



## Tiempo, Población y Modelos de Crecimiento

CAYSSIALS, GASTON

Departamento de Métodos Cuantitativos  
Facultad de Ciencias Económicas y de Administración  
Universidad de la Republica (Uruguay)  
Correo electrónico: [gcayssials@ccee.edu.uy](mailto:gcayssials@ccee.edu.uy)

### RESUMEN

En este trabajo se presenta un análisis de las implicaciones que tiene sobre los modelos de crecimiento estándar asumir una hipótesis alternativa al crecimiento exponencial de la población y cómo la forma de modelizar el tiempo puede alterar el comportamiento dinámico de estos modelos. Se estudia también una extensión (en tiempo continuo y en tiempo discreto) del modelo de crecimiento de Mankiw-Romer-Weil al apartarse del supuesto estándar de la tasa de crecimiento de la población constante. Más concretamente, se asume que esta tasa es decreciente en el tiempo y se introduce una ley general de crecimiento de la población que verifica esta característica. Con esta especificación, el modelo puede ser representado por un sistema dinámico de dimensión tres, que admite una única solución para cualquier condición inicial. Se muestra que existe un único equilibrio no trivial que es un atractor global. Además, se caracteriza a la velocidad de convergencia hacia el estado estacionario, mostrando que en este modelo la velocidad es inferior a la del modelo original de Mankiw-Romer-Weil.

**Palabras clave:** modelo de crecimiento de Mankiw-Romer-Weil, tiempo discreto, tiempo continuo, tasa de crecimiento de la población decreciente, velocidad de convergencia.

**Clasificación JEL:** C62; O41.

**MSC2010:** 91B55; 91B62.

## Time, population and economic growth model

### ABSTRACT

This paper presents an analysis of the implications it has on standard growth models assume an alternative hypothesis to the exponential growth of the population and how modeling time can alter the dynamic behavior of these models. An extension (in continuous time and discrete time) of the Mankiw-Romer-Weil growth model is also studied by departing from the standard assumption of the constant population growth rate. More concretely, this rate is assumed to be decreasing over time and a general population growth law verifying this characteristic is introduced. In this setup, the model can be represented by a three dimensional dynamical system which admits a unique solution for any initial condition. It is shown that there is a unique nontrivial equilibrium which is a global attractor. In addition, the speed of convergence to the steady state is characterized, showing that in this framework this velocity is lower than in the original model.

**Keywords:** Mankiw-Romer-Weil economic growth model, discrete time, continuous time, decreasing population growth rate, speed of convergence.

**JEL classification:** F17; F15; C16; C13 C62; O41.

**MSC2010:** 91B55; 91B62.



## 1. Introducción.

Dentro de la teoría económica, las teorías del crecimiento ocupan un lugar central. Describir y explicar las fuentes y el proceso del crecimiento del producto per cápita es el principal objetivo. Preguntas como: ¿qué factores determinan el crecimiento?, ¿por qué algunas economías crecen más que otras?, ¿por qué algunas crecen a mayor velocidad que otras?, son centrales para las teorías de crecimiento dominantes. El presente trabajo se enfoca en dos particularidades que se presentan en los esquemas de análisis, es decir, en los modelos que utilizan estas teorías de crecimiento.

La primera particularidad es cómo se incorpora en los modelos de crecimiento la dinámica de la población. Los modelos de crecimiento básicamente se diferencian en el foco de generación de crecimiento. Solow (1956) en el papel de la acumulación de capital. Ramsey (1928), Cass (1965) y Koopmans (1963) en el consumo y el ahorro. El modelo de crecimiento endógeno de Romer (1986) en los rendimientos crecientes a escala asociados a las externalidades del capital. Lucas (1988) y Uzawa (1965) en la creación y acumulación de capital humano. El modelo de Mankiw, Romer, y Weil (1992) ampliando el modelo de Solow con capital humano. Todos estos, entre otros modelos, comparten el supuesto que la fuerza de trabajo, asociada con la población, crece a una tasa constante,  $n \geq 0$ . Esta hipótesis condiciona fuertemente los resultados de los modelos. Por poner un ejemplo, en el modelo de Solow, en la trayectoria del crecimiento equilibrado (en ausencia de progreso tecnológico) todas las variables crecen a la misma tasa, que coincide con la tasa de crecimiento de la población.

El segundo aspecto es la forma de modelizar el tiempo. En su formulación original todos estos modelos se plantearon en tiempo continuo. En el presente trabajo analizamos las implicaciones que tiene sobre los modelos de crecimiento estándar asumir una hipótesis alternativa al crecimiento exponencial de la población y como la forma de modelizar el tiempo puede alterar el comportamiento dinámico de estos modelos.

Por último, como una aplicación de lo anterior, presentamos una extensión del modelo de crecimiento desarrollado por Mankiw, Romer y Weil incorporando una dinámica de la población alternativa al crecimiento exponencial, más ajustada a los hechos estilizados. Desde su publicación en 1992 el trabajo ha tenido una influencia notable en la amplia bibliografía empírica sobre el crecimiento y sus determinantes, influencia que se mantiene hasta la actualidad. El análisis del modelo reformulado lo planteamos en tiempo continuo y en tiempo discreto, comparando los resultados entre sí y con la formulación original. Con esta especificación, el modelo puede ser representado por un sistema dinámico de dimensión tres, que admite una única solución para cualquier condición inicial. Se muestra que existe un equilibrio no trivial único que es un atractor global. Además, se caracteriza a la velocidad de convergencia hacia el estado estacionario, mostrando que, en este modelo, la velocidad es inferior a la del modelo original de Mankiw-Romer-Weil. Estos resultados se encuentran tanto en la formulación continua como en la formulación discreta.

## 2. La modelización del tiempo en los modelos de crecimiento.

En general, los modelos de crecimiento vienen representados por un sistema dinámico que describe la interrelación y el comportamiento temporal de las variables relevantes, donde la variable independiente, el tiempo, puede ser representado en modo discreto o continuo. Al momento de formular un modelo dinámico (como los modelos de crecimiento) una elección fundamental que debe tomar el investigador es la forma de modelar el tiempo. En tiempo continuo,  $t$  puede tomar cualquier valor en la recta real y la descripción es instante a instante, en tiempo discreto el tiempo transcurre en termino de periodos. Desde una perspectiva matemática, en tiempo continuo se utiliza la teoría de las ecuaciones diferenciales, mientras que en tiempo

discreto las ecuaciones en diferencias finitas. Esto provoca que las técnicas utilizadas sean muy distintas.

Esta elección que toma el investigador responde implícitamente a varias cuestiones. En primer lugar, se refiere a la forma de concebir el tiempo, a cuál es el concepto del tiempo en economía. Responde también a la idea de que el fenómeno que se quiere describir y explicar es mejor representado en tiempo continuo o en tiempo discreto. Y lo más importante, tuvo en cuenta las implicaciones que puede tener esa elección sobre los resultados del modelo. El tema de cómo introducir el tiempo en la teoría económica es muy amplio, el análisis se centrará en la forma de modelizar el tiempo en los modelos de crecimiento estándar, en las justificaciones de tal elección y las posibles implicaciones que tiene sobre los resultados y recomendaciones de política que de los modelos se pueden derivar.

Existen algunos casos donde los autores argumentan y comparan los méritos de una u otra formulación. En el libro de texto de Dinámica Económica de Lomel y Rumbos (2003) se encuentran argumentos a favor y en contra y en el libro de Gandolfo (1997) se defiende la modelización en tiempo continuo en economía. Sin embargo, estos son casos aislados. Comúnmente se cree que esta elección no afecta el comportamiento cualitativo del modelo y es raro encontrar una justificación del por qué se optó por una u otra alternativa. Sin embargo, la modelización del tiempo no es trivial ni neutral y puede tener consecuencias, los resultados del modelo y las recomendaciones de política que se pueden derivar de estos pueden cambiar considerablemente según como se formulen.

El ejemplo clásico es la ecuación logística. En tiempo continuo se trata de un modelo simple ya que todas las soluciones de la ecuación diferencial logística convergen monótonamente a un valor constante, independientemente de los valores de los parámetros. La **ecuación logística en tiempo continuo** es:

$$y' = ay(M - y) \quad a > 0, M > 0$$

Las soluciones de la ecuación son:

$$y(t) = \left[ \frac{y(0)}{M - y(0)} \right] \left[ \frac{M e^{kt}}{1 + \left( \frac{y(0)}{M - y(0)} \right) e^{kt}} \right], \quad \text{con } k = aM$$

y éstas convergen monótonamente a un valor constante para cualquier condición inicial  $y(0)$ . En particular si  $y(0) = 0$  o si  $y(0) = M$ , la solución es constante ( $y(t) = 0$  o  $y(t) = M$  para todo  $t$ ). Si  $y(0) > M$  la solución es decreciente y converge a  $M$ . Finalmente, si  $y(0) < M$  la solución es creciente y también converge a  $M$ .

Sin embargo, la **ecuación logística en tiempo discreto**:

$$y_{t+1} = ay_t(M - y_t)$$

puede producir dinámicas muy complejas y hasta caóticas para un intervalo continuo de los parámetros (en particular si  $a/M \in (3,4)$ )<sup>1</sup>.

