, de sensibilidad o de eficacia y análisis de la curva ROC (Masters, 1993). En esta investigación se utilizará la curva ROC.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

El análisis de resultados se divide en dos apartados. Primero, se describen los resultados generales del modelo y la validación mediante la curva ROC y, en segundo lugar, se explican detenidamente los aportes a la investigación a partir del modelo obtenido.

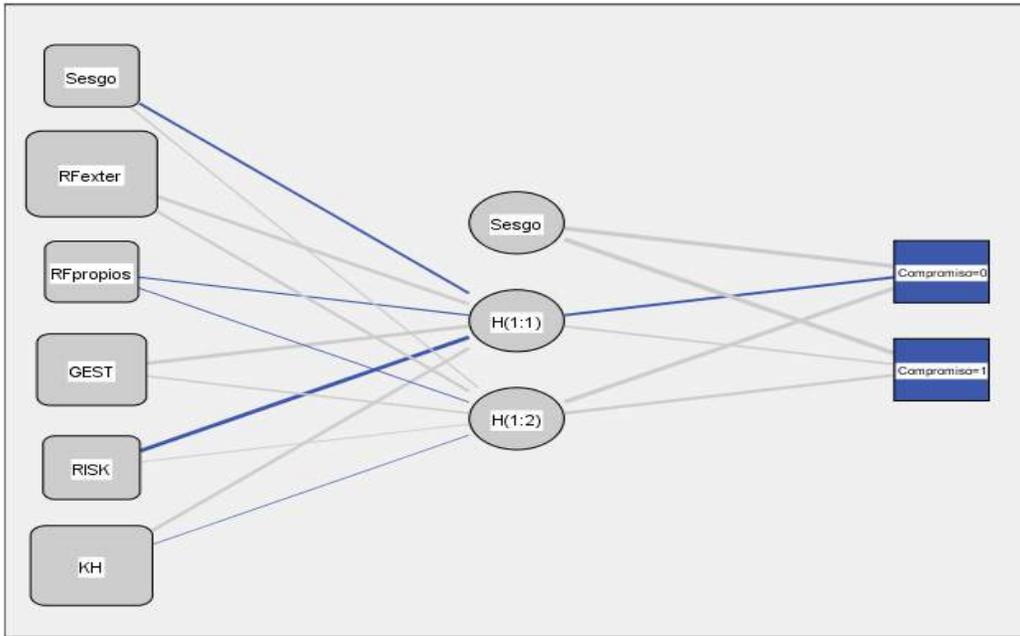
4.1 MODELO DE RED NEURONAL

La Figura 2 muestra el modelo de red neuronal utilizado en este estudio: la arquitectura estaba compuesta por 5 neuronas en la capa de entrada (variables explicativas), dos neuronas en la capa oculta y una neurona en la capa de salida (variable dependiente).

El modelo de red neuronal estimado obtuvo resultados satisfactorios; el área bajo la curva ROC (véase Figura 3) dio como resultado un valor de 0,611, que implica la existencia de mayor cantidad de datos a favor de la validez predictora del modelo (mayor que 0,5).

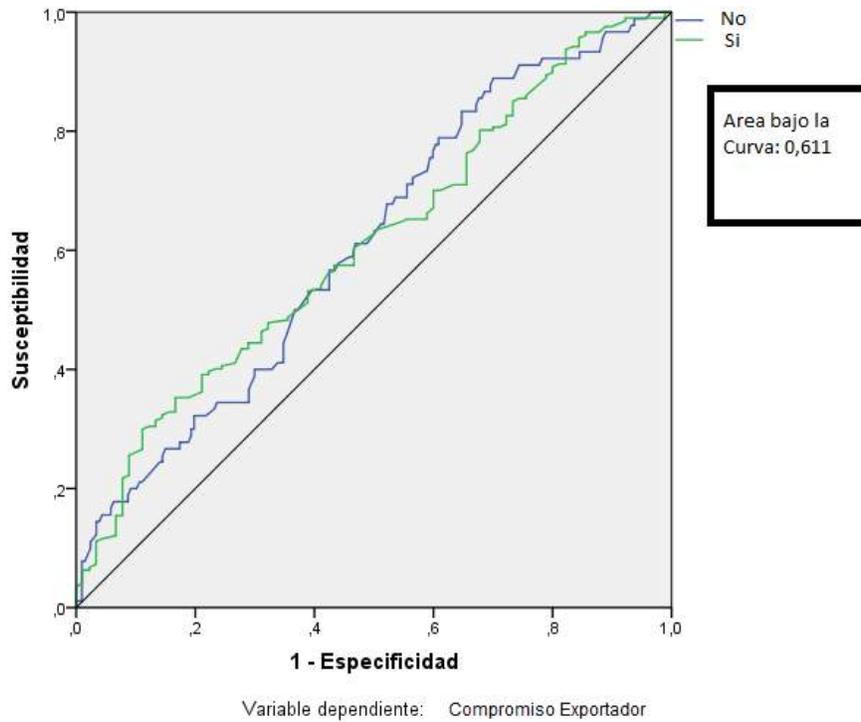
Después de comprobar la validez del modelo, se examina la capacidad predictora de las cinco variables consideradas como determinantes del compromiso exportador. Para ello, se obtiene el nivel de importancia de las variables independientes (véase Tabla 1), que permite obtener las variables con mayor poder predictivo sobre el compromiso exportador.

