



## Estimación clásica y bayesiana de la volatilidad en el modelo de Black-Scholes

CANGREJO ESQUIVEL, ÁLVARO JAVIER

Universidad Surcolombiana (Colombia)

Correo electrónico: [alvaro.cangrejo@correounivalle.edu.co](mailto:alvaro.cangrejo@correounivalle.edu.co)

TOVAR CUEVAS, JOSÉ RAFAEL

Universidad del Valle (Colombia)

Correo electrónico: [jose.r.tovar@correounivalle.edu.co](mailto:jose.r.tovar@correounivalle.edu.co)

GARCÍA, ISABEL CRISTINA

Pontificia Universidad Javeriana Cali (Colombia)

Correo electrónico: [isabel.garcia@javerianacali.edu.co](mailto:isabel.garcia@javerianacali.edu.co)

MANOTAS DUQUE, DIEGO FERNANDO

Universidad del Valle (Colombia)

Correo electrónico: [diego.manotas@correounivalle.edu.co](mailto:diego.manotas@correounivalle.edu.co)

### RESUMEN

La valoración de opciones y en gran medida el mercado de derivados financieros requiere de una óptima estimación de la volatilidad, ya que justamente ésta es la variable que se negocia. Se presenta entonces una metodología estadística para la estimación del parámetro de volatilidad para un activo, usando métodos propios del enfoque Bayesiano. Para modelar el comportamiento natural del parámetro que representa la volatilidad en el modelo de Black-Scholes, se utilizan distribuciones de probabilidad de la familia Gama y la distribución Lévy Estándar. Los resultados obtenidos usando la metodología propuesta se contrastan con los obtenidos al estimar el parámetro desde el enfoque clásico donde se implementa el método de la Máxima Verosimilitud y la técnica Bootstrap. Se logra evidenciar que el procedimiento de estimación desde el paradigma bayesiano, permitió obtener estimaciones del parámetro de volatilidad más ajustadas y precisas, cuando en la distribución de los retornos se consideran valores extremos. Estas características del estimador permiten que, al evaluar el precio de la opción, al utilizar el modelo de Black-Scholes, sea más próximo a lo que se espera que ocurra en el mercado financiero.

**Palabras clave:** ecuación diferencial estocástica; distribución previa; distribución posterior; estimación; volatilidad; bootstrap; valores extremos; hiperparámetros; elicitación.

**Clasificación JEL:** C110, C120, C20, C51, G1.

**MSC2010:** 60G, 60E, 65C.

## Classical and Bayesian estimation of volatility in the Black-Scholes model

### ABSTRACT

The valuation of options and to a large extent the financial derivatives market require an optimal estimation of the volatility, since this is precisely the variable that is negotiated. We present then a statistical methodology for the estimation of the volatility parameter for an asset using methods of the Bayesian approach to statistics. As prior distributions for volatility parameter, models of the Gamma family and the Standard Levy are assumed. The results obtained using the proposed methodology are contrasted with those obtained when estimating the parameter from the classical approach, where the maximum likelihood method and the Bootstrap technique are implemented. It is possible to demonstrate that the estimation procedure from the Bayesian paradigm, allowed to obtain more adjusted and precise volatility parameter estimations, when in the distribution of the returns, extreme values are considered. These characteristics of the estimator allow that predictions of the prices of the options obtained using the Black-Scholes model to be closer to what is expected to occur in the financial market.

**Keywords:** stochastic differential equation; previous distribution; posterior distribution; estimation; volatility; bootstrap; extreme values; hyperparameters; elicitation.

**JEL classification:** C110, C120, C20, C51, G1.

**MSC2010:** 60G, 60E, 65C.



## 1. Introducción

El punto central en la valoración de opciones (valor a largo plazo) ha sido durante mucho tiempo el problema de estimar los parámetros de los procesos de precios en tiempo continuo que actúan como entradas para el derivado paramétrico en los modelos de precios. Dado que la volatilidad es una medida de incertidumbre y además es potencialmente estocástica dentro del modelo de Black y Scholes (1973), el esfuerzo de académicos y profesionales por mejorar sus estimaciones se ha basado en estudiar y diseñar diferentes metodologías para modelar esta variable. Comúnmente se utilizan las estimaciones puntuales tanto de la varianza como de la desviación estándar y esto puede ser causa de errores de medición acerca del precio de las opciones o del riesgo financiero respectivamente. Por otra parte, actualmente las series de tiempo para la volatilidad como los modelos ARCH y sus derivados, han sido implementados más en el sector financiero para robustecer el estudio de la volatilidad en los mercados bursátiles; sin embargo, se han estado implementando mediante un enfoque clásico, es decir, solamente incorporando información puntual de este proceso. Por tal motivo los participantes en el mercado de derivados se concentran en la volatilidad del subyacente, no en la dirección del precio del mismo; esto se explica porque todos los parámetros para valorar una opción son observables en el mercado, excepto la volatilidad.

El desarrollo del modelo de Black Scholes (BS) representó un avance importante para la valoración de opciones financieras. Dicho modelo ha tenido una gran influencia en la manera en que los agentes valoran y cubren opciones financieras; además es considerado como punto de referencia para el desarrollo y éxito de la ingeniería financiera (Black & Scholes, 1973; Merton, 1973; Cox et al., 1979). Desde su presentación ha sido estudiada, analizada y contrastada en los mercados reales de opciones y futuros de todo el mundo. De hecho, pocas teorías han sufrido y resistido una revisión empírica tan rigurosa de la que ha salido victoriosa no solo por su flexibilidad y grado de aplicación, sino porque la mayor parte de las ideas de la teoría moderna de valoración ya se encuentran originalmente en ella. Así mismo, este modelo ha servido de base para numerosas generalizaciones y extensiones como: las opciones de estilo estadounidense, opciones de divisas y otras opciones como las exóticas (Hull, 2006). En consecuencia, el modelo de BS sigue siendo ampliamente utilizado en la práctica, por ejemplo, en opciones reales, problemas de bancarota, evaluación de depósitos bancarios asegurados, trabajo actuarial, etc. (Hull, 2005).

Una opción financiera es un contrato mediante el cual el comprador adquiere el derecho, pero no la obligación de comprar o vender un activo subyacente a un precio establecido (precio *strike*). Las opciones *call* confieren el derecho de comprar el activo, mientras que las opciones *put* confieren el derecho a vender el activo. Estos derechos se pueden ejercer en una fecha futura conocida como fecha de vencimiento (opción europea) o en cualquier momento antes de la fecha de vencimiento (opción americana). En ambos tipos de opciones la volatilidad juega un papel fundamental ya que su valor crea el valor teórico de la opción en el mercado actual.

Desde el contexto de los métodos bayesianos, esta teoría se ha venido utilizado para modelar la variabilidad de los retornos de las acciones con el propósito de la valoración de opciones. Autores como Karolyi (1993) utilizan información previa extraída de los patrones transversales en la volatilidad de retornos para grupos de acciones ordenados por tamaño, apalancamiento financiero o volumen de negociación, junto con la información de la muestra, para derivar la densidad posterior de la varianza. Él reporta una precisión de predicción mejorada para las estimaciones de los precios de las opciones calculadas utilizando las estimaciones de la volatilidad por los métodos bayesianos con relación a las estimaciones clásicas tales como la volatilidad implícita, histórica estándar o incluso la volatilidad actual ex-post. Este resultado puede ser interesante como una motivación para utilizar el enfoque bayesiano para explorar las propiedades estadísticas en la valoración de opciones.

Ncube y Satchell (1997) investigaron las propiedades del modelo de precios de BS bajo una aproximación clásica. Estos autores aprovechan la propiedad monótona del precio de la opción con respecto al precio del activo y la volatilidad, para obtener la distribución condicional de lo que llaman el “verdadero” precio de Black Scholes, así como la distribución condicional de lo que llaman el

“pronóstico” del precio de Black Scholes. La primera se obtiene condicionando la volatilidad (asumen que la volatilidad es conocida y no estimada), mientras que el segundo condiciona el precio del activo subyacente considerando como única fuente de aleatoriedad la estimación de la varianza clásica. Sin embargo, este enfoque se considera poco realista al suponer que la volatilidad es conocida y no estimada. En el presente trabajo planteamos un mejor ajuste en la distribución condicional (previa) en la estimación de la volatilidad y en cuanto al “pronóstico” se obtiene una distribución posterior más eficiente a nivel informativo y es teóricamente favorable para producir mejores estimaciones de los precios de las opciones.

Así mismo, Darsinos y Satchell (2001) proporcionan un análisis bayesiano completo para el precio de la opción a través del modelo BS utilizando un modelo jerárquico. Como problema bayesiano, suponen aleatorio tanto el parámetro de volatilidad como el precio de la opción, y bajo el supuesto del modelo (es decir, log-normalidad de los precios de las acciones) derivan las densidades previas y posteriores para una opción europea. Los resultados presentados, para una serie de valores realistas, muestran hasta qué punto el condicionamiento en el precio de los activos reduce drásticamente la variabilidad del precio de la opción.

Según Tsay (2005) para los inversionistas el análisis de los retornos de un activo presenta un resumen completo al momento de invertir sin que la escala de medición de los precios influya. Por este motivo, el objetivo de este trabajo es introducir una metodología estadística en la estimación del parámetro de volatilidad del rendimiento de las acciones a partir de los retornos de la misma. Desde el enfoque bayesiano se considera como distribución previa la distribución de colas pesadas Levy estándar, la cual no ha sido considerada de acuerdo con la revisión de la literatura, dado que según su naturaleza es una buena candidata pues se espera que capture el efecto de asimetría que pueden presentarse en las series financieras llamado efecto *leverage*, donde algunas series financieras tienden a disminuir la volatilidad cuando los retornos aumentan y a aumentarla cuando los retornos caen. Sin embargo, la volatilidad es definida por Tsay (2005) como la desviación estándar de los rendimientos de un activo. Autores como Karolyi (1993) y Darsinos y Satchell (2001), proponen como modelos de probabilidad previa para la estimación de la volatilidad distribuciones cuyo dominio son  $\mathbb{R}^+$ , entre ellos la distribución Gamma y Gamma Inversa respectivamente. Desde el enfoque clásico se realiza la estimación utilizando técnica de remuestreo, Bootstrap y el método de máxima verosimilitud.