La complejidad del modelo logístico discreto ha producido una línea de investigación en el área de sistemas dinámicos. En particular luego de la publicación del trabajo seminal de May et al. (1976) el estudio de las propiedades matemáticas de la ecuación logística discreta ha producido un gran número de aplicaciones económicas de la teoría del caos. En Sordi (1996) se puede encontrar una revisión exhaustiva de la bibliografía acerca de teoría del caos y dinámica económica. En esos trabajos la dinámica de los modelos viene caracterizada por un desfase temporal de un periodo y una no linealidad unimodal (una ecuación en diferencias finitas de

<sup>1</sup> Ver Lomel y Rumbos (2003) por más detalles.

primer orden logística). Muchas de esas aplicaciones son revisiones de modelos tradicionales formulados en tiempo discreto. El trabajo de Day (1982) es uno de los pioneros en ese aspecto. Al incorporar el efecto polución (la productividad del capital se reduce al concentrar el capital) al modelo de Solow, la ecuación de acumulación de capital es dada por la ecuación logística:

$$k_{t+1} = h(k_t) = \frac{sAk_t^\beta(m - k_t)^\gamma}{1 + n}, \quad \beta, \gamma, \in (0, 1)$$

donde el factor  $(m - k_t)^\gamma$  recoge el efecto polución,  $A$  es una constante que representa la tecnología,  $s$  la tasa de ahorro y  $n$  la tasa de crecimiento (exógena y constante) de la población.

En su trabajo, Day muestra que existe un rango para el valor del parámetro  $A$  que hace que se verifiquen las condiciones suficientes del teorema “periodo tres implica caos” (Li-Yorke, 1975):

1. existen orbitas periódicas de todos los periodos
2. existen orbitas caóticas, órbitas que se acercan entre ellas y se alejan
3. existe un conjunto  $S$  no numerable tal que ninguna trayectoria que comienza en  $S$  converge a una trayectoria periódica.

Para ese rango de valores del parámetro  $A$  el modelo describe una dinámica caótica para la trayectoria del capital per cápita. Sin embargo, en dicho trabajo, no se encuentra ninguna mención respecto a la elección del tiempo discreto y es sencillo mostrar que la dinámica del modelo cambia radicalmente si se formula en tiempo continuo<sup>2</sup>.

Otros autores que analizan las implicaciones que tiene la teoría del caos en economía son Barnett, Serletis y Serletis (2015). Ellos muestran cómo la introducción de sistemas dinámicos caóticos deterministas puede generar resultados cualitativamente similares a los observados en las series económicas reales. Afirman que, si bien esto no es un argumento concluyente para explicar las fluctuaciones, muestra que no necesariamente éstas se explican por choques aleatorios exógenos y justifica explorar esa alternativa, al proporcionar una explicación endógena de la irregularidad. Federici y Gandolfo (2014) hacen notar, que en un sistema dinámico caótico, la predicción es imposible. Dada la dependencia sensible a las condiciones iniciales, diferencias mínimas en las condiciones iniciales generan trayectorias muy distintas (efecto mariposa). Dada esta característica, no es posible una solución analítica y la posibilidad de simular numéricamente es muy limitada. Además, cuestiona seriamente la teoría de las expectativas racionales, ya que los agentes tendrían que tener una precisión infinita para evitar la sensibilidad a las condiciones iniciales. La situación se agrava si además hay perturbaciones aleatorias.

Dejando de lado las implicaciones de la teoría del caos en economía en la literatura encontramos diversos autores que analizan las diferencias que aparecen al modelar el tiempo y los problemas que pueden presentarse. Sin ser exhaustivo, comentaremos algunos de estos trabajos. Medio et al. (2011) discute las posibles consecuencias de decidir por una u otra alternativa al modelar el tiempo y la duración del periodo cuando el modelo es discreto. Centrando su análisis en los sistemas dinámicos que surgen a partir de los modelos de crecimiento óptimo muestra cómo para valores pequeños de la tasa de descuento el comportamiento es sensible a los cambios en la duración del periodo. Con la misma óptica, Giannitsarou y Anagnostopoulos (2005) analizan la importancia de la frecuencia en la toma de decisiones para la dinámica económica y explican cómo la estabilidad local puede cambiar a partir de cambios en la longitud del periodo.

Bosi y Ragot (2012) muestran modelos donde la modelización del tiempo es neutral (al discretizar el modelo de Solow se mantienen las propiedades dinámicas de la solución) y modelos que no lo son (en el modelo de Ramsey pueden cambiar dependiendo del valor de los parámetros).

---

<sup>2</sup> En tiempo continuo se necesita un sistema dinámico de al menos dimensión tres para que el comportamiento sea caótico y el modelo que utiliza Day es de dimensión uno.

En el trabajo de Gómez (2014) se muestra cómo la estabilidad del equilibrio en un modelo de crecimiento endógeno con consumo de durables cambia en una u otra formulación. En tiempo continuo el único equilibrio es un punto de silla con convergencia monótona. En tiempo discreto, la estabilidad depende de la elasticidad de sustitución intertemporal, pudiendo ser inestable o un punto de silla con convergencia monótona o uno con convergencia oscilatoria, dependiendo del valor que tome el parámetro. González y Pecha (1995), utilizando un modelo keynesiano, muestran cómo las recomendaciones de política que se pueden derivar pueden cambiar según la forma de modelizar el tiempo. Las respuestas del producto y la tasa de interés frente a cambios en la propensión marginal a consumir o cambios en la eficiencia marginal del capital tiene signos opuesto en una u otra formulación.

Sin embargo, desde un punto de vista económico son variados los argumentos a favor de la modelización en tiempo discreto: información económica fundamental es recolectada en intervalos discretos, existen decisiones fundamentales que se toman en intervalos discretos, los estudios empíricos necesariamente son en tiempo discreto, etc.<sup>3</sup>.

Al mismo tiempo, al no existir un resultado general desde el punto de vista matemático que permita afirmar que el comportamiento dinámico es invariante a la forma de modelar el tiempo, no hay acuerdo en la teoría económica acerca de cómo representar el tiempo y hay argumentos a favor y en contra para ambas formulaciones. ¿Cuál es la mejor forma de modelizar el tiempo en economía es un problema abierto? Hay argumentos de peso por ambas formulaciones y seguramente no se admita una respuesta concluyente. Dependerá, entre otras cosas, del fenómeno que se quiera describir y explicar. Sin embargo, el investigador debería justificar la elección y analizar si los resultados del modelo son sensibles a la forma de modelizar.

### 3. La dinámica de la población en los modelos de crecimiento.

El segundo aspecto que se propone analizar el presente trabajo es acerca de cómo modelizar la dinámica de la población en los modelos de crecimiento económico. Es habitual que los modelos de crecimiento clásicos recurran al supuesto de que la población crece a tasa constante. Dicho supuesto, que condiciona los resultados, implica que la población crece indefinidamente conforme el tiempo avanza. En tiempo discreto esto se traduce en la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$L_{t+1} = (1 + n)L_t$$

donde  $L_t$  es el tamaño de la población en el periodo  $t$  y  $n$  es la tasa de crecimiento ( $n$  positiva)

$$\frac{L_{t+1} - L_t}{L_t} = n$$

Y en tiempo continuo, por la siguiente ecuación diferencial:

$$L'(t) = nL(t)$$

Esto implica que  $L_t = L_0(1 + n)^t$  (o  $L(t) = L(0)e^{nt}$  si es en tiempo continuo), donde  $L_0 = L(0)$  es la población inicial, la población crece exponencialmente y tiende a infinito cuando  $t$  tiende a infinito. Claramente el supuesto no es realista, si bien es cierto que en los periodos iniciales la población puede crecer mucho, ese crecimiento no es sostenible en el largo plazo. De acuerdo con los datos de Naciones Unidas DESA (2015) la tasa de crecimiento de la población se ha reducido en promedio en los últimos cien años. Para el quinquenio 1960-1965 era mayor a 2% y ha ido decreciendo para situarse en una tasa promedio cercana al 1% en el quinquenio 2010-2015. Más

---

<sup>3</sup> Puede consultarse a Licandro y Puch (2006) para una discusión acerca de la dimensión temporal en los modelos económicos y las referencias presentadas en el artículo.

aún, en vastas regiones, principalmente de Europa, la tasa es prácticamente nula e incluso negativa en algunos países. Por otra parte, las proyecciones para los próximos años es que esta tendencia continuará debido a menores tasas de fertilidad.

En resumen, los datos empíricos revelan dos hechos estilizados: i) la población no crece a una tasa constante, y ii) esta tasa disminuye y es cercana a cero.

Verhulst (1838) sostuvo que el crecimiento de una población estable debe llegar a un nivel de saturación característico, usualmente llamado capacidad de carga del entorno<sup>4</sup>, que define una cota superior al crecimiento. Para incorporar esta cota en la tasa de crecimiento Verhulst introduce una ecuación logística como una extensión al modelo exponencial. Por otro lado, Maynard (1974) sostiene que una ley de crecimiento de la población realista debería verificar las siguientes propiedades:

1. Cuando la población es suficientemente pequeña en relación con la capacidad de carga, la población crece a una tasa constante  $n_0$ .
2. Cuando la población es lo suficientemente grande en relación con la capacidad de carga los recursos se vuelven escasos y esto afecta negativamente la tasa de crecimiento de la población.
3. La tasa de crecimiento de la población decrece a cero.