Figura 2: Red neuronal obtenida



Fuente: elaboración propia (resultado del *software* SPSS)

Figura 3: Curva ROC



Fuente: elaboración propia (resultados del *software* SPSS)

Tabla 1: Nivel de importancia de las variables independientes

Variables	Importancia
Recursos financieros propios	100%
Recursos humanos	76,6%
Recursos financieros externos	35,4%
Actitud al riesgo	11,3%
Capacidad de gestión	9,6%

Fuente: elaboración propia

Según la Tabla 1, se muestra el nivel de impacto de cada una de las variables que están ligadas al compromiso exportador de los empresarios colombianos. Se encuentra que los recursos financieros propios tienen el mayor nivel de importancia con un 100%; en segundo lugar, se ubica la variable recursos humanos con un nivel del 76,6% de la escala; en tercer lugar, se tiene el financiamiento externo con un 35,4% de poder predictivo; en cuarto lugar, se tiene la actitud al riesgo, que alcanzó un 11,3% de poder predictivo; y finalizando, en quinto lugar, se ubica la capacidad de gestión con un 9,6%.

4.2 ANÁLISIS DE LA IMPORTANCIA DE LOS DETERMINANTES DEL COMPROMISO EXPORTADOR

En estos resultados, se observa que las variables que tienen mayor influencia en el compromiso exportador de las empresas colombianas son: la inversión de recursos financieros propios y externos y el aporte del recurso humano. Estos resultados coinciden con la perspectiva comportamental del compromiso exportador (Cavusgil y Zou, 1994), donde los recursos financieros y humanos de la empresa determinan si se encuentra comprometida con la actividad exportadora, y se encuentra que, para el caso colombiano, no es adecuado considerar que el compromiso exportador tiene un enfoque actitudinal (Cavusgil y Nevin, 1981), dado que la variable que representa la actitud del directivo (actitud al riesgo) obtiene la menor capacidad predictiva en el modelo.

Inversión en Recursos Financieros Propios (100%):

Es importante observar que el promedio de estos empresarios están invirtiendo el 48% de sus recursos propios en la operación de comercio exterior, apostando un alto nivel de su capital con una importante exposición al riesgo; de allí el nivel de confianza depositado en la experiencia de sus directivos que en promedio tienen 8,5 años de experiencia, lo cual se visualiza en que solo el 32% del capital total fue llevado a esta operación de comercio, cifra manejable en toda empresa.

Como señalan Lages y Montgomery (2004), el compromiso exportador aumenta la voluntad de los directivos por esforzarse para alcanzar las metas internacionales fijadas, constituyendo una guía estratégica que orientará la toma de decisiones en los mercados exteriores; todo esto incrementa la eficacia y eficiencia en la asignación de recursos, constituyendo un estímulo esencial para el aumento de las ventas internacionales y la satisfacción de los directivos con el resultado obtenido (Zou y Stan, 1998).

Para una empresa pyme es muy importante realizar una adecuada planificación económica y financiera. Esta le permitirá decidir la mezcla de capital accionario y deuda más adecuada para su negocio. En el caso de las pymes colombianas, se observa que la actividad exportadora es impulsada principalmente por los recursos propios invertidos por la organización para tales fines, constituyéndose en la estrategia elegida para impulsar las exportaciones (Aaker, 1988). Esta opción de inversión tomada por las pymes exportadoras colombianas, resalta la presencia de habilidades adecuadas para la planificación y asignación de recursos (Cavusgil y Zou, 1994), teniendo en cuenta que son empresas pequeñas, generalmente con limitaciones de tipo financiero, pero que logran asignar un monto de recursos con el propósito de hacer parte del mercado internacional.