El documento está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 presentamos las fórmulas de valoración de opciones, a saber, el modelo de Black-Scholes. En la sección 3 introducimos el análisis de estimación de la volatilidad tanto en el enfoque clásico como bayesiano. En las secciones 4 y 5 se presenta la información y la aplicación con datos reales, para finalmente en la sección 6 presentar las conclusiones.

## 2. Descripción del modelo

Black y Scholes (1973) publicaron la fórmula que a la fecha se mantiene como el modelo estándar teórico en la valoración de opciones financieras. La fórmula B&S, desarrollada originalmente para valorar opciones de compra *call* europeas sobre acciones que no pagan dividendos antes de la fecha de vencimiento, se define como:

$$C_{BS} = S_t \Phi(d_1) - K \exp[-rT] \Phi(d_2), \quad [1]$$

con

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad [2]$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}, \quad [3]$$

donde:

- $C_{BS}$  = Precio o Prima de la opción *call*
- $S_t$  = Precio del activo subyacente (spot)
- $K$  = Precio de ejercicio (strike)
- $r$  = Tasa de interés libre de riesgo
- $T$  = Plazo al vencimiento
- $\sigma$  = Volatilidad del activo subyacente
- $\Phi(\cdot)$  = función de probabilidad acumulada de la distribución normal estándar.

Es importante anotar que los valores de  $\Phi(d_1)$  y  $\Phi(d_2)$  representan las probabilidades de ejercer la opción. Una alternativa para encontrar el precio de la opción (prima) a partir del modelo de B&S es resolver la ecuación diferencia parcial de segundo orden definida como:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + r S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} = rV. \quad [4]$$

La ecuación [1] define el valor para una opción *call* como función de la varianza verdadera de los retornos de las acciones bajo el supuesto de que son independientes e idénticamente distribuidos. Ahora, si se considera un registro histórico de los precios mensuales de un activo  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ , de acuerdo con Tsay (2005) los retornos mensuales del activo se definen como la utilidad generada sobre una inversión de capital o una inversión en valores, es decir:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \quad [5]$$

con valor medio y varianza mensual definidas como:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_t \quad ; \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_t - \mu)^2. \quad [6]$$

La desviación estándar,  $\hat{\sigma}$ , es conocida como volatilidad del activo la cual representa la variabilidad en el comportamiento natural de los retornos. Por tanto, se debe determinar la mejor elección para  $\sigma$ , para lo que se proponen diversas metodologías estadísticas.

### 3. Estimación de la volatilidad

#### 3.1. Enfoque Clásico

Para realizar el procedimiento de estimación clásica se requiere definir la distribución de probabilidad asignada al comportamiento de la muestra y establecer la forma que mejor describa esta información. Para ello, al considerar  $\phi = \sigma^2$  y la variable aleatoria  $R_t$  que de acuerdo con la literatura se puede asumir que dichos retornos son observaciones independientes e idénticamente distribuidos (Hull, 2006; Venegas, 2008) de modo que  $R_t \sim N(\mu, \phi)$  y entonces la función de densidad está dada por:

$$f(r_1, r_2, \dots, r_n | \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\phi}} \exp\left(-\frac{(r - \mu)^2}{2\phi}\right), \quad \phi > 0.$$

Para obtener una estimación de  $\phi$  se usan como herramientas el método de la Máxima Verosimilitud y el método de Bootstrap. El primer método consiste en encontrar  $\hat{\phi}_{MV}$  de tal forma que maximice la función de verosimilitud:

$$\begin{aligned} L(\phi, \mu | r_1, r_2, \dots, r_n) &= \prod_{i=1}^n (2\pi\phi)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\phi} (r_i - \mu)^2\right] \\ &= (2\pi\phi)^{-n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\phi} \sum_{i=1}^n (r_i - \mu)^2\right], \end{aligned} \quad [7]$$

con  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$  una muestra de tamaño  $n$ . En efecto, al considerar la función:

$$\ln[L(\phi, \mu | r_1, r_2, \dots, r_n)] = -\frac{n}{2} \ln(\phi) - \frac{1}{2\phi} \sum_{i=1}^n (r_i - \mu)^2 \quad [8]$$

Entonces, el estimador de Máxima Verosimilitud está dado por:

$$\hat{\phi}_{MV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - \mu)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\phi}_{MV}^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - \mu)^2}, \quad [9]$$

el cual presenta sesgo ( $E(\hat{\phi}) \neq \phi$ ) característica no deseada en un estimador. Se busca entonces utilizar la forma insesgada del mismo, esto es:

$$\hat{\phi}_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}{n-1}, \quad [10]$$

donde  $\bar{r}$  es el promedio muestral de los retornos. Además, de la estimación puntual  $\hat{\phi}_{MV}$ , es posible construir un intervalo de confianza al considerar que  $\frac{(n-1)\hat{\phi}_{MV}}{\phi} \sim \chi_{n-1}^2$  dado en Casella & Berger (2001). Al tomar constantes arbitrarias  $a$  y  $b$  tal que,

$$\phi \in \left( \frac{(n-1)\hat{\phi}_{MV}}{b}, \frac{(n-1)\hat{\phi}_{MV}}{a} \right), \quad [11]$$

en consecuencia, se tiene que  $a = \chi_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)}^2$  y  $b = \chi_{1-\frac{\alpha}{2}, (n-1)}^2$ . Por tanto, el intervalo de confianza al  $100(1-\alpha)\%$  de credibilidad para  $\phi$  está dado por:

$$\phi_{MV} \in \left( \frac{(n-1)\hat{\phi}_{MV}}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, (n-1)}^2}, \frac{(n-1)\hat{\phi}_{MV}}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)}^2} \right). \quad [12]$$

Por otro lado, el método de Bootstrap propuesto por Efron (1979), se emplea al considerar como base un estimador, por ejemplo  $\hat{\theta} = \hat{\phi}_{MV}$ , muestras *Bootstrap*, es decir,  $r^* = \text{left}(r_1^*, r_2^*, \dots, r_n^*)$  como una muestra aleatoria de tamaño  $n$ , y  $B$  reemplazamientos de una población de  $n$  objetos  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ . Asociada a cada muestra bootstrap  $r^*$  se puede calcular una replicación de  $\hat{\theta}$ .

$$\hat{\theta}^*(b) = \hat{\theta}(r^{*b}) \quad b = 1, 2, \dots, B, \quad [13]$$

se propone un estimador para  $\phi$  dado por:

$$E(\hat{\phi}_B) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\theta}^*(b), \quad [14]$$

con cuasi-varianza:

$$Var(\hat{\phi}_B) = \frac{\sum_{b=1}^B (\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}^*(\cdot))^2}{B-1}, \quad [15]$$

además, el intervalo de confianza a un  $100(1 - \alpha)\%$  para  $\phi$  está dado por:

$$\left( \hat{\phi}_B - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{Var[\hat{\phi}_B]}, \hat{\phi}_B + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{Var[\hat{\phi}_B]} \right). \quad [16]$$

### 3.2. Enfoque Bayesiano

Desde el enfoque Bayesiano, el parámetro  $\phi = \sigma^2$  se considera como una variable aleatoria que puede ser modelada al usar una distribución continua previa de probabilidad  $h(\phi)$  que puede ser actualizada mediante observaciones de una muestra  $r_1, r_2, \dots, r_n$  como lo plantean Bernardo et al. (2009) y Gelman et al. (2003). Por consiguiente, se obtienen distribuciones posteriores de las que brindan una descripción completa del conocimiento sobre la cantidad aleatoria  $\phi$  obtenido a partir de la cuantificación de las distribuciones previas y la información muestral.

Para determinar la función de densidad de la distribución posterior, se observa que, del teorema de Bayes,

$$Prob(\phi | R_1, \dots, R_n) = \frac{Prob(R_1, \dots, R_n | \phi) Prob(\phi)}{Prob(R_1, \dots, R_n)},$$

con

$$Prob(R_1, \dots, R_n) = \int_0^{\infty} Prob(R_1, \dots, R_n | \phi) Prob(\phi) d\phi,$$

$$Prob(R_1, \dots, R_n | \phi) = L(R_1, \dots, R_n | \phi),$$

y

$$Prob(\phi) = h(\phi).$$

Por tanto, a partir de la función de verosimilitud  $L(\phi, \mu | r_1, r_2, \dots, r_n)$  dado en [7] y una distribución previa  $h(\phi)$ , es posible obtener la distribución posterior de  $\phi$  de la siguiente forma:

$$h(\phi | r_1, r_2, \dots, r_n) = \frac{L(\phi, \mu | r_1, r_2, \dots, r_n) h(\phi)}{\int_0^{\infty} L(\phi, \mu | r_1, r_2, \dots, r_n) h(\phi) d\phi} \quad [17]$$

A continuación, se plantean las siguientes distribuciones previas candidatas para la volatilidad de un activo, bajo el supuesto de que  $\mu = 0$ .