Si bien el origen teórico de estas propiedades es la biología, pronto se comenzaron a utilizar en otras disciplinas. Es así que estas propiedades también se verifican en las leyes de población usadas por demógrafos y científicos sociales<sup>5</sup> y es congruente con la teoría de las poblaciones estables (una de las teorías demográficas más aceptada, desarrollada por Lotka (1934)). Desde el punto de vista empírico constituye una hipótesis más ajustada a los hechos estilizados y generalmente es utilizada por demógrafos para hacer proyecciones (por ejemplo, Ordorica-Mellado (2009) usa la función logística para proyectar el tamaño de la población mundial en el año 2050). En tiempo discreto la ecuación logística presentada por Pielou et al. (1969) y la ecuación de Beverton (1957) son ejemplos de leyes poblacionales que verifican dichas propiedades<sup>6</sup>.

Recientemente varios estudios se han enfocado en la reformulación de los modelos de crecimiento introduciendo leyes de población alternativas a la ley exponencial, leyes que verifican las propiedades antes mencionadas. Logrando describir mejor la realidad económica al incorporar una dinámica de la población más ajustada a los hechos estilizados. La reformulación de los modelos clásicos de crecimiento ya ha sido estudiada para el modelo de Solow (problema de dinámica puro) por varios autores. Scarpello y Ritelli (2003), Wanxin y Zequn (2013), Brianzoni, Mammana, y Michetti (2012), Guerrini (2006) y Cai (2012) usan la ley logística. Bay (2013) utiliza la ecuación de Richards. La ecuación de Von Bertalanffy es usada por Brida y Maldonado (2010). Cai (2012) asume que la población es acotada. Y Brida y Pereyra (2008) y Brida (2008) una ley general de población que verifica las propiedades antes mencionadas.

Para el modelo de Ramsey (problema de optimización dinámico) Accinelli y Brida (2007a), Ferrara y Guerrini (2009), Guerrini (2010a), Guerrini (2010e) y Guerrini (2010c) utilizan la ecuación logística. Accinelli y Brida (2007b) y Guerrini (2010b) reformulan el modelo usando la ley de Von Bertalanffy. Y usando una ley general Brida, Cayssials y Pereyra (2014).

---

<sup>4</sup> En Arrow, Bolin, Costanza, Dasgupta, Folke, Holling, Jansson, Levin, Mäler, Perrings, et al. (1995), Cohen (1995a), Cohen (1995b) y Daily y Ehrlich (1992) puede encontrarse información sobre el concepto de capacidad de carga.

<sup>5</sup> Ver Brauer y Castillo-Chavez (2001) para un análisis más detallado de estas leyes.

<sup>6</sup> Ver también Brianzoni, Mammana, y Michetti (2007) y Gushing y Henson (2001).

El único trabajo que reformula el modelo de Mankiw, Romer y Weil es Guerrini (2010d) usando la ley de población logística. El análisis lo hace en tiempo continuo. En el apartado siguiente generalizamos los resultados obtenidos por este autor, reformulando el modelo en tiempo continuo y en tiempo discreto, usando una ley de población general con tasa decreciente a cero (la ley logística es un caso particular de ésta).

#### 4. El modelo de crecimiento de Mankiw, Romer y Weil.

El modelo propuesto por Mankiw, Romer y Weil en 1992, también conocido como modelo de Solow ampliado con capital humano, marca un hito en el resurgimiento de los modelos neoclásicos de crecimiento en los años 90 y su trabajo es una de las piezas más influyentes y es ampliamente citado en la literatura empírica sobre el crecimiento. El estudio introduce un análisis de regresión para demostrar que su especificación proporciona una mejor descripción de los datos comparativos entre países que la descripción obtenida cuando se utiliza el modelo original de Solow. Al considerar una definición más amplia de capital, el modelo predice una menor velocidad de convergencia<sup>6</sup> al equilibrio que la tasa que se deriva del modelo de Solow. Esto implica que el modelo de Mankiw, Romer y Weil se ajusta mejor a los datos empíricos que el modelo original de Solow. Este resultado, junto con la aparición de modelos de crecimiento endógeno, promovió el desarrollo de una línea de investigación empírica que se centró en la convergencia y la dispersión ( $\sigma$ -convergencia) del producto per cápita entre los países, grupos de países o regiones de un mismo país. Los estudios de De la Fuente (1997) o de Durlauf y Aghion (2005) confirman la influencia y el peso del modelo en esta literatura. La relevancia empírica del modelo de Mankiw, Romer y Weil para comprender el crecimiento económico a largo plazo o las diferencias de ingreso per cápita entre países está documentada por una gran cantidad de investigaciones empíricas posteriores. En particular en el área de crecimiento empírico y convergencia económica, que discute la robustez de este resultado e, implícitamente, la relevancia empírica del modelo de Solow ampliado (ver Bernanke y Gürkaynak (2001), Solow (2001), Jones (2002), Gundlach (2005), McQuinn y Whelan (2007), Ding y Knight (2009), Acemoglu, Johnson, y Robinson (2012)). En todas estas obras el modelo de Mankiw, Romer y Weil es un pilar fundamental.

En esta sección se analizará el modelo de crecimiento de Mankiw, Romer y Weil, incorporando una ley de población general, que verifique las propiedades antes mencionadas y donde se generalizaran los resultados obtenidos por Guerrini (2010d) donde el autor modifica el modelo en tiempo continuo mediante la introducción de la ley logística de la población. Teniendo en cuenta que la introducción de una ley alternativa de crecimiento de la población implica cambios en la velocidad de convergencia al equilibrio, el presente trabajo también puede ser visto como una contribución a esta línea de investigación empírica.

##### 4.1. Formulación original.

Comenzamos introduciendo el modelo original Mankiw-Romer-Weil con ley de crecimiento de la población exponencial y el análisis de las principales propiedades dinámicas del modelo (ver Mankiw, Romer, y Weil (1992) por una descripción más detallada del modelo.)

Se considera una economía cerrada, con un único sector productivo, que utiliza el capital físico ( $K(t)$ ), la fuerza de trabajo ( $L(t)$ ) y capital humano ( $H(t)$ , entendido como capacidades, competencias y habilidades de los trabajadores individuales) como factores de producción ( $Y(t)$ ). La economía está dotada de una tecnología definida por una función de producción de Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala:

$$Y(t) = K^\alpha(t)H^\beta(t)L^{1-\alpha-\beta}(t), \alpha, \beta, \alpha + \beta \in (0, 1)$$

---

<sup>6</sup> En la literatura sobre el tema se refieren a la  $\beta$ -convergencia, definida como el tiempo que demora una economía en alcanzar el equilibrio.

El cambio en el stock de capital físico  $K$  es igual a la inversión bruta  $I_k = s_k Y(t)$  menos la depreciación del capital  $\delta K$ :

$$\dot{K} = s_k Y(t) - \delta K(t) \quad (1)$$

El cambio en el stock de capital humano  $H$  es igual a la inversión bruta  $I_h = s_h Y(t)$  menos la depreciación del capital  $\delta H$ :

$$\dot{H} = s_h Y(t) - \delta H(t) \quad (2)$$

El modelo asume que la población crece a una tasa constante  $n > 0$ :

$$\begin{aligned} \dot{L}(t) &= nL(t) \\ L(0) &> 0 \end{aligned} \quad (3)$$

En términos per cápita la función de producción se puede expresar como:

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{K^\alpha(t)H^\beta(t)L^{1-\alpha-\beta}(t)}{L(t)} = \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^\alpha \left(\frac{H(t)}{L(t)}\right)^\beta = y(t) \quad (4)$$

Si definimos a  $K/L = k$  como el capital físico por trabajador y a  $H/L = h$  como el capital humano por trabajador. El producto per cápita es:

$$y(t) = k^\alpha(t)h^\beta(t) \quad (5)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\dot{k} = \frac{d\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)}{dt} = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - kn \quad (6)$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{L} \frac{1}{(K/L)} - \frac{kn}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - n \quad (7)$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{s_k Y(t) - \delta K(t)}{K(t)} - n = \frac{s_k k^\alpha(t)h^\beta(t)L(t)}{K(t)} - \delta - n \quad (8)$$

se tiene que, la tasa de crecimiento del capital físico por trabajador es:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{s_k k^\alpha(t)h^\beta(t)}{(K(t)/L(t))} - \delta - n \quad (9)$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{s_k k^\alpha(t)h^\beta(t)}{k(t)} - (\delta + n) \quad (10)$$

Así, la acumulación de capital físico por trabajador está dada por:

$$\dot{k} = s_k k^\alpha(t)h^\beta(t) - (\delta + n)k(t) \quad (11)$$

Por un razonamiento similar, se llega a la ecuación que describe la acumulación de capital humano per cápita:

$$\dot{h} = s_h k^\alpha(t)h^\beta(t) - (\delta + n)h(t) \quad (12)$$

A continuación, el sistema dinámico de dimensión dos:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= s_k k^\alpha(t) h^\beta(t) - (\delta + n) k(t) \\ \dot{h} &= s_h k^\alpha(t) h^\beta(t) - (\delta + n) h(t) \end{aligned} \quad (13)$$

describe la dinámica del modelo.