Recurso Humano (76,6%):

La investigación revela el nivel de inversión en capacitación del recurso humano de las pymes colombianas, donde el 92% del grupo de empresas estudiadas invierten entre 1 y 3 millones y el restante no invierte, siendo en promedio solo el 2% del capital promedio invertido del grupo de empresas.

El compromiso exportador en Colombia presenta características diferentes a los países europeos, donde este compromiso está enmarcado en el papel que desempeñan los directivos en el diseño e implantación de la estrategia de expansión internacional y la cantidad de recursos disponibles para su desarrollo. En las pymes colombianas, se observa la importancia de las actitudes y motivaciones de los directivos de las empresas en relación con las operaciones de comercio exterior (Pauwels y Matthyssens, 1999), partiendo de la valoración que se da a tener al personal capacitado y superar, de esta forma, los bajos niveles de formación de la fuerza de trabajo y del empresario, la deserción escolar y la baja calidad educacional que constituyen barreras para aumentar la productividad de las pymes. Las pymes buscan enfrentar estos retos mediante programas que favorezcan las necesidades del sector productivo y de las pymes. Sin embargo, muchas áreas requieren de acciones públicas que fortalezcan las instituciones y de políticas para mejorar la articulación entre el sistema educativo y el mercado laboral, favoreciendo itinerarios formativos, desarrollando esquemas de acreditación de competencias y capacidades adquiridas y estableciendo marcos institucionales para promover la cooperación entre las pymes (Douglas y Craig 1989).

Esta importancia que otorgan las pymes colombianas a la inversión en capital humano, va encaminada con la necesidad de conformar un área de la organización centrada en la actividad exportadora que, como indican Katsikeas (1994) y Jain (2002), forma parte de una empresa con alto compromiso exportador, dado que las empresas buscan facilitar la comercialización hacia el exterior y administrar adecuadamente los recursos asignados para la exportación. Este comportamiento permite afirmar que las pymes colombianas basan su compromiso exportador reforzando la organización interna de la empresa, tanto en la asignación de recursos como en la capacitación del personal.

Inversión en Recursos Financieros Externos (35,4%):

La investigación muestra la inversión en recursos financieros externos como un tercer factor determinante del compromiso exportador con un 35,4% de importancia frente a las demás variables descritas, reflejando que el 83% de las pymes solicitan financiación externa por debajo de 25 millones y solo el 8% fueron más allá y accedieron a financiación entre 25 y 50 millones, frente a un 6,4% que no adquiere recursos externos. Todo esto

indica que las pymes colombianas acceden al mercado financiero, pero los montos de financiación a los que acceden son relativamente bajos, justificando las innumerables razones que afectan el desarrollo exportador en las pymes, relacionados con las limitantes financieras que enfrentan (Styles y Ambler, 2000). Para mitigar esta afectación al acceso del sector banca- pymes, los gobiernos desarrollan estrategias a través de organizaciones de fomento al emprendimiento o empresas con proyectos.

Como ilustran varios estudios, el acceso al financiamiento de las empresas está estrechamente relacionado con su tamaño, nivel de inserción internacional y capacidad de exportación. Esto conduce a que una proporción más alta de empresas grandes y exportadoras puedan tener mayor acceso al crédito (Greenaway Etal, 2007; Berman y Héricourt, 2010). Aunque algunos países ampliaron el crédito empresarial, la brecha de financiación entre pymes y grandes empresas persiste como un desafío fundamental. Las diferencias más importantes entre las empresas se enfocan siempre en las diferentes tasas de interés y el plazo del préstamo para el tipo de empresa.

Actitud al Riesgo (11,3%):

La investigación arroja que el 68,4% de los empresarios de las pymes encuestadas expresaron su falta de temor y la poca preocupación al momento de hacer negocios o buscar nuevos mercados; resultado muy importante para este grupo de pequeños empresarios, de los cuales solo el 31,6% no tienen la seguridad para enfrentar estos niveles de compromiso que se espera puedan tener para sobrellevar el mundo de los negocios internacionales y crecer con estrategias que permitan minimizar su percepción de riesgo (Chetty y Blankenburg, 2000).