### 3.2.1. Distribución previa no informativa de Jeffreys

Una de las principales fortalezas del método de Jeffreys es su invarianza bajo transformaciones inyectivas, basándose en la medida de información de Fisher sobre  $\phi > 0$ , es decir:

$$I(\phi) = E\left[\frac{\partial \ln L(\phi | r_1, r_2, \dots, r_n)^2}{\partial \phi} \mid \phi\right] = -E\left[\frac{\partial^2 \ln L(\phi | r_1, r_2, \dots, r_n)^2}{\partial \phi^2} \mid \phi\right] \quad [18]$$

así, la distribución *previa* propuesta por Jeffreys para el caso uniparamétrico,

$$h(\phi) \propto \sqrt{I(\phi)} \quad [19]$$

A partir de las ecuaciones [7], [18] y [19] se tiene que la distribución *previa* No informativa obtenida usando el método de Jeffreys se define como:

$$h(\phi) \propto \frac{\sqrt{n}}{\phi} \quad [20]$$

de [17] se tiene:

$$\begin{aligned} h(\phi | r_1, r_2, \dots, r_n) &= \frac{\phi^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\phi} \sum_{i=1}^n r_i^2\right] \phi^{-1} n^{\frac{1}{2}}}{\int_0^{\infty} \phi^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\phi} \sum_{i=1}^n r_i^2\right] \phi^{-1} n^{\frac{1}{2}} d\phi} \\ &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{r_i^2}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \phi^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} \exp\left[-\frac{1}{\phi} \sum_{i=1}^n \frac{r_i^2}{2}\right] \end{aligned} \quad [21]$$

así la distribución *posterior* obtenida, es una distribución Gamma Inversa con parámetros  $(\alpha_1^*, \beta_1^*)$ , donde,  $\left(\alpha_1^* = \frac{n}{2}, \beta_1^* = \sum_{i=1}^n \frac{r_i^2}{2}\right)$ .

### 3.2.2. Estimación de $\phi$ asumiendo una distribución Gamma Inversa como previa

Teniendo en cuenta la naturaleza propia del parámetro de volatilidad que se define como la desviación estándar de los retornos podemos garantizar que  $\phi > 0$ , se considera como buena candidata la distribución previa Gamma Inversa que permite una marcada asimetría dentro de su estructura, es decir, la distribución considera una mayor probabilidad para valores pequeños de parámetro. Autores como Darsinos y Satchell (2001) implementan este modelo como distribución previa en la estimación del parámetro de volatilidad. La función de densidad de la distribución Gamma Inversa con parámetros  $(\alpha; \beta)$  se define como:

$$h(\phi) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \phi^{-(\alpha+1)} \exp\left[-\frac{\beta}{\phi}\right] \quad \alpha > 0 \quad \beta > 0 \quad [22]$$

considerando esta distribución para modelar el comportamiento natural de la volatilidad de los retornos antes de ver los datos de la muestra se obtiene la siguiente distribución posterior:



$$\begin{aligned}
h(\phi | r_1, r_2, \dots, r_n) &= \frac{(2\pi\phi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\phi} \sum_{i=1}^n r_i^2\right] \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \phi^{-(\alpha+1)} \exp\left[-\frac{\beta}{\alpha}\right]}{\int_\phi (2\pi\phi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\phi} \sum_{i=1}^n r_i^2\right] \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \phi^{-(\alpha+1)} \exp\left[-\frac{\beta}{\alpha}\right] d\phi} \\
&= \frac{\left[\beta + \sum_{i=1}^n \frac{r_i^2}{2}\right]^{\alpha+\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\alpha + \frac{n}{2}\right)} \phi^{-\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)-1} \exp\left[-\frac{1}{\phi}\left(\beta + \sum_{i=1}^n \frac{r_i^2}{2}\right)\right]
\end{aligned} \tag{23}$$

Que es una distribución Gamma Inversa de parámetros  $(\alpha_2^*, \beta_2^*)$  con  $\left(\alpha_2^* = \alpha + \frac{n}{2}, \beta_2^* = \beta + \sum_{i=1}^n \frac{r_i^2}{2}\right)$ .

### 3.2.3. Estimación de $\phi$ asumiendo una distribución Lévy Estándar como previa

Es posible considerar la distribución Lévy estándar ( $\mu = 0, \tau$ ) como modelo para expresar la información previa, dado que por razones "externas" (cambios en la economía o en las políticas públicas de los países) se pueden presentar observaciones con valores "extremos". La distribución Lévy Estándar es un caso particular de la distribución Lévy y a la vez pertenece a la familia de distribuciones estables. Estas distribuciones se caracterizan por asignar probabilidad a valores extremos, razón por la que se conoce comúnmente en la literatura como distribuciones de colas pesadas (Nolan, 2003). La forma analítica de la distribución Lévy se define como:

$$h(\phi) = \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \phi^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{\tau}{2\phi}\right] \quad \phi > 0 \quad \tau > 0 \tag{24}$$

De modo que, la distribución posterior obtenida tiene la forma:

$$\begin{aligned}
h(\phi | r_1, r_2, \dots, r_n) &= \frac{(2\pi\phi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\phi} \sum_{i=1}^n r_i^2\right] \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \phi^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{\tau}{2\phi}\right]}{\int_\phi (2\pi\phi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\phi} \sum_{i=1}^n r_i^2\right] \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \phi^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{\tau}{2\phi}\right] d\phi} \\
&= \frac{\left[\tau + \sum_{i=1}^n r_i^2\right]^{\frac{n+3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)} \phi^{-\left(\frac{n+3}{2}+1\right)} \exp\left[-\frac{1}{\phi}\left(\tau + \sum_{i=1}^n r_i^2\right)\right]
\end{aligned} \tag{25}$$

Que es una distribución de probabilidad Gamma Inversa  $(\alpha_3^*, \beta_3^*)$  con:

$$\left(\alpha_3^* = \frac{n+3}{2}, \beta_3^* = \frac{\tau + \sum_{i=1}^n r_i^2}{2}\right).$$

Dado que para las tres distribuciones previas candidatas, esto es, Jeffreys, Gamma Inversa y Lévy estándar, se obtuvieron distribuciones posteriores Gamma Inversa de parámetros  $(\alpha_i^*, \beta_i^*)$  con  $i = 1, 2, 3$  la hace muy útil y práctica para realizar el procedimiento de estimación debido a que se encuentra implementada en la mayoría de software estadísticos.

## 2.1. Método para obtener los valores de los hiperparámetros

Los hiperparámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de la distribución previa Gamma Inversa dada en la ecuación [22] y el hiperparámetro  $\tau$  de la distribución Lévy, dado en [24], son desconocidos y no se cuenta con el criterio

de un experto para establecer valores previos de los mismos. Para obtenerlos se utilizó una aproximación basada en los métodos empíricos de Bayes, de la siguiente forma:

Se tomó un conjunto de observaciones correspondiente a los precios mensuales de un activo, estos son,  $P_1, P_2, \dots, P_n = \{P_t\}_{t=1}^{T=n}$  y a partir de estos se evaluó la serie de retornos que se definió en la ecuación [5]. De acuerdo con los datos correspondiente a los retornos  $\{R_t\}_{t=1}^{T=n-1}$  se realizó una partición de  $m$  subconjuntos excluyentes y exhaustivos con  $k$  elementos cada uno y, para cada subconjunto, se evaluó la varianza para así obtener un vector de estimaciones de la forma  $\hat{\sigma}^2 = \{\hat{\sigma}_j^2\}_{j=1}^m$ .

Como consecuencia de lo anterior, se evaluó el valor medio y la varianza del vector de estimaciones  $\hat{\sigma}^2$  cuyas expresiones están dadas por,  $\mu = \sum_{i=1}^m \frac{\hat{\sigma}_i^2}{m}$  y  $Var = \sum_{i=1}^m \frac{(\hat{\sigma}_i^2 - \mu)^2}{m-1}$ . Estos resultados se igualaron a la forma matemática de la esperanza y la varianza de una distribución Gamma Inversa, dado en [22], para formar un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas definido como:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha - 1} &= E(\hat{\sigma}^2), \quad \alpha > 1 \\ \frac{\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)} &= Var(\hat{\sigma}^2), \quad \alpha > 2 \end{aligned} \tag{26}$$

La solución de [26] están dadas por:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{E[\hat{\sigma}^2]^2 + 2Var[\hat{\sigma}^2]}{Var[\hat{\sigma}^2]}, \\ \beta &= E[\hat{\sigma}^2] \left( \frac{E[\hat{\sigma}^2]^2 + 2Var[\hat{\sigma}^2]}{Var[\hat{\sigma}^2]} - 1 \right) \end{aligned}$$

que define un primer caso para calcular los hiperparámetros de la distribución previa Gamma Inversa.

Un segundo y tercer caso consiste en tomar dos submuestras de la muestra de los retornos  $\{R_t\}_{t=1}^{T=n-1}$ , es decir,  $\{R_t\}_{t=1}^{T=w}$  y  $\{R_t\}_{t=1}^{T=z}$  tal que  $w, z < (n - 1)$  y se calculan la media y la varianza con el fin de reemplazarlos en [26] para obtener dos distribuciones previas Gamma Inversa.

Por otro lado, para obtener información previa acerca del parámetro  $\tau$  de la distribución Lévy estándar dado en [24], se divide el conjunto de las  $m$  varianzas  $\hat{\sigma}^2$  en  $q$  subconjuntos excluyentes y exhaustivos con  $g$  elementos cada uno, es decir,  $\hat{\sigma}_i^2 = \{\hat{\sigma}_{ij}^2\}_{j=1}^g, i = 1, 2, \dots, q$ , y, para cada uno de los grupos, se estima  $\hat{\tau}$  por el método de máxima verosimilitud (MMV), esto es,

$$\hat{\tau} = \frac{g}{\sum_{j=1}^g \phi_{ij}^{-1}} \quad i = 1, 2, \dots, q \tag{27}$$

En consecuencia, se toma el valor mínimo, el máximo y la media de estas estimaciones para establecer el valor de los hiperparámetros de las distribuciones previas Lévy Estándar.