El equilibrio no trivial es el punto  $(k^*, h^*)$  tal que:

$$\begin{cases} k^* = \left[ \frac{s_k^{1-\beta} s_h^\beta}{\delta+n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ h^* = \left[ \frac{s_h^{1-\alpha} s_k^\alpha}{\delta+n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \end{cases} \quad (14)$$

y el producto de equilibrio es:

$$y^* = (k^*)^\alpha (h^*)^\beta = \left[ \frac{s_k}{\delta+n} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left[ \frac{s_h}{\delta+n} \right]^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \quad (15)$$

Luego, los valores de equilibrio de largo plazo del capital (físico y humano) y el producto, dependen positivamente de las tasas de ahorro  $(s_k, s_h)$  y del grado de eficiencia de escala de los factores reproducibles  $(\alpha, \beta)$  y negativamente de la tasa de depreciación  $(\delta)$  y del crecimiento de la población  $(n)$ .

Con el fin de analizar la estabilidad del estado estacionario se considera la aproximación lineal de la función  $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:

$$G(k, h) = (s_k k^\alpha h^\beta - (\delta + n)k, s_h k^\alpha h^\beta - (\delta + n)h)$$

Que brinda la aproximación de primer orden del modelo como:

$$\begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{h} \end{pmatrix} = G(k, h)$$

La dinámica de la transición al equilibrio  $(k^*, h^*)$  puede ser cuantificada a través de la linealización del sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{h} \end{pmatrix} = G(k^*, h^*) + J_G \begin{pmatrix} k - k^* \\ h - h^* \end{pmatrix} = J_G \begin{pmatrix} k - k^* \\ h - h^* \end{pmatrix}$$

donde  $J_G$  es la matriz jacobiana de  $G$  evaluada en el equilibrio.

$$J_G = \begin{pmatrix} s_k \alpha \frac{(\delta+n)}{s_k} - (\delta+n) & \frac{s_k}{s_h} \beta (\delta+n) \\ \frac{s_h}{s_k} \alpha (\delta+n) & s_h \beta \frac{(\delta+n)}{s_h} - (\delta+n) \end{pmatrix}$$

$$J_G = \begin{pmatrix} (\delta+n)(\alpha-1) & \frac{s_k}{s_h} \beta (\delta+n) \\ \frac{s_h}{s_k} \alpha (\delta+n) & (\delta+n)(\beta-1) \end{pmatrix} !$$

El polinomio característico de la matriz jacobiana es:

$$P(X) = (\delta+n)^2(1-\alpha-\beta) - (\alpha+\beta-2)(\delta+n)X + X^2$$

que presenta dos autovalores negativos:  $\lambda_1 = (\delta+n)(\alpha+\beta-1)$  y  $\lambda_2 = -(\delta+n)$ . Esto implica que el equilibrio es un atractor global.

*Observación 1.* La velocidad de convergencia está determinada por el menor de los autovalores en valor absoluto, esto es, por  $\lambda_1 = (\delta + n)(\alpha + \beta - 1)$ . Una de las características del modelo es que la velocidad de convergencia es menor que en el modelo de Solow<sup>7</sup>. Esto implica que el modelo de Mankiw-Romer-Weil ajusta mejor a los datos empíricos que el modelo de Solow (ver Barro y Sala-i Martin (2003), cap. 1).

Un enfoque alternativo para analizar las propiedades dinámicas del modelo (presentadas en el trabajo seminal Mankiw, Romer, y Weil (1992)) es introducir una aproximación loglineal del sistema 13:

$$\begin{cases} \dot{\bar{k}} = (\delta + n) [(\alpha - 1)(\bar{k} - \bar{k}^*) + \beta(\bar{h} - \bar{h}^*)] \\ \dot{\bar{h}} = (\delta + n) [\alpha(\bar{k} - \bar{k}^*) + (\beta - 1)(\bar{h} - \bar{h}^*)] \end{cases} \quad (16)$$

y sustituir en  $\frac{d(\log(y))}{dt} = \dot{y} = \alpha\dot{\bar{k}} + \beta\dot{\bar{h}}$

$$\dot{\bar{y}} = (\delta + n)(\alpha + \beta - 1) [\bar{y} - \bar{y}^*] = \lambda_1 [\bar{y} - \bar{y}^*]$$

Notar que en este caso la velocidad de convergencia puede ser interpretada como la velocidad a la que una economía se acerca al equilibrio en el instante  $t$ . Resolviendo esta ecuación diferencial, el producto se puede escribir como:

$$\bar{y}(t) = \bar{y}(0)e^{\lambda_1 t} + (1 - e^{\lambda_1 t})\bar{y}^*$$

y reemplazando  $\bar{y}$  por su valor de equilibrio,  $\bar{y}^* = \alpha\bar{k}^* + \beta\bar{h}^*$ , se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \log(y(t)) - \log(y(0)) = \\ -(1 - e^{\lambda_1 t})\log(y(0)) + (1 - e^{\lambda_1 t}) \left[ \frac{\alpha}{1 - \alpha - \beta} \log\left(\frac{s_k}{\delta + n}\right) + \frac{\beta}{1 - \alpha - \beta} \log\left(\frac{s_h}{\delta + n}\right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Esta ecuación se utiliza para estimar el modelo en los estudios empíricos de crecimiento. En particular, para contrastar lo que en la literatura sobre el crecimiento se conoce como *hipótesis de convergencia*, es decir, si existe una relación negativa entre la distancia al equilibrio y la velocidad de convergencia.

#### 4.2. Extensión del modelo en tiempo continuo.

En el modelo anterior, se sustituye la ley de crecimiento de la población  $L'(t) = nL(t)$  por una ley  $L'(t) = p(t)L(t)$  que coherentemente con lo descrito anteriormente a partir del trabajo de Maynard [1974], verifica las siguientes propiedades:

1. Población creciente y acotada.

$$L(0) = L_0 > 0, \dot{L}(t) \geq 0, \forall t \geq 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow +\infty} L(t) = L_\infty.$$

2. La tasa de crecimiento de la población es decreciente y tiende a 0.

3. Si  $p(t) = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$  se cumple:  $p(t) < 0, \forall t \geq 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 0$

Ejemplos de algunas leyes de población que verifican estas propiedades se muestran en la siguiente tabla.

<sup>7</sup> La velocidad de convergencia que predice el modelo de Solow es:  $(\delta + n)(\alpha - 1)$ .

**Tabla 1. Ejemplos de leyes de población en tiempo continuo.**

Ley de Población		$L(t)$	$p(t)$
Logística	$L' = aL - bL^2$ $L(0) = L_0 > 0$	$\frac{aL_0e^{at}}{a+bL_0(e^{at}-1)}$	$\frac{a(a-bL_0)}{a-bL_0(e^{at}-1)}$
Verhulst [1838]	$L' = rL(1 - \frac{L}{L_\infty})$ $L(0) = L_0 > 0$	$\frac{L_0L_\infty e^{rt}}{L_0e^{rt} + L_\infty - L_0}$	$\frac{r(L_\infty - L_0)}{e^{rt} + L_\infty - L_0}$
Von Bertalanffy [1938]	$L' = r(L_\infty - L)$ $L(0) = L_0 > 0$	$\frac{e^{rt}L_\infty + L_0 - L_\infty}{ert}$	$\frac{r(L_\infty - L_0)}{L_0 - L_\infty + L_\infty e^{rt}}$

Fuente: Elaboración propia a partir de las referencias.

Después de sustituir la ley exponencial por la ecuación  $L'(t) = p(t)L(t)$  y repitiendo los pasos de la subsección anterior, el sistema dinámico que describe el modelo modificado puede ser representado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de orden 3:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= s_k k^\alpha(t) h^\beta(t) - (\delta + p(L(t))) k(t) \\ \dot{h} &= s_h k^\alpha(t) h^\beta(t) - (\delta + p(L(t))) h(t) \\ \dot{L}(t) &= L(t)p(L(t)) \end{aligned} \quad (18)$$

#### 4.2.1. Equilibrio y estabilidad: análisis cualitativo.

##### El estado estacionario

En esta sección investigamos el comportamiento dinámico de la solución del modelo  $(k(t), h(t), L(t))$ .

**Lema 1.** Si se excluye la solución trivial que se obtiene de considerar  $k = 0$ ,  $h = 0$  y  $L = 0$ , se tiene que el modelo admite un único equilibrio positivo  $(k^*, h^*, L^*)$  que verifica:

$$\begin{cases} k^* = \left[ \frac{s_k^{1-\beta} s_h^\beta}{\delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ h^* = \left[ \frac{s_h^{1-\alpha} s_k^\alpha}{\delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ L^* = L_\infty \end{cases} \quad (19)$$

*Demostración.* La demostración es inmediata resolviendo el sistema (18) y buscando una solución constante.