Colombia, por su diversidad de culturas, permite tener diferentes personalidades; empresarios de acuerdo a su región de origen, educación o formación y otros que son emprendedores por naturaleza. Los resultados encontrados en este trabajo van en línea con anteriores estudios que indican que la actitud de quien toma las decisiones, la experiencia, la motivación y las expectativas, son determinantes para afrontar las diferentes etapas del proceso donde se encuentre la organización (Reid 1981). Es importante considerar el grado de necesidad que tiene el empresario frente a la demanda externa y la satisfacción de su

mercado objetivo o la falta de conocimiento de entidades gubernamentales de ayuda a la exportación para negociaciones internacionales.

De acuerdo a los resultados obtenidos, los empresarios de las pymes colombianas tiene un bajo nivel de riesgo percibido frente a las exportaciones, yendo en contravía con lo expuesto por Rialp-Criado (1997), quien manifiesta que generalmente las pymes son mucho menos arriesgadas que las grandes empresas. Los empresarios de las pymes colombianas no se dejan influenciar por la incertidumbre que implica entrar a un mercado desconocido y esto se refleja en la inversión de recursos propios hacia la actividad exportadora, dado que al no sentir miedo a asumir riesgos de este tipo, decide destinar parte de sus recursos para ingresar a nuevos mercados y obtener mayor rentabilidad.

Capacidad de gestión (9,6%):

En la investigación se obtuvo que el 51,5 % de los directivos de estas pymes tenían 6 años de experiencia internacional y el 48,5 % restante, más de 6 años de experiencia alcanzando hasta 35 años de operación exportadora, revelando esto una etapa de madurez que fortalece el espíritu del empresario con el compromiso exportador. Se tiene en cuenta la experiencia previa de la dirección como factor clave en el proceso de desarrollo exportador, toda vez que es considerado un proceso de toma de decisiones por parte de ésta, respecto a la penetración, desarrollo e inversión en recursos para sus actividades de exportación (Rundh, 2003).

De acuerdo con los estudios realizados por Martínez (2008), la poca experiencia internacional y la carencia de un departamento de comercio exterior conducen a una menor cobertura en los mercado externos, la estandarización geográfica de la oferta y la baja intensidad exportadora; y son el reflejo del tránsito en una etapa inicial del proceso del desarrollo exportador según la clasificación de Leonidou y Katsikeas (1996). No obstante, los conocimientos, la experiencia y las habilidades de sus directivos, así como la adquisición gradual de nuevas tecnologías y la internacionalización de su canal de distribución para las exportaciones, permiten suponer que las pymes tienen el potencial para crecer en los mercados externos con niveles competitivos para hacer frente a las demandas que los mercados exijan.

En esta investigación, a pesar de que la capacidad de gestión del empresario, medida por su nivel de experiencia internacional, constituye una variable que afecta el compromiso exportador, no es el factor más relevante para que las pymes tomen el riesgo de entrar a nuevos mercados. En las pymes colombianas, sobresale el apoyo dado por los directivos para implementar una estrategia exportadora adecuada y dicho apoyo refleja su actitud frente a la inversión de recursos para favorecer el comercio internacional (Hofer y Schendel, 1978). Sin embargo, dicha actitud parece no depender de la experiencia del directivo en el campo de los negocios internacionales y este resultado guarda relación con la baja percepción de riesgo que posee el empresario y que lo conduce a asumir nuevos retos sin la condición previa de poseer experiencia exportadora.

5. CONCLUSIONES

La investigación refleja un grupo de factores o variables que influyen directamente sobre el nivel de compromiso exportador de las pymes colombianas medido con la inversión del empresario en cada una de esas variables que lo conduce a ser más competitivo y alcanzar mayor cobertura en los mercados externos teniendo en cuenta su nivel de inversión de capital propio o externo, permitiendo observar los procesos del empresario en la obtención de financiación y disposición del gobierno para el crecimiento de estas pequeños empresarios.

Se encuentra que las pymes exportadoras colombianas poseen un compromiso con las exportaciones basado en el apoyo dado por los directivos bajo la inversión de recursos propios para el desarrollo de todas las actividades guiadas hacia la exportación de sus productos, incluyendo la capacitación del personal para realizar una planificación adecuada. Las pymes colombianas también presentan una baja inversión en capital externo, que conduce a realizar cuestionamientos sobre posibles causas como el desconocimiento financiero, procesos complejos y exigentes para el financiamiento, cultura del empresario (miedo al crédito), altas tasas de interés y falta de conocimiento de las entidades de apoyo al emprendedor realizadas por el gobierno para acompañar el desarrollo de estos empresarios con entidades como Proexport o Bancoldex, entre otras.