#### 4. Presentación de la información

Los datos de estudio son los precios de cierre de las acciones diarias de la empresa Colombiana de Hidrocarburos Ecopetrol, S.A. Ésta es una empresa estatal colombiana que nació en el año 1951, dedicándose principalmente a la exploración y comercialización de hidrocarburos. En la actualidad, Ecopetrol S.A. es la empresa más grande del país con una utilidad neta de \$15,4 billones registrada en 2011 y la principal compañía petrolera en Colombia. Por su tamaño, pertenece al grupo de las 40 petroleras más grandes del mundo y es una de las cuatro principales de Latinoamérica. Con el fin de crecer e internacionalizarse, Ecopetrol lanza al mercado la venta de paquetes de acciones que cualquier colombiano puede adquirir.

Para obtener los valores de los hiperparámetros se tomaron los datos correspondientes al precio del activo en el periodo comprendido entre el 1 de septiembre de 2011 y el 30 de diciembre de 2017, con un total de 2101 observaciones, obtenidas en <https://www.bvc.com.co>. Para el primer caso se evaluaron los retornos de las acciones que corresponden a 2100 observaciones, para los casos dos y tres se seleccionaron los periodos comprendidos, de 2 de enero de 2016 al 30 de diciembre de 2016 y del 2 de enero de 2017 al 30 de diciembre de 2017 con 243 y 242 observaciones, respectivamente. Los valores de los hiperparámetros se observan en la Tabla 1.

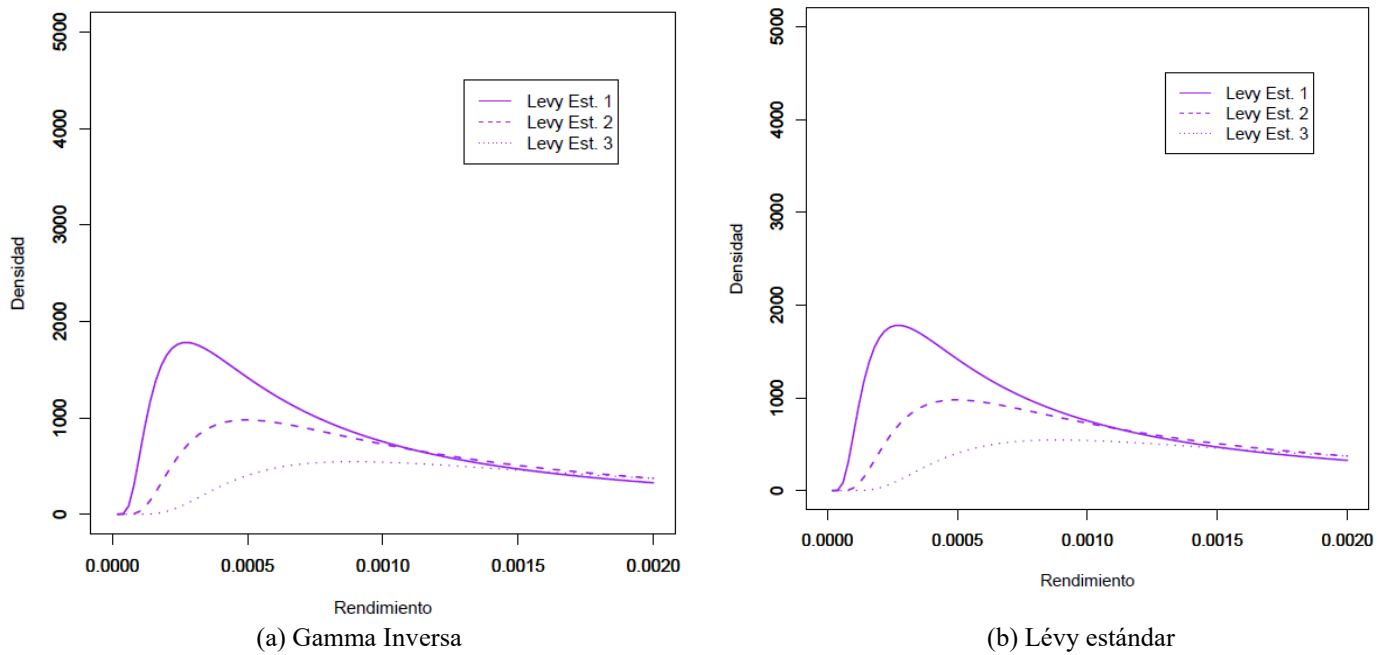
**Tabla 1. Medidas descriptivas de las distribuciones a priori de referencia.**

Distribución previa	Hiperparámetros			Medidas tendencia central		
	$\alpha$	$\beta$	$\tau$	Media	Mediana	Moda
Gamma Inversa	GI1	3.06118	0.00066	0.000320	0.000242	0.000279
	GI2	2.00255	0.001193	0.001228	0.000704	0.000751
	GI3	2.02144	0.002165	0.002103	0.001297	0.000552
Lévy Estándar	LE1		0.000815	10.05	0.002	0.002257
	LE2		0.001486	65.4	0.000	0.002434
	LE3		0.002663	34.76	0.01	0.000736

Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo a las medidas presentadas en la Tabla 1, se observó que el comportamiento de la variable aleatoria cuando se asumen como distribuciones previas Gamma Inversa y Lévy Estándar estas presentan asimetría positiva, estado natural de las distribuciones. Así mismo, en ambos casos se observó que el parámetro de escala tiene efecto sobre la curtosis de la curva de densidad, es decir, en la medida que el parámetro  $\beta$  y  $\tau$  son pequeños la curva de densidad es más apuntada (leptocúrtica, es decir, que para valores pequeños de la varianza asigna una mayor probabilidad) y las colas caen más rápido a cero, pero a medida que el parámetro de escala aumenta, la densidad se hace más platicúrtica y con colas más pesadas (Figura 1).

**Figura 1. Distribuciones previas de referencia.**



Fuente: Elaboración propia.

## 5. Análisis y resultados

Para el proceso de estimación del parámetro  $\phi = \sigma^2$  se evaluaron los retornos de acuerdo a [5] utilizando los precios de cierre diarios de Ecopetrol presentes en el mercado financiero en el periodo comprendido entre el 2 de enero de 2018 y el 3 de abril de 2018, para finalmente obtener una serie de retornos  $R_t$  con 60 observaciones.

**Tabla 2. Medidas descriptivas acciones ECOPETROL**

Medida	Estadístico	
	Precio cierre	Retorno
Media	2543.85	0.003285
Mediana	2505	0.003036
Varianza	15979.49	0.000768
D. Estándar	126.41	0.027713
Asimetría	0.283387	-0.279721
Curtosis	2.39876	2.55656

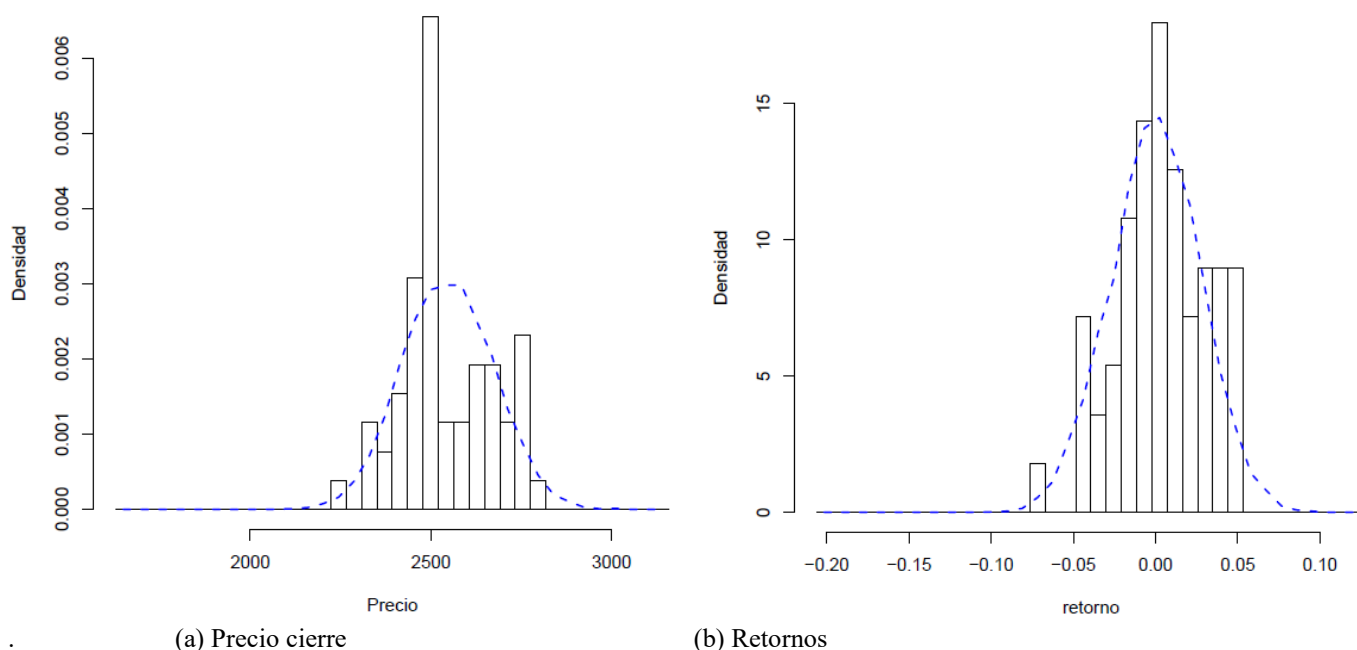
Fuente: Elaboración propia.