*Observación 2.* Los valores de  $k^*$ ,  $h^*$  y  $y^*$  coinciden con los valores del modelo original de Mankiw-Romer-Weil cuando  $n = 0$ . Esto implica que los valores de equilibrio del modelo modificado son mayores que los del modelo original, (es decir, si  $n = 0$ ; ver las ecuaciones (14) y (15)) y los parámetros de la ley población no entran en los determinantes de  $k^*$ ,  $h^*$  y  $y^*$ . Los valores en el estado estacionario del capital físico y capital humano dependen sólo de los parámetros de tecnología  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$  y de las tasas de ahorro exógenas,  $s_k$  y  $s_h$ . Ésta es una diferencia importante con respecto al modelo original, donde un aumento en la tasa intrínseca de crecimiento de la población conduce a los leves bajas de estas variables en el largo plazo. Además, ya que en el modelo, el tamaño de la población es limitada por la capacidad de carga  $L^* = L_\infty$ , se tiene que los valores agregados del capital físico y humano en el largo plazo son finitos e iguales a  $K^* = L^*k^*$  and  $H^* = L^*h^*$  respectivamente (a diferencia del modelo original de Mankiw-Romer-Weil donde tienden a infinito).

**Proposición 1.** *El punto de equilibrio  $(k^*, h^*, L^*)$  es un atractor global.*

*Demostración.* A partir del sistema (18):

$$\begin{aligned} \dot{k} &= s_k k^\alpha(t) h^\beta(t) - (\delta + p(L(t))) k(t) \\ \dot{h} &= s_h k^\alpha(t) h^\beta(t) - (\delta + p(L(t))) h(t) \\ \dot{L}(t) &= L(t)p(L(t)) \end{aligned} \quad (20)$$

Para analizar la estabilidad de la solución de estado estacionario, consideremos la aproximación lineal de la función  $M: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:

$$M(k, h, L) = (s_k k^\alpha h^\beta - (\delta + p(L))k, s_h k^\alpha h^\beta - (\delta + p(L))h, Lp(L))$$

en las proximidades del punto de equilibrio  $(k^*, h^*, L^*)$ . La matriz Jacobiana de la aproximación lineal viene dada por:

$$J_M = \begin{pmatrix} \delta(\alpha - 1) & \frac{s_k}{s_h} \beta \delta & k^* p'(L_\infty) \\ \frac{s_h}{s_k} \alpha \delta & \delta(\beta - 1) & h^* p'(L_\infty) \\ 0 & 0 & L_\infty p'(L_\infty) \end{pmatrix}$$

Y el polinomio característico de la matriz viene dado por:

$$R(X) = (L_\infty p'(L_\infty) - X) ((\delta(\alpha - 1) - X)(\delta(\beta - 1) - X) - \alpha\beta\delta^2) \quad (21)$$

El polinomio presenta tres autovalores negativos:  $\lambda_1 = \delta(\alpha + \beta - 1) < 0$ ,  $\lambda_2 = -\delta < 0$  y  $\lambda_3 = L_\infty p'(L_\infty) < 0$  y esto implica que el equilibrio es un atractor global.

#### 4.2.2. Transición dinámica y velocidad de convergencia.

El modelo de Mankiw-Romer-Weil es una buena aproximación del mundo real, que demostró ser más robusto empíricamente, ajustar mejor a los datos empíricos, que el modelo de Solow. Sin embargo, la realidad económica que describe es incompleta. En el modelo modificado la dinámica es más rica.

La dinámica de la transición en las proximidades del equilibrio de largo plazo  $(k^*, h^*, L^*)$  puede ser cuantificado mediante la linealización del sistema (18):

$$\begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{h} \\ \dot{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(\alpha - 1) & \frac{s_k}{s_h} \beta \delta & k^* p'(L_\infty) \\ \frac{s_h}{s_k} \alpha \delta & \delta(\beta - 1) & h^* p'(L_\infty) \\ 0 & 0 & L_\infty p'(L_\infty) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k - k^* \\ h - h^* \\ L - L_\infty \end{pmatrix}$$

Sabemos que la matriz que representa este sistema lineal tiene tres autovalores negativos:  $\lambda_1 = \delta(\alpha + \beta - 1) < 0$ ,  $\lambda_2 = -\delta < 0$  y  $\lambda_3 = L_\infty p'(L_\infty) < 0$ .

En esta sección se proporciona una evaluación cuantitativa de la velocidad de convergencia de la dinámica de transición. La velocidad depende de los parámetros de la tecnología, las tasa de ahorro y los parámetros de la población y se pueden calcular a partir de la matriz  $J_M(k^*, h^*, L_\infty)$ . Los autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son análogos a los coeficientes de convergencia del modelo original cuando la tasa de crecimiento de la población es nula. El autovalor  $\lambda_3 = L_\infty p'(L_\infty)$  corresponde a la velocidad de convergencia de la población a la capacidad de carga del entorno  $L_\infty$ . Cada valor propio corresponde a una fuente de convergencia y cada ruta de transición estable a la constante estado del sistema toma la forma:

$$\begin{cases} k(t) = k^* + C_1 v_{11} e^{\lambda_1 t} + C_2 v_{21} e^{\lambda_2 t} + C_3 v_{31} e^{L_\infty p'(L_\infty) t} \\ h(t) = h^* + C_1 v_{12} e^{\lambda_1 t} + C_2 v_{22} e^{\lambda_2 t} + C_3 v_{32} e^{L_\infty p'(L_\infty) t} \\ L(t) = L_\infty + (L_0 - L_\infty) e^{L_\infty p'(L_\infty) t} \end{cases} \quad (22)$$

Donde  $C_1, C_2, C_3, v_{11}, v_{21}, v_{31}, v_{12}, v_{22}$  y  $v_{32}$  depende de las condiciones iniciales y de los coeficientes de  $J_M(k^*, h^*, L_\infty)$ . Entonces la velocidad de convergencia de capital físico y humano depende de los autovalores  $\lambda_1 = \delta(\alpha + \beta - 1)$  y  $L_\infty p'(L_\infty)$ . Tenga en cuenta que, al ser la ley de población dada exógenamente, la velocidad de convergencia de la población solamente depende de  $L_\infty p'(L_\infty)$ . De hecho, la transición depende del menor autovalor en valor absoluto. Si  $|L_\infty p'(L_\infty)| > |\lambda_1|$ , se tiene que la velocidad de convergencia de  $L_t$  es mayor que la de  $k(t)$  y  $h(t)$  y si  $|L_\infty p'(L_\infty)| < |\lambda_1|$  entonces todas las variables convergen a la velocidad  $L_\infty p'(L_\infty)$ .

*Observación 3.* Independientemente de si la velocidad de convergencia es  $\lambda_1$  (solo depende del grado de eficiencia de los factores reproducibles de escala y de la tasa de depreciación) o  $\lambda_3$  (que solo depende de la ley de población), en ambos casos es menor que en el modelo original. Recordemos que en el modelo original la velocidad de convergencia es:  $(\delta + n)(\alpha + \beta - 1) = \lambda MRW$ .

Un enfoque alternativo para analizar las propiedades dinámicas del modelo (como se presenta en el documento Mankiw, Romer, y Weil (1992)), en particular, para deducir la velocidad de convergencia en este nuevo marco, es introducir la aproximación log-lineal del sistema (16):

$$\begin{cases} \dot{\bar{k}} = (\alpha - 1)\delta(\bar{k} - \bar{k}^*) + \beta\delta(\bar{h} - \bar{h}^*) - p'(L_\infty)L_\infty(\bar{L} - \bar{L}^*) \\ \dot{\bar{h}} = \alpha\delta(\bar{k} - \bar{k}^*) + (\beta - 1)\delta(\bar{h} - \bar{h}^*) - p'(L_\infty)L_\infty(\bar{L} - \bar{L}^*) \\ \dot{\bar{L}} = p'(L_\infty)L_\infty(\bar{L} - \bar{L}^*) \end{cases} \quad (23)$$

y sustituir en

$$\begin{aligned} \frac{d(\log(y))}{dt} = \dot{y} &= \alpha\dot{\bar{k}} + \beta\dot{\bar{h}} \\ \dot{y} &= \delta(\alpha + \beta - 1)(\bar{y} - \bar{y}^*) - (\alpha + \beta)p'(L_\infty)L_\infty(\bar{L} - \bar{L}^*) \end{aligned} \quad (24)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial (se requiere especificar una ley de población), se obtiene la ecuación a utilizar para estimar empíricamente la tasa de convergencia en este nuevo marco.

### 4.3. Extensión del modelo en tiempo discreto.

En esta sección presentamos una extensión del modelo en tiempo discreto, donde únicamente modificamos la ley de población por una que verifica las propiedades antes mencionadas.

Sin perder la simplicidad, suponemos que la ley de población puede ser representada por una ecuación en diferencias autónoma, donde  $L_t$  es la solución del problema de valor inicial representado por:

$$\begin{aligned} L_{t+1} &= P(L_t) \\ L_0 &> 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Suponemos además que la función  $P(\cdot)$  verifica las siguientes propiedades:

1.  $P(L) \geq L > 0, \forall L \leq L_\infty$ .

Esto implica que la tasa de crecimiento de la población es no negativa:  $n(L_t) =$

- $\frac{L_{t+1}-L_t}{L_t} = \frac{P(L_t)}{L_t} - 1 \geq 0$ .<sup>9</sup>
2.  $\frac{P(L_t)}{L_t} \geq \frac{P(L_{t+1})}{L_{t+1}}$   
 Esto es, la *población crece a tasa decreciente*:  $n(L_t) \geq n(L_{t+1}) \geq 0$ .<sup>10</sup>
3.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{P(L_t)}{L_t} - 1 = 0$   
 La *tasa de crecimiento de la población tiende a ser nula* cuando el tiempo tiende a infinito.
4. Existe  $L_\infty$  tal que  $L_t \leq L_\infty$  para todo  $t$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} L_t = L_\infty$   
 Esto es, la *población está acotada y converge a  $L_\infty$* .