Lo observado en la investigación refleja la profunda brecha existente en el acceso, las condiciones y los costos de financiamiento entre las pymes y grandes empresas, a pesar

de los enormes avances que el país ha logrado en este sector en los últimos años. Esta brecha obstaculiza un mayor aporte al desarrollo por parte de las pequeñas empresas que representan un volumen alto de las empresas productoras del país. De acuerdo a la estrategia competitiva del Estado, el sistema financiero en Colombia y a nivel latinoamericano ha mostrado cambios que han permitido disminuir la diferencia en el acceso a créditos y ha lanzado nuevos productos que permitan al productor pyme a acceder a estos recursos financieros y no financieros.

Es importante referenciar el nivel de experiencia que influye como impulsor del compromiso exportador demostrando que este es mayor, de acuerdo al empresario y su experiencia comercial. Sin embargo, en Colombia se marca el liderazgo en la penetración de mercados externos y a través del apoyo del empresario por medio de inversión financiera propia y bajo los preceptos de confianza y actitud arriesgada basada en la dirección objetiva y éxito en el desarrollo de los negocios; todo esto conforme a la formación y conocimiento de los miembros de la organización, un factor que resulta siendo muy relevante en el desarrollo de este liderazgo.

A partir de los resultados obtenidos, se puede concluir que el compromiso exportador de las pymes colombianas depende de la estrategia implementada por el directivo mediante la destinación de recursos a la actividad exportadora, donde prevalece la actitud frente al riesgo asumida por el empresario frente a la experiencia que pueda poseer en el mercado internacional. Se encuentra que las pymes colombianas buscan enfrentar por sí solas los retos que les demanda el mercado internacional antes de buscar apoyo en entidades externas. Esta conclusión puede representar un punto a tratar por las entidades financieras privadas y, en especial, por el gobierno para que se desarrollen políticas de socialización de los programas desarrollados para impulsar la actividad exportadora y para apoyar a las pequeñas y medianas empresas. Adicionalmente, los resultados obtenidos permiten que los empresarios reconozcan sus fortalezas y debilidades para afrontar el mercado internacional, con el objetivo de replantear sus propios planes estratégicos. Finalmente, esta investigación permite caracterizar los aspectos tenidos en cuenta por las pymes en el desarrollo de su actividad exportadora, haciendo parte de un campo de estudio altamente explorado por los académicos; pero que, dado el panorama actual que viven las empresas, basado en una fuerte competencia e integración comercial, hace que sea un tema

de relevancia que no tiene un campo ilimitado de exploración y que permite dar herramientas a las empresas para centrar sus actividades exportadoras.

REFERENCIAS

- Aaby, N. y Slater, S. (1989): “Management influences on export performance: A review of the empirical literature 1978-88”. *International Marketing Review*, 6(4), 7-26.
- Aaker, D. (1988): *Strategic Market Management*, 2nd Edition. Nueva York: John Wiley & Sons.
- Alonso, J. (1994): “El proceso de internacionalización de la empresa. Información Comercial Española”. *Revista de Economía*, 725, 127–143.
- Amposah, W.; Adu-Nyako, K. y Pick, D. (1997): “Evaluation of Export Promotion Programs on Trade of High-Valued and Processed Food Products: Implications for North Carolina Agribusiness”. *International Agricultural Trade Research Consortium, Working Papers Series*, 96-5, 29 pp. Recuperado de <http://ageconsearch.umn.edu/record/51209/files/96-5.pdf>.
- ANIF (2012): *La gran encuesta Pyme. Segundo Semestre 2012. Informe de Resultados*. Bogotá: ANIF. Recuperado de <http://suscripciones.anif.co/sites/default/files/uploads/GranEncuesta%20II-2012.pdf>.
- Arteaga, J. (2003): *La actividad exportadora y las barreras a la exportación*. Tesis doctoral. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.
- Barcelo, V. (1998): *2ª parte del Estudio sobre Dinámica Exportadora y Ventajas Competitivas de la Economía Valenciana. Encuesta Exportadora*. No publicado
- Bello, D. y Barksdale, H. (1986): “Exporting at Industrial Trade Shows”. *Industrial Marketing Management*, 15 (3), 197–206.
- Bello, D. y Gilliland, D. (1997): “The Effect of Output Controls, Process Controls, and Flexibility on Export Channel Performance”. *Journal of Marketing*, 61, 22–38.