En el histograma de la Figura 2 se observa que los datos de la serie de precios no siguen una distribución normal, estando ligeramente sesgada a la derecha y leptocúrtica, con un coeficiente de asimetría de 0,28338 y curtosis de 2,39876. Así mismo, en la Tabla 2 se observa que la serie de retornos  $R_t$  es semejante a una distribución normal, dado que se encuentra ligeramente sesgada a izquierda y leptocúrtica, con asimetría de -0,279721 y curtosis 2,55656. Sin embargo, se aplicó la prueba de Shapiro-Wilk y Jarque-Bera, que contrastan:

- $H_0$  :  $R_t$  sigue una distribución normal de probabilidad  
 $H_a$  :  $R_t$  no sigue una distribución normal de probabilidad

En consecuencia, de acuerdo a los valores  $-p$  asociados a las pruebas de Shapiro-Wilk y Jarque-Bera son de 0.336 y 0.528, por lo que no hay evidencia suficiente para determinar que la serie  $R_t$  no sigue una distribución normal, con un nivel de significancia del 0.05.

**Figura 2. Histograma acciones ECOPETROL.**



Fuente: Elaboración propia.

En la modelación de series temporales es importante identificar si el fenómeno analizado presenta un proceso estacionario, esto es, si la media y la varianza no son variantes a lo largo del tiempo  $1 \leq t \leq 60$ . Para ello, se uso la prueba de Dickey-Fuller, que contrasta:

- $H_0$  :  $\phi = 1$   
 $H_a$  :  $\phi < 1$

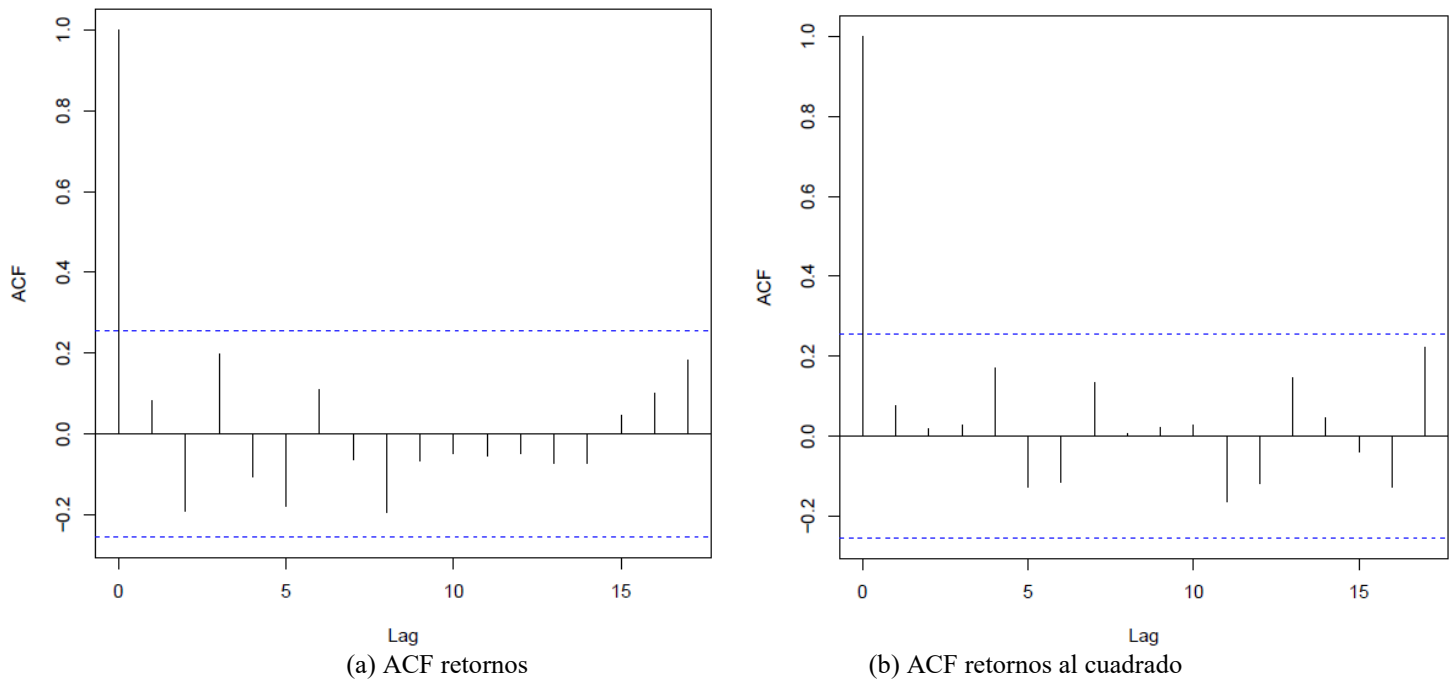
con estadístico de prueba,

$$DF = \frac{\hat{\phi} - 1}{\sqrt{Var[\hat{\phi}]} } \sim t_{n-1},$$

y permitió concluir que, con un nivel de significancia del 0.05, la serie de los precios  $\{P_t\}_{t=1}^{61}$  no se comporta, estadísticamente, como un proceso estacionario, con un  $valor-p$  del 0.252, mientras que, con un  $valor-p$  del 0.01 la serie de retornos  $\{R_t\}_{t=1}^{60}$ , se comporta, estadísticamente, como un proceso estacionario. Por tanto, es de total interés analizar los rendimientos de la serie a través de los retornos de estas acciones.

En la Figura 3 se puede observar que las series  $R_t$  y  $R_t^2$  poseen pocos retardos significativos que se encuentran por fuera de los intervalos de confianza del 95%; sin embargo, se aplica la prueba de Ljung-Box, para comprobar la significancia de las autocorrelaciones hasta el retardo 20.

**Figura 3. Función de autocorrelación de la serie de retornos.**



Fuente: Elaboración propia.

Luego, la prueba Ljung-Box contrasta el siguiente planteamiento de hipótesis:

$$\begin{aligned}
 H_0 &: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_k = 0 \\
 H_a &: \rho_i \neq 0 \text{ para algún } i = 1, 2, \dots, k,
 \end{aligned}$$

donde  $k$  es el número de retardos a probar. Los  $p$ -valores asociados al estadístico de prueba para las series  $R_t$  y  $R_t^2$  son del 0.581 y 0.36, respectivamente, por lo que no hay evidencia suficiente para determinar que las series  $R_t$  y  $R_t^2$  presentan retardos significativos, con un nivel de significancia del 0.05 por tanto, no hay presencia de autocorrelación serial. Esto sugiere no ajustar un modelo en media condicional como de varianza condicional para los retornos. Ahora, sin pérdida de generalidades se consideró el parámetro de localización  $\mu = 0$  en la estimación del parámetro de volatilidad.

Una vez determinada y analizada la muestra de estudio, en la Tabla 3 se reportan los modelos posteriores de estimación y a partir de estas formas matemáticas en la Figura 4 se observan las densidades posteriores asociadas al parámetro  $\sigma^2$  obtenidas a partir de las distribuciones previas asumidas. Para cada distribución se evaluó el estimador de Bayes con respecto a la función de pérdida cuadrática, esto es, se toma la esperanza (media) de la distribución posterior como medida que resume la información de  $\sigma^2$  tal como se observa en la Tabla 4, con estimación por el método Bootstrap para  $B = 10000$ . Además, dado que la varianza es un operador lineal de la desviación estándar, en consecuencia, en la Tabla 5 se reportan las estimaciones de  $\sigma$ .

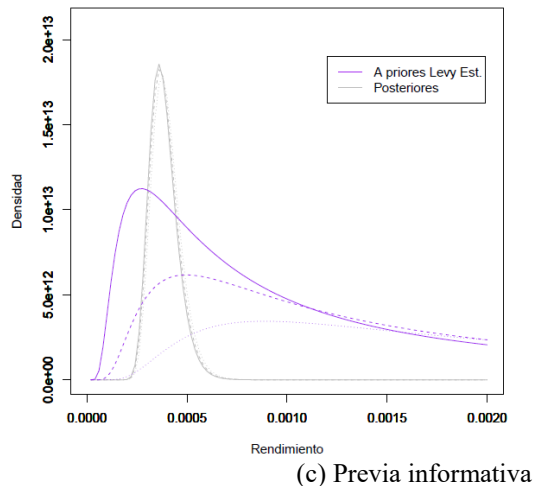
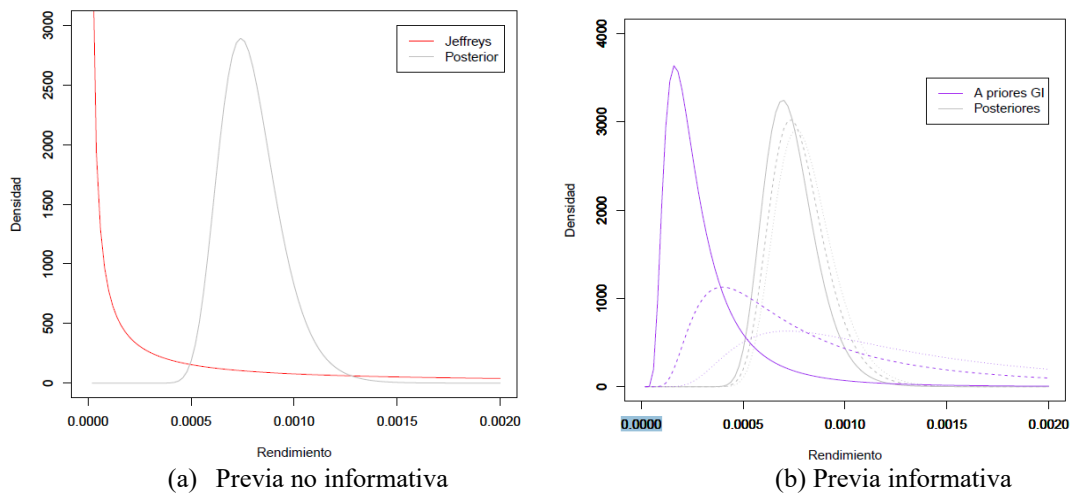
Cuando se utilizó una distribución previa no informativa, las estimaciones no son muy diferentes a las observadas utilizando los métodos de la Máxima Verosimilitud y Bootstrap, lo que era de esperar dado que, al no contar con información sobre la cantidad aleatoria de interés en el proceso de estimación, entonces, se espera que el peso de la información suministrada por los datos sea mayor en la distribución posterior. Sin embargo, es importante resaltar que las regiones de credibilidad del 95% tienden a tomar rangos de valores más estrechos que los observados en los clásicos intervalos de confianza. Esto se evidencia en la Figura 5.