<sup>9</sup>Notar que, si  $P' \geq 0$  está propiedad se cumple.

<sup>10</sup>Notar que esta condición es equivalente a que  $P'(L) \leq \frac{P(L)}{L}, \forall L$ .

**Tabla 2. Ejemplos de leyes de población en tiempo discreto.**

Ley de Población	$P(L_t)$	$L_\infty$	$P'(L_\infty)$
Beverton (1957)	$\frac{aL_t}{1 + bL_t}$	$\frac{a-1}{b}$	$\frac{1}{a}$
Ricker (1954)	$aL_t e^{-bL_t}$	$\frac{\log(a)}{b}$	$1 - \log(a)$
Hassell (1975)	$\frac{aL_t}{(1+bL_t)^c}$	$\frac{a^{\frac{1}{c}}-1}{b}$	$1 - c\left(\frac{a^{\frac{1}{c}}-1}{a^{\frac{1}{c}}}\right)$
Verhulst (1838)	$L_t e^{r(1-\frac{L_t}{K})}$	$K$	$1 - r$

Fuente: Elaboración propia a partir de las referencias.

Algunos ejemplos bien conocidos de leyes de población que verifican estas propiedades, para un rango en el valor de los parámetros (ver Brauer y Castillo-Chavez (2001)), se describen en la tabla 2:

Ahora en tiempo discreto el producto agregado de la economía viene dado por:

$$Y_t = K_t^\alpha H_t^\beta L_t^{1-\alpha-\beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \in (0, 1)$$

El cambio en el stock de capital físico es igual a la inversión bruta  $Ik_t = s_k Y_t$  menos la depreciación del capital  $\delta K_t$ :

$$K_{t+1} - K_t = s_k Y_t - \delta K_t \quad (26)$$

El cambio en el stock de capital humano es igual a la inversión bruta  $Ih_t = s_h Y_t$  menos la depreciación del capital  $\delta H_t$

$$H_{t+1} - H_t = s_h Y_t - \delta H_t \quad (27)$$

La función de producción en términos per cápita se puede expresar como:

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{K_t^\alpha H_t^\beta L_t^{1-\alpha-\beta}}{L_t} = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^\alpha \left(\frac{H_t}{L_t}\right)^\beta = y_t \quad (28)$$

Si definimos a  $K/L = k$  y a  $H/L = h$  como el capital físico y el capital humano por trabajador respectivamente. El producto por trabajador es:

$$y_t = k_t^\alpha h_t^\beta \quad (29)$$

Notar que:

$$\frac{K_{t+1} - K_t}{L_t} = s_k \frac{K_t^\alpha}{L_t^\alpha} \frac{H_t^\beta}{L_t^\beta} \frac{L_t^{1-\alpha-\beta}}{L_t^{1-\alpha-\beta}} - \delta \frac{K_t}{L_t} \quad (30)$$

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} \frac{L_{t+1}}{L_t} - \frac{K_t}{L_t} = s_k k_t^\alpha h_t^\beta - \delta k_t \quad (31)$$

$$k_{t+1}(P(L_t)/L_t) - k_t = s_k k_t^\alpha h_t^\beta - \delta k_t \quad (32)$$

La ecuación de movimiento para el modelo que describe cómo el capital físico por trabajador varía con el tiempo es:

$$k_{t+1} = \frac{s_k k_t^\alpha h_t^\beta + (1 - \delta)k_t}{P(L_t)/L_t} \quad (33)$$

Por un razonamiento similar, llegamos a la ecuación de movimiento para el modelo que describe cómo el capital humano por trabajador varía con el tiempo:

$$h_{t+1} = \frac{s_h k_t^\alpha h_t^\beta + (1 - \delta)h_t}{P(L_t)/L_t} \quad (34)$$

Y el sistema dinámico que describe el modelo modificado en tiempo discreto puede ser representado por el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias de orden 3:

$$\begin{cases} k_{t+1} = \frac{s_k k_t^\alpha h_t^\beta + (1-\delta)k_t}{P(L_t)/L_t} \\ h_{t+1} = \frac{s_h k_t^\alpha h_t^\beta + (1-\delta)h_t}{P(L_t)/L_t} \\ L_{t+1} = P(L_t) \end{cases} \quad (35)$$

#### 4.3.1. Equilibrio y estabilidad: análisis cualitativo.

##### El estado estacionario

En esta sección investigamos el comportamiento dinámico de la solución del modelo  $(k, h, L_t)$ .

**Lema 2.** Si se excluye la solución trivial que se obtiene de considerar  $k = 0$ ,  $h = 0$  y  $L = 0$ , se tiene que el modelo presenta un único equilibrio positivo  $(k^*, h^*, L^*)$  que verifica:

$$\begin{cases} k^* = \left[ \frac{s_k^{1-\beta} s_h^\beta}{\delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ h^* = \left[ \frac{s_h^{1-\alpha} s_k^\alpha}{\delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ L^* = L_\infty \end{cases} \quad (36)$$

*Demostración.* La demostración es inmediata resolviendo el sistema (35) y buscando una solución constante.

*Observación 4.* Los valores de  $k^*$ ,  $h^*$  y  $y^*$  coinciden con los del modelo original de Mankiw-Romer-Weil cuando  $n = 0$  y son mayores cuando  $n$  es positiva. Además, los parámetros de la ley de población no forman parte de los determinantes de  $k^*$ ,  $h^*$  y  $y^*$ . Los valores del estado estacionario

del capital físico y el capital humano dependen solo de los parámetros de la tecnología  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$  y de las tasas de ahorro exógenas  $s_k$  y  $s_h$ . Esta es una diferencia importante con el modelo original, donde un aumento en la tasa intrínseca de crecimiento de la población conduce a niveles menores de estas variables en el largo plazo. Además, dado que, en el modelo modificado, el tamaño de la población está limitado por la capacidad de carga  $L^* = L_\infty$ , las cantidades agregadas de capital físico y humano en el largo plazo son finitas y equivalentes a  $K^* = L^*k^*$  y  $H^* = L^*h^*$  respectivamente (mientras que en el modelo original de Mankiw-Romer-Weil eran infinitas).

**Proposición 2.** *El punto de equilibrio  $(k^*, h^*, L^*)$  es un atractor global.*

*Demostración.* Para analizar la estabilidad de la solución del estado estacionario, consideremos la aproximación lineal de la función  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:

$$T(k, h, L) = \left( \frac{s_k k^\alpha h^\beta + (1 - \delta)k}{P(L)/L}, \frac{s_h k^\alpha h^\beta + (1 - \delta)h}{P(L)/L}, P(L) \right)$$

en las proximidades del punto de equilibrio  $(k^*, h^*, L^*)$ . La matriz jacobiana de la aproximación lineal está dada por:

$$J_T = \begin{pmatrix} \delta(\alpha - 1) + 1 & \frac{\beta s_k \delta}{s_h} & k^* \left( \frac{1 - P'(L_\infty)}{L_\infty} \right) \\ \frac{\alpha s_h \delta}{s_k} & \delta(\beta - 1) + 1 & h^* \left( \frac{1 - P'(L_\infty)}{L_\infty} \right) \\ 0 & 0 & P'(L_\infty) \end{pmatrix}$$

Y el polinomio característico de esta matriz está dado por:

$$R(X) = (P'(L_\infty) - X) [(\delta(\alpha - 1) + 1 - X)(\delta(\beta - 1) + 1 - X) - \alpha\beta\delta^2] \quad (37)$$

$$R(X) = (P'(L_\infty) - X) [(1 - \delta)(\delta(\alpha + \beta) + 1 - \delta) - (\delta(\alpha + \beta - 2) + 2)X + X^2] \quad (38)$$

Este polinomio presenta tres autovalores positivos reales y menores que la unidad:  $\lambda_1 = \delta(\alpha + \beta - 1) + 1 < 1$ ,  $\lambda_2 = 1 - \delta < 1$  y  $\lambda_3 = P'(L_\infty) < 1$ . Esto implica que el estado estacionario es un atractor global.

#### 4.3.2. Transición dinámica y velocidad de convergencia.

El modelo de Mankiw-Romer-Weil es una buena aproximación a los datos reales, empíricamente ha demostrado ser más robusto, más adecuado a los datos empíricos, que el modelo de Solow, pero describe mejor la realidad económica si incorpora una dinámica de la población más realista. El modelo modificado, ahora en tiempo discreto, tiene una dinámica más rica, tiene un crecimiento positivo en los niveles de equilibrio del capital físico y humano.