- Bello, D.; Chelariu, C. y Zhang, L. (2003): "The antecedents and performance consequences of relationalism in export distribution channels". *Journal of Business Research*, 56(1), 1–16.
- Berman, N. y Héricourt, J. (2010): "Financial Factors and the Margins of Trade: Evidence from Cross-Country Firm-Level Data." *Journal of Development Economics*, 93(2), 206–17.
- Bodur, M. (1994): "Foreign Market Indicators, Structural Resources and Marketing Strategies as Determinants of Export Performance". *Advances in International Marketing*, 6, 183–205.
- Bollen, K. (1989): *Structural equations with latent variables*. Nueva York: John Wiley & Sons.
- Bonaccorsi, A. (1992): "On the Relationship between Firm Size and Export Intensity". *Journal of International Business Studies*, 23(4), 605–635.
- Brouthers, L.; Nakos, G.; Hadjimarcou, J. y Brouthers, K. (2009): "Key Factors for Successful Export Performance for Small Firms". *Journal of International Marketing*, 17(3), 21–38.
- Cannon, T. y Wilis, M. (1983): "The Smaller Firm in Overseas Trade". *European Small Business Journal*, 1(3), 45–55.
- Cavusgil, S.T. (1984): "Organizational characteristics associated with export activity". *Journal of Management Studies*, 21(1), 3–22.
- Cavusgil, S.T. y Nevin, J.R. (1981): "Internal determinants of export marketing behavior: an empirical investigation". *Journal of Marketing Research*, 18, 114–119.
- Cavusgil, S.T. y Zou, S. (1994): "Marketing strategy-performance relationship: an investigation of the empirical link in export market ventures". *Journal of Marketing*, 58(1), 1–21.
- Chetty, S. y Blankenburg, D. (2000): "Internationalization of small to medium-sized manufacturing firms: A network approach". *International Business Review*, 9, 77–93.

- Chrysochodis, G. y Theoharakis, V. (2004): “Attainment of competitive advantage by the exporter-importer dyad: The role of export offering and import objectives”. *Journal of Business Research*, 57, 329–337.
- Czincota, M. y Ronkainen, I. (2002): *Marketing internacional*, 6ª edición. México: Prentice Hall.
- Da Silva, P. y Rocha, A. (2001): “Perception of export barriers to Mercosur by Brazilian firms”. *International Marketing Review*, 18(6), 589–610
- Day, G. y Wensley, R. (1988): “Assessing Advantage: A Framework for Diagnosing Competitive Superiority”. *Journal of Marketing*, 52, 1–20.
- Diamantopoulos, A. (1999): “Viewpoint. Export performance measurement: reflective versus formative indicators”. *International Marketing Review*, 16(6), 444–457.
- Donthu, N. y Kim S.H. (1993): “Implications of firm controllable factors on export growth”. *Journal of Global Marketing*, 7(1), 47–63.
- Douglas, S. y Craig, S. (1989): “Evolution of Global Marketing Strategy: Scale, Scope and Synergy”. *Columbia Journal of World Business*, 24(3), 47–58.
- Eshghi, A. (1992): “Attitude-behaviour inconsistency in exporting”. *International Marketing Review*, 9(3), 40–61.
- Gray, B. (1997): “Profiling managers to improve export promotion targeting”. *Journal of International Business Studies*, 28(2), 387–420.
- Greenaway, D.; Guariglia, A. y Kneller, R.A. (2007): “Financial Factors and Exporting Decisions”. *Journal of International Economics*, 73 (2), 377–95.
- Gundlach, G.; Achrol, R. y Mentzer, J. (1995): “The Structure of Commitment in Exchange”. *Journal of Marketing*, 59, 78–92.
- Hair, J.; Anderson, J.; Tatham, R. y Black, W. (1999): *Análisis Multivariante*. 5ª edición, Madrid: Prentice Hall Iberia.
- Hawley, D.; Johnson, J. y Raina, D. (1990): “Artificial neural Systems: a new tool of financial decision-making”. *Financial Analysts Journal*, 46(6), 63–72.