**Tabla 3. Actualización de los modelos de estimación a partir de la muestra.**

Modelo	Estadístico suficiente
MMV	$\hat{\phi}_{MV} = \frac{1}{59} \sum_{i=1}^{60} (r_i - 0.00328)^2$
Bootstrap	$E(\hat{\phi}_B) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\theta}^*(b) \quad B = 10000$
Previa	Distribución Posterior
Jeffreys	$GI(30, 0.0229811)$
Gamma Inversa1	$GI(33.0611, 0.02364)$
Gamma Inversa2	$GI(32.0025, 0.02417)$
Gamma Inversa3	$GI(32.02144, 0.02514)$
Levy Estándar1	$GI(31.5, 0.01189)$
Levy Estándar2	$GI(31.5, 0.01223)$
Levy Estándar3	$GI(31.5, 0.01282)$

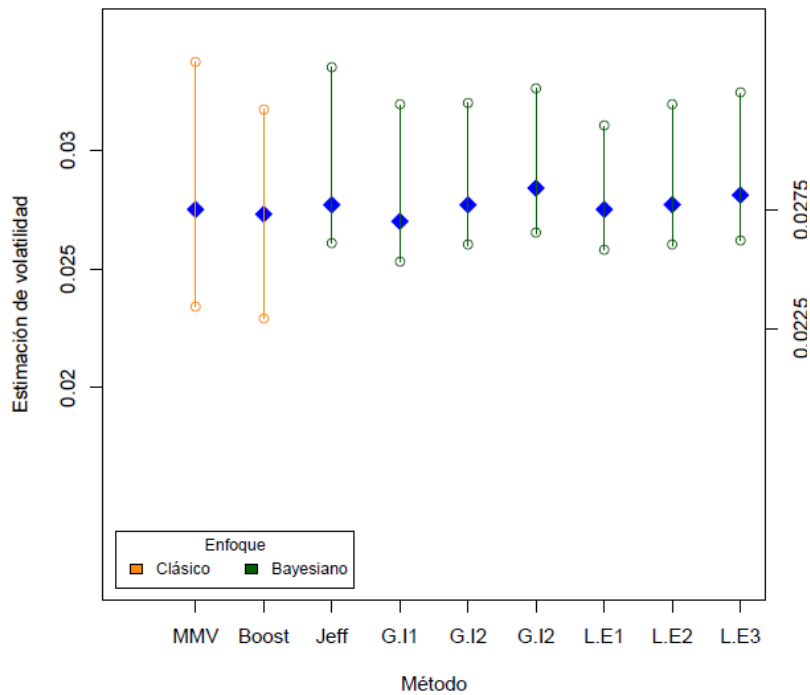
Fuente: Elaboración propia.

**Figura 4. Formas de las distribuciones a priori y a posteriores.**



Fuente: Elaboración propia.

**Figura 5. Estimación por intervalos.**



Fuente: Elaboración propia.

Por otro lado, si se utilizan las distribuciones previas informativas los resultados con este tipo de distribuciones no poseen una variación relevante con respecto a las obtenidas por el método clásico; sin embargo, se calculó el error estándar de estimación (EE) y se observó que en los modelos bayesianos el EE tiende más rápido a cero en comparación con los EE obtenidos por los métodos clásicos. Esto permite tener una mejor precisión en la estimación del parámetro.

De acuerdo con los resultados presentados en las Tablas 4 y 5, se observó que algunas estimaciones en particular son las mismas para los diferentes enfoques, es decir, dado el caso de la estimación por el método de la Máxima Verosimilitud, ésta es igual al estimador bayesiano obtenido asumiendo una distribución previa Lévy Estándar con hiperparámetros dados por el caso uno, cuya longitud de intervalo es 0.01032 y 0.00719 respectivamente; sin embargo, se observaron diferencias en la longitud de las regiones de credibilidad a favor de las estimaciones bayesianas. Así mismo, cuando se asumen distribuciones previas diferentes bajo el mismo enfoque, se sigue presentando que los estimadores bayesianos sean iguales, esto ocurre cuando se asumen las distribuciones previas Gamma Inversa, Lévy Estándar con hiperparámetros dados por el caso dos y la distribución previa de Jeffreys, cuyas longitudes de las regiones de credibilidad está dadas por 0.00723, 0.00719 y 0.00752, respectivamente; en particular se observó que la amplitud de las dos primeras regiones es menor que al asumir la distribución previa de Jeffreys.

Finalmente, dado que desde el enfoque bayesiano se proponen siete distribuciones previas diferentes para obtener una estimación de  $\sigma^2$  y además dos modelos desde el enfoque clásico, se hace necesario establecer cuál de los mismo es el más adecuado para representar los resultados.



**Tabla 4. Estimación de  $\hat{\sigma}^2$  de la aproximación clásica, bayesiana y por regiones**

<b>Enfoque</b>	<b>Modelo</b>	<b><math>\hat{\sigma}^2</math></b>	<b>IC 95%</b>
Clásico	MMV	0.00076	(0.0005, 0.0011)
	Bootstrap	0.00075	(0.0005, 0.0010)
<b>Distribución Posterior</b>		<b><math>\hat{\sigma}^2</math></b>	<b>RC 95%</b>
Bayesiano	Gamma Inversa1	0.00077	(0.0006, 0.0011)
	Gamma Inversa2	0.00073	(0.0006, 0.0010)
	Gamma Inversa3	0.00077	(0.0006, 0.0011)
	Gamma Inversa4	0.00081	(0.0007, 0.0011)
	Gamma Inversa5	0.00076	(0.0006, 0.0010)
	Gamma Inversa6	0.00077	(0.0006, 0.0011)
	Gamma Inversa7	0.00079	(0.0006, 0.0011)

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 5. Estimación de  $\hat{\sigma}$  a partir de  $\hat{\sigma}^2$  desde los diferentes enfoques.**

<b>Enfoque</b>	<b>Modelo</b>	<b><math>\hat{\sigma}</math></b>	<b>IC 95%</b>	<b>EE</b>
Clásico	MMV	0.02756	(0.0234 , 0.0337)	0.0035
	Bootstrap	0.02738	(0.0229 , 0.0317)	0.0002
<b>Distribución Posterior</b>		<b><math>\hat{\sigma}</math></b>	<b>RC 95%</b>	<b>EE</b>
Bayesiano	Gamma Inversa1	0.02774	(0.0261 , 0.0337)	$1.9e^{-05}$
	Gamma Inversa2	0.02701	(0.0253 , 0.0321)	$1.7e^{-05}$
	Gamma Inversa3	0.02774	(0.0260 , 0.0332)	$1.8e^{-05}$
	Gamma Inversa4	0.02846	(0.0265 , 0.0338)	$1.9e^{-05}$
	Gamma Inversa5	0.02756	(0.0258 , 0.033)	$1.8e^{-05}$
	Gamma Inversa6	0.02774	(0.026 , 0.0331)	$1.8e^{-05}$
	Gamma Inversa7	0.02810	(0.0262 , 0.0336)	$1.8e^{-05}$

Fuente: Elaboración propia.

## 5.1 Criterios de selección del modelo

De acuerdo a la naturaleza propia del modelo de Black Scholes, que define el valor de la *prima* que se debe pagar al momento de realizar el contrato entre las partes, y dado que la volatilidad es una medida de incertidumbre, entonces el objetivo en esta sección es presentar los procedimientos de selección del modelo que mejor se ajuste a lo que sucede en la realidad. Entre los procedimientos se encuentran el criterio del DIC y dos formas heurísticas; estos procedimientos se plantearon dado que no se contó con información sobre el cálculo de la prima real para contrastar los resultados obtenidos en el presente trabajo.

**Caso I:** Desde el punto de vista bayesiano, se utiliza el Criterio de Información de la Desviación (Deviance information criterion, DIC), que se basa en la distribución posterior, dado que la log-verosimilitud del modelo es una medida de ajuste del modelo a los datos, y la desviación es una medida de discrepancia entre el modelo y los datos.

El criterio del DIC se calcula mediante la expresión:

$$DIC = P_d + P_h,$$

donde:

$$P_d = P_h - \text{media}[-2 \ln L(r_1, \dots, r_n | \text{Var}[h(\phi | r_1, \dots, r_n)])]$$

$$P_h = \text{media}[h(\phi | r_1, \dots, r_n)].$$

De acuerdo a la escala de interpretación del DIC, modelos con menor valor indican modelos plausibles para el ajuste de los datos. Por consiguiente, con el fin de identificar el modelo apropiado para la estimación del parámetro de volatilidad, en la Tabla 6 se observa que la distribución previa Gamma Inversa con hiperparámetros dados por el caso tres posee un menor valor en el DIC, seguido de la distribución Lévy Estándar caso tres.