En esta sección proporcionamos una evaluación cuantitativa de la velocidad de convergencia de la dinámica de transición. La velocidad depende de los parámetros de la tecnología y de las tasas de ahorro y se puede calcular a partir de la matriz  $J_T(k^*, h^*, L_\infty)$ . La dinámica de transición en torno al estado estacionario  $(k^*, h^*, L_\infty)$  se puede cuantificar mediante la linealización del sistema (35):

$$\begin{pmatrix} k_{t+1} \\ h_{t+1} \\ L_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^* \\ h^* \\ L_\infty \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta(\alpha - 1) + 1 & \frac{\beta s_k \delta}{s_h} & k^* \left( \frac{1 - P'(L_\infty)}{L_\infty} \right) \\ \frac{\alpha s_h \delta}{s_k} & \delta(\beta - 1) + 1 & h^* \left( \frac{1 - P'(L_\infty)}{L_\infty} \right) \\ 0 & 0 & P'(L_\infty) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k - k^* \\ h - h^* \\ L - L_\infty \end{pmatrix}$$

Donde los tres autovalores de la matriz  $J_T(k^*, h^*, L_\infty)$  son reales, positivos y dados por:  $\lambda_1 = \delta(\alpha + \beta - 1) + 1 < 1$ ,  $\lambda_2 = 1 - \delta < 1$  y  $\lambda_3 = P'(L_\infty) < 1$ .

Los autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  coinciden con los hallados en el modelo estándar cuando la tasa de crecimiento de la población es nula. El autovalor  $\lambda_3 = P'(L_\infty)$  corresponde a la velocidad de convergencia de la población a la capacidad de carga  $L_\infty$ . Cada valor propio corresponde a una fuente de convergencia y cada camino de transición estable a la constante estado del sistema toma la forma:

$$\begin{cases} k_t = k^* + C_1 v_{11} \lambda_1^t + C_2 v_{21} \lambda_2^t + C_3 v_{31} (P'(L_\infty))^t \\ h(t) = h^* + C_1 v_{12} \lambda_1^t + C_2 v_{22} \lambda_2^t + C_3 v_{32} (P'(L_\infty))^t \\ L(t) = L_\infty + (L_0 - L_\infty) (P'(L_\infty))^t \end{cases} \quad (39)$$

donde  $C_1, C_2, C_3, v_{11}, v_{21}, v_{31}, v_{12}, v_{22}$  y  $v_{32}$  depende de las condiciones iniciales ( $k_0, h_0$  y  $L_0$ ) y de los elementos de la matriz  $J_T(k^*, h^*, L_\infty)$ . Entonces la velocidad de la convergencia del capital físico y humano depende de los valores propios  $\lambda_1 = \delta(\alpha + \beta - 1) + 1$  y  $P'(L_\infty)$ . Tener en cuenta que, al ser la población exógena, la velocidad de convergencia de la población solo depende de  $P'(L_\infty)$ . De hecho, la transición depende del autovalor con mayor valor absoluto. Si  $|P'(L_\infty)| < |\lambda_1|$ , entonces el velocidad de convergencia de  $L_t$  es más rápida que la de  $k_t$  y  $h_t$ . En ese caso la velocidad de convergencia viene dada por  $\lambda_1$ . Si  $|P'(L_\infty)| > |\lambda_1|$  entonces todas las variables convergen a la velocidad  $P'(L_\infty)$ .

*Observación 5.* Independientemente de si la velocidad de convergencia es  $\lambda_1$  (solo depende del grado de eficiencia de los factores reproducibles de escala ( $\alpha$  y  $\beta$ ) y de la tasa de depreciación  $\delta$ ) o  $\lambda_3$  (que solo depende de los parámetros de la ley de población), en ambos casos es menor que en el modelo original.

*Observación 6.* Ya sea que la velocidad de convergencia sea  $\lambda_1$  o  $\lambda_3$ , ésta dependerá de los parámetros de la tecnología o de los parámetros de la ley de población, pero no de ambos.

#### 4.4. Comparando resultados.

En la teoría del crecimiento económico se suele suponer que el crecimiento de la población sigue una ley exponencial. Esto, claramente no es realista porque implica que la población tiende a infinito cuando el tiempo tiende a infinito. En este estudio una versión mejorada del modelo de crecimiento Mankiw-Romer-Weil (en tiempo continuo y en tiempo discreto) se desarrolla mediante la introducción de una ley general de población.

El modelo se presenta como un sistema dinámico de dimensión tres, que es compatible con un equilibrio único distinto del trivial, que es, como en el modelo original, de un atractor global. En los valores de equilibrio del modelo modificado, tanto en su versión continua como discreta, el producto, el capital físico y el capital humano per cápita dependerán del grado de eficiencia de escala de los factores reproducibles ( $\alpha, \beta$ ), de la tasa de depreciación ( $\delta$ ) y de las tasas de ahorro ( $s_k, s_h$ ), pero no dependen de los parámetros de la población. Además, sus valores son mayores que lo del modelo original, sea cual sea la tasa constante  $n > 0$  de crecimiento de la población y coinciden solamente si la tasa de crecimiento es nula.

En el equilibrio del modelo clásico de Mankiw-Romer-Weil, el capital físico y humano agregados tienden a infinito de forma poco realista cuando  $t$  tiende a infinito, porque la población crece hasta el infinito. Esta situación se mejora en el modelo modificado, tanto en su versión continua como en la discreta, donde los valores agregados de equilibrio del capital físico y humano tienden a valores finitos  $K^* = L_\infty k^*$  y  $H^* = L_\infty h^*$ .

El documento muestra que el modelo tiene una velocidad finita de convergencia, que sólo depende de los parámetros de la tecnología y de la tasa de depreciación o de la ley de la población, pero no de ambos. Y, en cualquier caso, es menor que en el modelo original.

Finalmente, el comportamiento dinámico en ambas formulaciones es cualitativamente similar. Este hecho puede parecer obvio, sin embargo, no se podía prever con absoluta certeza sin realizar el análisis ya que no hay, desde el punto de vista matemático un resultado que permita afirmarlo.

## 5. Conclusiones.

En nuestro trabajo nos enfocamos en las implicaciones que tiene sobre los modelos de crecimiento la forma de modelizar el tiempo. En particular mostramos como en el modelo de Mankiw, Romer y Weil, el comportamiento dinámico es similar en ambas formulaciones. Al mismo tiempo este análisis se hizo incorporando una ley general de población más ajustada a los hechos estilizados y, por lo tanto, mejoramos el modelo original. El modelo se presenta como un sistema dinámico de dimensión tres, compatible con un equilibrio único distinto del trivial que es un atractor global. En los valores de equilibrio, el capital físico y el capital humano per cápita dependerán del grado de eficiencia de escala de los factores reproducibles  $(\alpha, \beta)$ , de la tasa de depreciación  $(\delta)$  y de las tasas de ahorro  $(s_k, s_h)$ , pero no dependen de los parámetros de la población. Y sus valores son mayores que los del modelo original, sea cual sea la tasa constante  $n > 0$  de crecimiento de la población y coinciden (con los del modelo original) únicamente si la tasa de crecimiento es nula. A diferencia de la formulación original, los valores agregados de equilibrio del capital físico y humano tienden a valores finitos  $K^* = L_\infty k^*$  y  $H^* = L_\infty h^*$ . Respecto a la velocidad de convergencia, depende de los parámetros de la tecnología y de la tasa de depreciación o de la ley de la población, pero no de ambos. Y, en cualquier caso, es menor que en el modelo original.

Teniendo en cuenta que el modelo de Solow es un caso particular ( $\beta = 0$ ) del modelo de Mankiw, Romer y Weil, nuestro análisis engloba todos los trabajos encontrados en la literatura, que reformulan estos modelos incorporando leyes de población particulares. Incluyendo a las formulaciones originales si se supone una tasa nula de crecimiento de la población.

Teniendo en cuenta que al introducir de una ley alternativa de crecimiento de la población encontramos cambios en la velocidad de convergencia al equilibrio, nuestro análisis puede ser visto como una contribución a la línea de investigación empírica. Una futura investigación es el estudio empírico bajo una especificación que sigue el modelo modificado, siguiendo la que se deduce de la ecuación (24).

Otra posible investigación a futuro es la reformulación del modelo endogenizando el crecimiento de la población, donde la tasa de fecundidad, la capacidad de carga o ambas, no sean exógenas y dependan de algunas de las variables del modelo.

Finalmente sería relevante actualizar el trabajo de Sordi (1996) y realizar una revisión exhaustiva sobre las incorporaciones más recientes de la teoría del caos a la economía. Determinar si se limitaron a incluir la ecuación logística o existieron otras aportaciones. Vinculado a lo anterior sería interesante estudiar una reformulación del modelo de Mankiw, Romer y Weil que incorpore el efecto polución, siguiendo los pasos de Day.

## Agradecimientos

Nuestra investigación fue apoyada por CSIC-UDELAR (Proyecto “Grupo de investigación en Dinámica Económica”, ID 881928, y Programa de Iniciación a la Investigación -2017- proyecto “Crecimiento económico y dinámica de la población: teoría y análisis empírico”, ID 406). Una versión preliminar de este trabajo apareció como Working paper en los preprints de SSRN.