- Hibbert, E.P. (1990): *The Management of International Trade Promotion*. Londres: Routledge.
- Hofer, C. y Schendel, D. (1978): *Strategy Formulation: Analytical Concepts*. St. Paul: West Publishing.
- Jain, S. (2002): *Marketing Internacional*. Mexico: Thomson International.
- Julien, P. y Ramangalahy, C. (2003): “Competitive Strategy and Performance of Exporting SMEs: An Empirical Investigation of the Impact of Their Export Information Search and Competencies”. *Entrepreneurship Theory and Practice*, 27(3), 227–45.
- Katsikeas, C. (1994): “Export Competitive Advantages: The Relevance of Firm Characteristics”. *International Marketing Review*, 11(3), 33–53.
- Kotabe, M. y Czinkota, M. (1992): “State Government Promotion of Manufacturing Exports: a Gap Analysis”. *Journal of International Business Studies*, 23(4), 637–658.
- Lages, L. y Montgomery, D. (2004): “Export performance as an antecedent of export commitment and marketing strategy adaptation. Evidence from small and medium-sized exporters”. *European Journal of Marketing*, 38(9/10), 1186–1214.
- Leonidou, L. y Katsikeas, C. (1996): “The export development process: An integrative review of empirical models”. *Journal of International Business Studies*, 27(2), 517–551.
- Leonidou, L.; Katsikeas, C. y Piercy, N. (1998): “Identifying managerial influences on exporting: Past research and future directions”. *Journal of International Marketing*, 6(2), 74–102.
- Louter, P.; Ouwerkerk, C. y Bakker, B. (1991): “An inquiry into successful exporting”. *European Journal of Marketing*, 25(6), 7–23.
- Martínez, P. (2008). “Proceso del desarrollo exportador de la pyme colombiana”. *Cuadernos de Gestión*, 9(1), 47–66.
- Masters, T. (1993): *Practical neural networks recipes in C++*. Londres: Academic Press.
- Meyer, J. y Allen, N. (1991): “A Three-Component Conceptualization of Organizational Commitment”. *Human Resource Management Review*, 1, 61–89.

- Miesenböck, K. (1988): “Small Business and Exporting: A literature review”. *International Small Business Journal*, 6(2), 42–61.
- Morgan, N.; Kaleka, A. y Katsikeas, K. (2004): “Antecedents of Export Venture Performance: A Theoretical Model and Empirical Assessment”. *Journal of Marketing*, 68, 90–108.
- Nunnally, J. (1991): *Teoría Psicométrica*. México: Editorial Trillas.
- O’cass, A. y Julián, C. (2003): “Examining firm and environmental influences on export marketing mix strategy and export performance of Australian exporters”. *European Journal of Marketing*, 37(3/4), 366–384.
- Pauwels, P. y Matthyssens, P. (1999): “A strategy process perspective on export withdrawal”. *Journal of International Marketing*, 7(3), 10–37.
- Porter, M.E. (1980): *Competitive Strategy*. Nueva York: Free Press.
- Porter, M. (1985). *Competitive Advantage: Creating and Sustaining Superior Performance*. Nueva York: Free Press.
- M. Porter (1991): “Towards a dynamic theory of strategy”. *Strategic Management Journal*, 12, pp. 95–117.
- Reid, S. (1981): “The Decision Maker and Export Entry and Expansion”. *Journal of International Business Studies*, 12(2), 101–112.
- Rialp-Criado, A. (1997): *Las fases iniciales del proceso de internacionalización de las empresas industriales catalanas: Una aproximación empírica*. Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona.
- Ripley, B. (1996): *Pattern Recognition and Neural Networks*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Rosales, R. (1997): “La asociatividad como estrategia de fortalecimiento de las Pymes”. *Revista Capítulos de SELA*, 51, 311–319.
- Rosson P. y Seringhaus, F. (1991): *Export Development and Promotion. The Role of Public Organizations*. Londres: Kluwer Academic Publishers.

- Rumelhart, D. y McClelland, J. (1986): *Parallel distributed processing*. Cambridge: MIT Press.
- Rundh, B. (2003): "Rethinking the international marketing strategy: new dimensions in a competitive market". *Marketing Intelligence and Planning*, 29(4), 249–257.
- Simpson, C. y Kujawa, D. (1974): "The export decisions process: An empirical inquiry". *Journal of International Business Studies*, 5(1), 107–117.
- Souchon, A. y Diamantopoulos, A. (1996): "A Conceptual Framework of Export Marketing Information Use: Key Issues and Research Propositions". *Journal of International Marketing*, 4(3), 49–71.
- Storey, D. (1994): *Understanding the small business sector*. Londres: Routledge.
- Styles, C. y Ambler, T. (2000): "The Impact of Relational Variables on Export Performance: An Empirical Investigation in Australia and the UK". *Australian Journal of Management*, 25: 3, 261–281.
- Terpstra, V. (1987): *International Marketing*. Hinsdale: The Dryden Press.
- Zou, S. y Stan, S. (1998): "The Determinants of Export Performance: A Review of the Empirical Literature between 1987 and 1997". *International Marketing Review*, 15(5), 333–56.