**Tabla 6. Criterio DIC.**

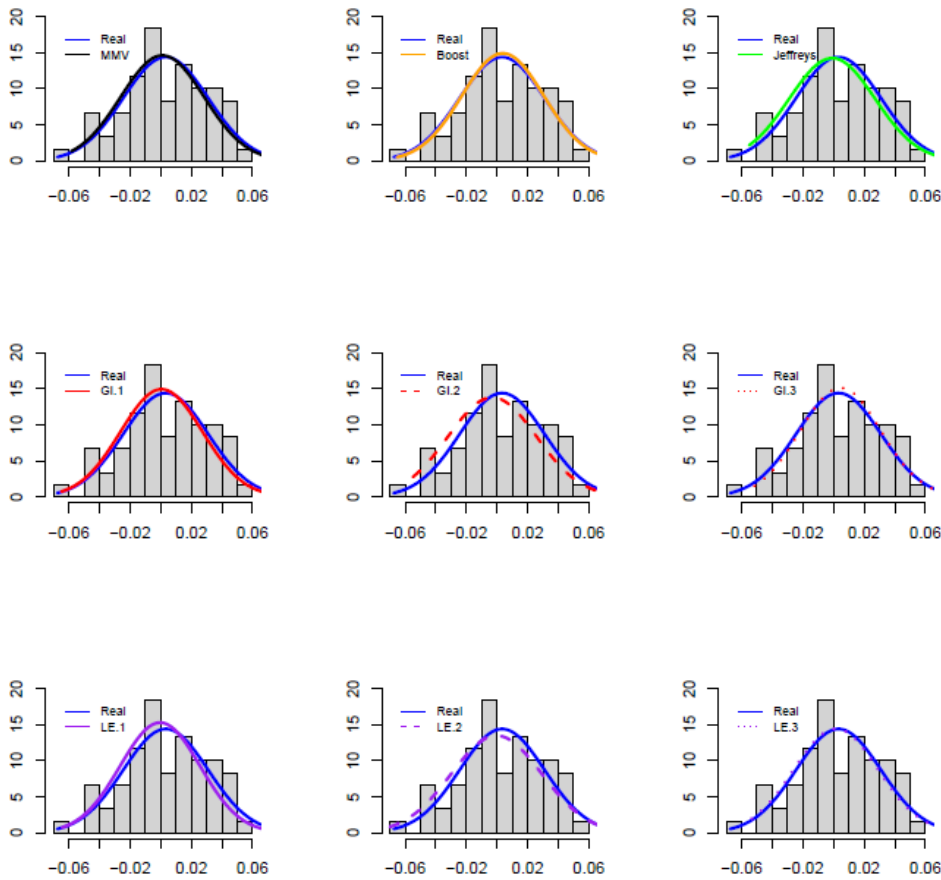
Previa	Posterior	DIC
Jeffreys	Gamma Inversa	2672.85
		3060.45
Gamma Inversa	Gamma Inversa	2742.58
		2534.51
		2832.83
Lévy Estándar	Gamma Inversa	2753.31
		2631.79

Fuente: Elaboración propia.

**Caso II: Aproximación heurística 1**, se considera un método empírico en el que se realiza un estudio de simulación de la distribución normal  $N(\mu, \sigma)$  tomando las estimaciones del parámetro  $\hat{\sigma}$  de los nueve modelos asociados a  $\sigma^2$  y reportados en la Tabla 5, es decir, el objetivo es determinar si las distribuciones simuladas presentan un buen ajuste con respecto a la serie de datos considerada en el estudio.

De acuerdo con la Figura 6 se evidencia que el comportamiento de las funciones de densidad de probabilidad para las distribuciones simuladas asociadas a los modelos clásicos, estos es, Máxima Verosimilitud y Bootstrap, como los modelos bayesianos, con distribuciones previas Gamma Inversa y Lévy Estándar con hiperparámetros dados por el caso tres; no presentan diferencias significativas con respecto a la función de densidad de probabilidad de la serie  $R_t$ , es decir, la curva de densidad simulada se superpone (los datos obtenidos usando estos modelos son muy próximos a los reales) sobre la densidad real, caso que no ocurre con los otros modelos en estudio. Sin embargo, se evaluó el error estándar de estimación (EE) y se observó que el método de Bootstrap presenta el menor EE con relación al método de Máxima Verosimilitud; además, entre los estimadores bayesianos obtenidos asumiendo como distribuciones previas Gamma Inversa y Lévy Estándar con hiperparámetros dado por el caso tres, poseen el menor valor del EE. Así mismo, los modelos que presentan menor EE subestiman el valor  $\hat{\sigma}$  como se observa en la Tabla 7.

**Figura 6. Comparación entre las observaciones reales y simuladas  $N(0, \hat{\sigma})$ .**



Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 7. Estudio simulación  $N(0, \hat{\sigma})$  para  $n=60$ .**

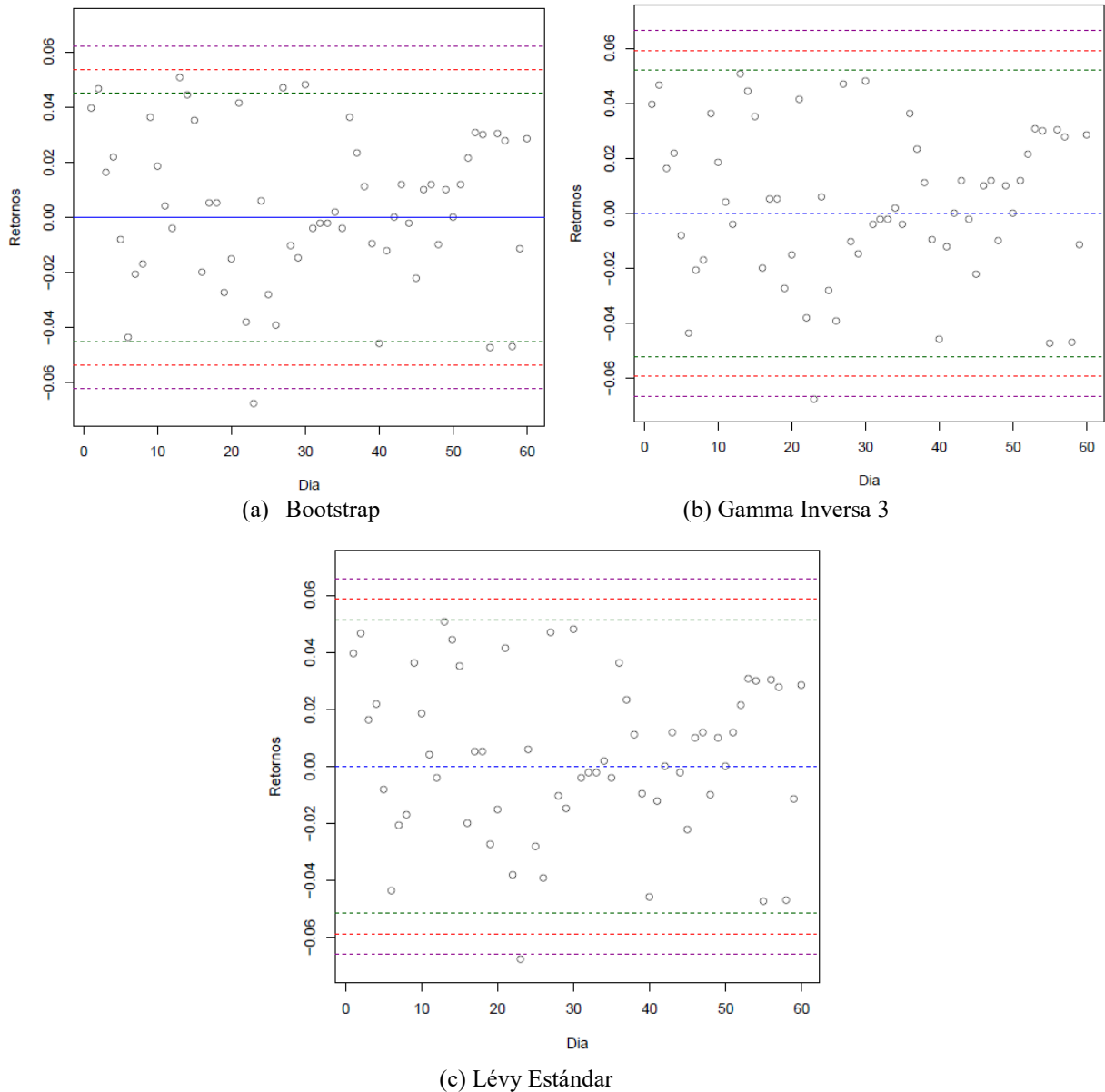
Aproximación	Modelo	$\hat{\sigma}$	$E(\hat{\sigma})$	EE
Clásica	MMV	0.02756	0.027271	0.003520
	Bootstrap	0.02738	0.026736	0.003451
Bayesiana	Jeffreys	0.02774	0.028005	0.003615
	Gamma Inversa 1	0.02701	0.026732	0.003451
	Gamma Inversa 2	0.02774	0.028935	0.003735
	Gamma Inversa 3	0.02846	0.026402	0.003408
	Lévy Estándar 1	0.02756	0.028747	0.003711
	Lévy Estándar 2	0.02774	0.029610	0.003822
	Lévy Estándar 3	0.02810	0.027638	0.003568

Fuente: Elaboración propia.

Dado que las observaciones obtenidas usando el modelo ajustado con las estimaciones Bootstrap presentan menor variabilidad en el intervalo de confianza y menor error estándar de estimación con relación al método de Máxima Verosimilitud, y además las distribuciones previas Gamma Inversa y Lévy Estándar con hiperparámetros dados por el caso tres poseen menor DIC y error estándar de estimación, en la Figura 7 se observan las bandas de confianza para la volatilidad de los retornos, con

un nivel de confianza del 95%, tanto para las estimaciones puntuales como para los extremos de los intervalos en el enfoque clásico como bayesiano, mencionados anteriormente.