## Referencias

- Accinelli, E., & Brida, J. (2007a). The Ramsey model with logistic population growth. *Economics Bulletin*, 3, 1-8.
- Accinelli, E., & Brida, J.G. (2007b). The dynamics of the Ramsey economic growth model with the Von Bertalanffy population growth law. *Applied Mathematical Sciences*, 1(1-4), 109-118.
- Acemoglu, D., Johnson, S., & Robinson, J. A. (2012). The colonial origins of comparative development: An empirical investigation: Reply. *The American Economic Review*, 102(6), 3077-3110.
- Arrow, K., Bolin, B., Costanza, R., Dasgupta, P., Folke, C., Holling, C. S., Jansson, B.-O., et al. (1995). Economic growth, carrying capacity, and the environment. *Ecological Economics*, 15(2), 91-95.
- Barnett, W.A., Serletis, A., & Serletis, D. (2015). Nonlinear and complex dynamics in economics. *Macroeconomic Dynamics*, 19(8), 1749-1779.
- Barro, R.J., & Sala-i Martin, X. (2003). *Economic Growth, 2nd edition*. Boston: MIT press.
- Bay, N. (2013). On the attraction of positive equilibrium point in Solow economic discrete model with Richards population growth. *Journal of Applied Mathematics & Bioinformatics*, 2(3), 177-192.
- Bernanke, B.S., & Gurkaynak, R.S. (2001). Is growth exogenous? Taking Mankiw, Romer, and Weil seriously. *NBER macroeconomics annual*, 16, 11-57.
- Beverton, R. (1957). On the dynamics of exploited fish populations. *UK Ministry of Agriculture and Fisheries Investigations (Ser 2)*, 19.
- Bosi, S., & Ragot, L. (2012). Time representation in economics. *Theoretical Economics Letters*, 2(01), 10-15.
- Brauer, F., & Castillo-Chavez, C. (2001). *Mathematical models in population biology and epidemiology*, vol. 40. New York: Springer.
- Brianzoni, S., Mammana, C., & Michetti, E. (2007). Complex dynamics in the neoclassical growth model with differential savings and non-constant labor force growth. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, 11(3), 3-3.
- Brianzoni, S., Mammana, C., & Michetti, E. (2012). Variable elasticity of substitution in a discrete time Solow-Swan growth model with differential saving. *Chaos, Solitons & Fractals*, 45(1), 98-108.

- Brida, J.G. (2008). Población y crecimiento económico. Una versión mejorada del modelo de Solow. *El Trimestre Económico*, 75(SPECI), 5-22.
- Brida, J.G., Cayssials, G., & Pereyra, J.S. (2014). The Ramsey model in discrete time and decreasing population growth rate. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 22, 97-115.
- Brida, J.G., & Maldonado, E.L. (2010). Closed form solutions to a generalization of the Solow growth model. *Applied Mathematical Sciences*, 1, 1991-2000.
- Brida, J.G., & Pereyra, J.S. (2008). The Solow model in discrete time and decreasing population growth rate. *Economics Bulletin*, 41(3), 1-14.
- Cai, D. (2012). An economic growth model with endogenous carrying capacity and demographic transition. *Mathematical and Computer Modelling*, 55(3), 432-441.
- Cass, D. (1965). Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation. *The Review of Economic Studies*, 32(3), 233-240.
- Cohen, J.E. (1995a). *How many people can the earth support?* WW Norton & Company.
- Cohen, J.E. (1995b). Population growth and earth's human carrying capacity. *Science*, 269(5222), 341-346.
- Daily, G.C., & Ehrlich, P.R. (1992). Population, sustainability, and Earth's carrying capacity. *BioScience*, 42(10), 761-771.
- Day, R.H. (1982). Irregular growth cycles. *The American Economic Review*, 72(3), 406-414.
- De la Fuente, A. (1997). The empirics of growth and convergence: a selective review. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21(1), 23-73.
- DESA, U. (2015). *World population prospects: The 2015 revision, key findings and advance tables*. Working paper ESA/P/WP. 227, United Nations Department of Economic and Social Affairs, Population Division., New York.
- Ding, S., & Knight, J. (2009). Can the augmented Solow model explain China remarkable economic growth? A cross-country panel data analysis. *Journal of Comparative Economics*, 37(3), 432-452.
- Durlauf, S.N., & Aghion, P. (2005). *Handbook of Economic Growth*. Amsterdam: Elsevier.
- Federici, D., & Gandolfo, G. (2014). Chaos in economics. *Journal of Economics and Development Studies*, 2(1), 51-79.
- Ferrara, M., & Guerrini, L. (2009). The Ramsey model with logistic population growth and Benthamite felicity function revisited. *WSEAS Transactions on Mathematics*, 8, 41-50.
- Gandolfo, G. (1997). *Economic Dynamics: study edition*. Springer Science & Business Media.
- Giannitsarou, C., & Anagnostopoulos, A. (2005). Modeling Time and Macroeconomic Dynamics. In *Money Macro and Finance (MMF) Research Group Conference 2005*, no. 60.

- Gómez, M.A. (2014). Discrete Versus Continuous Time in an Endogenous Growth Model with Durable Consumption. *Mathematical Economics Letters*, 2(3-4), 67-75.
- González, J.I., & Pecha, A. (1995). La dinámica en economía. Los enfoques de Hicks y Samuelson. *Cuadernos de Economía*, 14(23), 92-116.
- Guerrini, L. (2006). The Solow-Swan model with a bounded population growth rate. *Journal of Mathematical Economics*, 42(1), 14-21.
- Guerrini, L. (2010a). A closed-form solution to the Ramsey model with logistic population growth. *Economic Modelling*, 27(5), 1178-1182.
- Guerrini, L. (2010b). A Closed-Form Solution to the Ramsey Model with the Von Bertalanffy Population Law. *Applied Mathematical Sciences*, 4(65), 3239-3244.
- Guerrini, L. (2010c). The dynamic of the AK Ramsey growth model with quadratic utility and logistic population change. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 62(2), 221-225.
- Guerrini, L. (2010d). Logistic population change and the Mankiw-Romer-Weil model. *APPS. Applied Sciences*, 12, 96-101.
- Guerrini, L. (2010e). Transitional dynamics in the Ramsey model with AK technology and logistic population change. *Economics Letters*, 109(1), 17-19.
- Gundlach, E. (2005). Solow vs. Solow: Notes on identification and interpretation in the empirics of growth and development. *Review of World Economics*, 141(3), 541-556.
- Gushing, J., & Henson, S.M. (2001). Global Dynamics of Some Periodically Forced, Monotone Difference Equations. *Journal of Difference Equations and Applications*, 7(6), 859-872.
- Hassell, M. (1975). Density-dependence in single-species populations. *The Journal of animal ecology*, pp. 283-295.
- Jones, C. (2002). *Introduction to Economic Growth*. New York: WW Norton.
- Koopmans, T.C. (1963). On the concept of optimal economic growth. *Discussion paper, Cowles Foundation for Research in Economics*, Yale University.
- Li, T.Y., & Yorke, J.A. (1975). *Il American Math. Monthly*, 82, 985-992.
- Licandro, O., & Puch, L.A. (2006). Is discrete time a good representation of continuous time? *Working paper ECO No. 2006/28*, European University Institute, San Domenico di Fiesole, Italy.
- Lomelí, H., & Rumbos, B. (2003). *Métodos Dinámicos en Economía: Otra búsqueda del tiempo perdido*. México: Thomson Editorial.
- Lotka, A.J. (1934). *Theorie analytique des associations biologiques*. Discussion paper.
- Lucas, Jr.R.E. (1988). On the mechanics of economic development. *Journal of monetary economics*, 22(1), 3-42.

- Mankiw, N.G., Romer, D., & Weil, D.N. (1992). A contribution to the empirics of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 107(2), 407-437.
- May, R.M., et al. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261(5560), 459-467.
- Maynard, S.J. (1974). *Models in ecology*. Cambridge: Cambridge UP.
- McQuinn, K., & Whelan, K. (2007). Conditional convergence and the dynamics of the capital-output ratio. *Journal of Economic Growth*, 12(2), 159-184.
- Medio, A. et al. (2011). *Simple and Complex Dynamics: A Hidden Parameter*. Discussion paper, Mimeo, University of Nice.
- Ordorica-Mellado, M. (2009). En la búsqueda del estado estacionario de la población del planeta. *Papeles de población*, 15(61), 39-51.
- Pielou, E.C., et al. (1969). *An introduction to mathematical ecology*. New York: Wiley-Interscience.
- Ramsey, F.P. (1928). A mathematical theory of saving. *The Economic Journal*, 38(152), 543-559.
- Ricker, W.E. (1954). Stock and recruitment. *Journal of the Fisheries Board of Canada*, 11(5), 559-623.
- Romer, P.M. (1986). Increasing returns and long-run growth. *Journal of Political Economy*, 94(5), 1002-1037.
- Scarpello, G.M., & Ritelli, D. (2003). The Solow model improved through the logistic manpower growth law. *Annali dell'Universit`a di Ferrara*, 49(1), 73-83.
- Solow, R.M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 70(1), 65-94.
- Solow, R.M. (2001). What have we learned from a decade of empirical research on growth? Applying Growth Theory across Countries. *The World Bank Economic Review*, 15(2), 283-288.
- Sordi, S. (1996). *Chaos in Macrodynamics: an excursion through the Literature*. Citeseer.
- Uzawa, H. (1965). Optimum technical change in an aggregative model of economic growth. *International Economic Review*, 6(1), 18-31.
- Verhulst, P.-F. (1838). Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. Correspondance Mathematique et Physique Publiee par A. *Quetelet*, 10, 113-121.
- Von Bertalanffy, L. (1938). A quantitative theory of organic growth (inquiries on growth laws II). *Human biology*, 10(2), 181-213.
- Wanxin, W., & Zequn, G. (2013). A Localization of Solow Growth Model with Labor Growth Pattern in China. *Technology and Investment*, 4(1B), 24-26.