Volumen 24 (diciembre 2017)

Predicción de fracaso en empresas latinoamericanas utilizando el método del vecino más cercano para predecir efectos aleatorios en modelos mixtos

Prediction of Failure in Latin-American Companies Using the Nearest-Neighbor Method to Predict Random Effects in Mixed Models

Caro, Norma Patricia; Arias, Verónica; Ortiz, Pablo

Páginas 5–24

Un modelo hedónico de precios en línea de automóviles usados en Argentina

A Hedonic Model of Online Prices of Used Cars in Argentina

Ramírez Muñoz de Toro, Gonzalo R.; Uriarte, Juan I.; Delbianco, Fernando; Larrosa, Juan M.C.

Páginas 25–53

Selection of Variables in Small Business Failure Analysis: Mean Selection vs. Median Selection

Selección de variables en el análisis de fracaso de empresas pequeñas: selección de medias frente a selección de medianas

Tascón, María T.; Castaño, Francisco J.

Páginas 54–88

La informalidad laboral colombiana en los últimos años: análisis y perspectivas de política pública

Informal Labor in Colombia in Recent Years: Analysis and Perspectives of Public Policy

Mora Rodríguez, Jhon James

Páginas 89–128

Los objetivos económicos de la micro y pequeña empresa en México. Un análisis desde las elasticidades de factores productivos

The Economic Objectives of the Micro and Small Businesses in Mexico. An Analysis of Elasticities of Productive Factors

Mungaray Lagarda, Alejandro; Aguilar Barceló, José G.; Osorio Novela, Germán

Páginas 129–146

Plan maestro de producción basado en programación lineal entera para una empresa de productos químicos

Master Production Scheduling Based on Integer Linear Programming for a Chemical Company

Reyes Zotelo, Yunuem; Mula, Josefa; Díaz-Madroño, Manuel; Gutiérrez González, Eduardo

Páginas 147–168

Métodos cuantitativos para un modelo de regresión lineal con multicolinealidad. Aplicación a rendimientos de letras del tesoro

Quantitative Methods for a Linear Regression Model with Multicollinearity. Application to Yields of Treasury Bills

Salmerón Gómez, Román; Rodríguez Martínez, Eduardo

Páginas 169–189

Hidden Champions in Spain: The Path to Successful Business Decisions

Hidden Champions en España: el camino hacia la toma de decisiones empresariales de éxito

Perea Muñoz, Eva; Ripoll-i-Alcon, Joan; Berlanga Silvente, Vanesa

Páginas 190–208

Value at Risk and the Diversification Dogma

Valor en riesgo y el dogma de la diversificación

Erdely, Arturo

Páginas 209–219

Efectos de la aplicación de "jigsaw" sobre la adquisición de competencias en dirección de operaciones

Effects of the "Jigsaw" Technique on Student' Learning Competences within Operations Management

López Vargas, Cristina; Real, Juan C.

Páginas 220–249

Análisis cualitativo comparativo difuso para determinar influencias entre variables socio-económicas y el rendimiento académico de los universitarios

Fuzzy-Set Qualitative Comparative Analysis to Determine Effects from Socio-Economical Factors and University Students Performance

Fedriani Martel, Eugenio M.; Romano Paguillo, Inmaculada

Páginas 250–269

Modelos basados en grafos: una aplicación al estudio del gasto de cruceristas en Uruguay

Graph-Based Models: An Application to the Study of Cruise Passengers' Expenditure in Uruguay

Brida, Juan Gabriel; Santiñaque, Florencia; Lanzilotta, Bibiana

Páginas 270–291

Los determinantes a largo plazo y su contribución a la tasa de ahorro de los hogares españoles en el período 1985-2016

Long-term determinants and its contribution to Spanish household saving rate during the period 1985-2016

De Andrés Mosquera, Andrés

Páginas 292–339

Tarifificación de bonos sobre catástrofes (cat bonds) con desencadenantes de índices de pérdidas. Modelación mediante un proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Pricing Loss Index Triggered Cat Bonds. An Ornstein-Uhlenbeck Process-Based Model

Pérez-Fructuoso, María José

Páginas 340–361

El compromiso exportador en Colombia: un análisis de redes neuronales

Export Commitment in Colombia: An Analysis of Neural Networks

Escandón Barbosa, Diana Marcela; Hurtado Ayala, Andrea

Páginas 362–388