**Figura 7. Bandas de Confianza al 95% para la volatilidad de los retornos.**



Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 7 se observa, que ambos métodos de estimación, clásico y bayesiano, no logran capturar la totalidad de los retornos. Sin embargo, al analizar los extremos de los intervalos de las estimaciones para  $\sigma$ , se evidencia que los métodos bayesianos logran capturar mayor información que el método clásico. Por tanto, los métodos bayesianos, además de presentar menor variabilidad en sus regiones de credibilidad al 95% logran capturar más información de los retornos que el método clásico.

**Caso III: Aproximación heurística 2**, se realiza el pronóstico del precio del activo  $\hat{P}_t$  a partir de la ecuación diferencial estocástica propuesta por Paul Samuelson en 1965, ecuación de la que se generaliza el modelo de Black Scholes. De acuerdo con la revisión de la literatura (Hull, 2006; Venegas, 2008) se sigue que el modelo que pronostica el precio del activo, está dado por:

$$\hat{P}_t = P_{t-1} \exp\left(\hat{\mu} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2\right) + \hat{\sigma}\epsilon_t, \quad [28]$$

donde  $\epsilon_t \sim N(0,1)$ .

Para realizar el pronóstico de los precios de un activo mediante el modelo [28], los parámetros  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\sigma}$  no deben variar drásticamente en el tiempo, es decir, se debe verificar que la serie de retornos  $R_t$  no presenta autocorrelación significativa entre dos periodos de tiempo, lo que ya se verificó anteriormente (Figura 3).

En consecuencia, se obtienen nueve estimaciones diferentes para el precio del activo  $\hat{P}_t$ , y a partir de las estimaciones del precio se evaluó la estimación de la serie de retornos  $\hat{R}_t$  y a la vez se calculó las siguientes medidas de error,

- Error Absoluto Medio (Mean Absolute Error (MAE))

$$MAE = \frac{1}{60} \sum_{t=0}^{60} |R_t - \hat{R}_t|. \quad [29]$$

- Error Porcentual Absoluto Medio (Mean Absolute Percentage Error (MAPE))

$$MAPE = \frac{1}{60} \sum_{t=0}^{60} \left| \frac{R_t - \hat{R}_t}{R_t} \right|. \quad [30]$$

donde el MAE es una métrica que determina la distancia ponderada entre los valores observados y los estimados. Si el MAE es próximo a cero, indica que la estimación, asociada a cualquiera de los modelos en estudio, predice observaciones del parámetro con una muy buena exactitud. Así mismo, el MAPE es la medida de los valores absolutos ponderada por el inverso del valor real. Estos pesos consiguen reducir el efecto de los errores asociados a los valores extremos; en tal caso se considera que la predicción es buena si se acerca al valor real.

En el modelo [30] se aplicó considerando  $P_0 = \$2260$  que representa la primera observación de la muestra en estudio, y  $\hat{\mu} = 0,003285\%$ . Una vez obtenida las estimaciones del precio se evaluó la serie de retornos y se observó que en las medidas de evaluación de pronóstico el modelo bayesiano que asumió como distribución previa Gamma Inversa caso uno posee el menor valor en MAE y MAPE, con relación a los demás modelos, lo que confirma que dicho modelo pronostica con mínimo error los retornos de las acciones de ECOPETROL (Tabla 8).

**Tabla 8. Errores de pronóstico métodos clásico y bayesiano.**

Aproximación	Modelo	MAE	MAPE
Clásica	MMV	$1.1146e^{-05}$	0.0008704
	Bootstrap	$1.1076e^{-05}$	0.0008648
	Jeffreys	$1.1222e^{-05}$	0.0008762
Bayesiana	Gamma Inversa 1	$1.0926e^{-05}$	0.0008531
	Gamma Inversa 2	$1.1222e^{-05}$	0.0008762

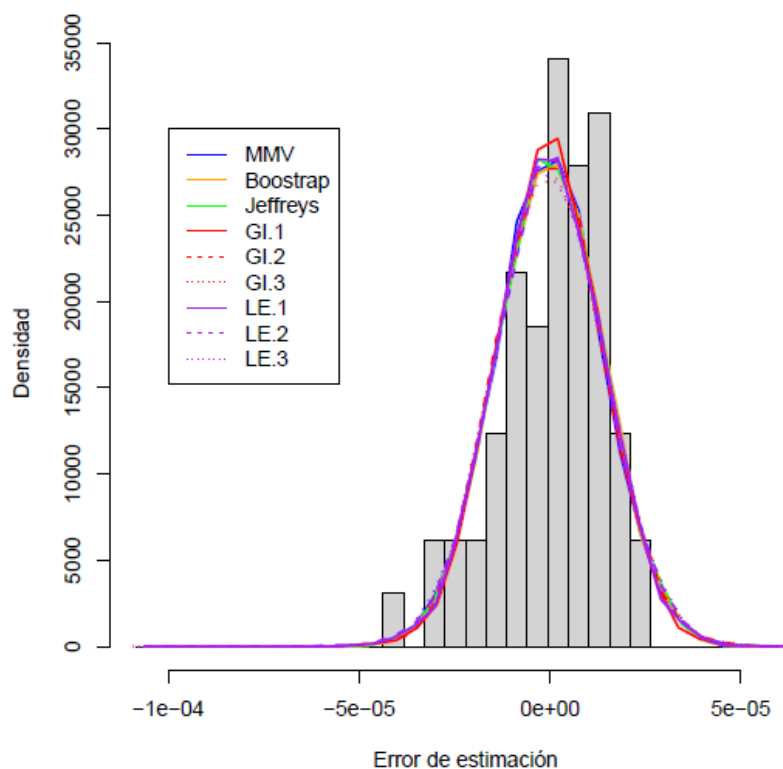
Gamma Inversa 3	$1.1114e^{-05}$	0.0008989
Lévy Estándar 1	$1.1146e^{-05}$	0.0008704
Lévy Estándar 2	$1.1222e^{-05}$	0.0008762
Lévy Estándar 3	$1.1168e^{-05}$	0.0008876

Fuente: Elaboración propia.

Además, se realizó la comparación gráfica de la diferencia entre los retornos pronosticados y los reales ( $\Delta t = R_t - \hat{R}_t$ ), evidenciando que la distribución de los errores presenta un centramiento próximo a cero y es leptocúrtica (Figura 8). Sin embargo, se evaluó las medidas de tendencia central y se observó que en particular los errores asociados a la estimación asumiendo la distribución previa Gamma Inversa caso uno, presentó el menor rango de estimación con un valor de la media muy próxima a cero y muy cercano al valor de la mediana.

En general, se evidenció que tanto los errores de estimación como las medidas de tendencia central para los errores en los diferentes modelos no presentan grandes diferencias.

**Figura 8. Errores de pronóstico.**



Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 9. Estadística descriptiva de los errores.**

Modelo	Media	Mediana	Des. Estándar	Mínimo	Máximo
MMV	$1.284e^{-08}$	$1.266e^{-06}$	$1.395e^{-05}$	$-3.848e^{-05}$	$2.629e^{-05}$
Bootstrap	$1.590e^{-08}$	$1.258e^{-06}$	$1.387e^{-05}$	$-3.823e^{-05}$	$2.630e^{-05}$
Jeffreys	$1.614e^{-08}$	$1.274e^{-06}$	$1.405e^{-05}$	$-3.873e^{-05}$	$2.665e^{-05}$
Gamma Inversa 1	$1.567e^{-08}$	$1.241e^{-06}$	$1.368e^{-05}$	$-3.771e^{-05}$	$2.595e^{-05}$
Gamma Inversa 2	$1.614e^{-08}$	$1.274e^{-06}$	$1.405e^{-05}$	$-3.873e^{-05}$	$2.665e^{-05}$
Gamma Inversa 3	$1.661e^{-08}$	$1.308e^{-06}$	$1.441e^{-05}$	$-3.974e^{-05}$	$2.735e^{-05}$
Lévy Estándar 1	$1.284e^{-08}$	$1.266e^{-06}$	$1.395e^{-05}$	$-3.848e^{-05}$	$2.629e^{-05}$
Lévy Estándar 2	$1.614e^{-08}$	$1.274e^{-06}$	$1.405e^{-05}$	$-3.873e^{-05}$	$2.65e^{-05}$
Lévy Estándar 3	$1.637e^{-08}$	$1.291e^{-06}$	$1.423e^{-05}$	$-3.923e^{-05}$	$2.700e^{-05}$

Fuente: Elaboración propia.

## 6. Conclusiones

En este documento se ha desarrollado la estimación del parámetro de volatilidad del modelo de Black Scholes, expresado a través de la varianza de los retornos usando métodos propios del enfoque clásico como bayesiano. Desde el enfoque bayesiano se propone una metodología estadística para la estimación de los hiperparámetros de las distribuciones previas propuestas en el estudio. Al usar los métodos bayesianos, se observó que la estimación del parámetro de volatilidad tiende a tomar un rango de valores más estrechos que el observado en el enfoque clásico, es decir, dichas regiones de credibilidad al 95% presentan una menor variabilidad en la estimación. Además, se evidenció que los métodos bayesianos logran capturar más información de los retornos que el método clásico de acuerdo al gráfico Bandas de confianza para la volatilidad (Figura 7). En nuestra revisión de la literatura no encontramos estudios en los que se haya considerado como distribución previa Lévy Estándar al parámetro de volatilidad.

De acuerdo a la comparación de los modelos bayesianos para la estimación de la volatilidad, se observa que cuando se toma como distribución previa Gamma Inversa (caso tres), ésta presenta un menor valor en el DIC indicando que el modelo tiene un mejor ajuste frente a los demás, seguido de la distribución previa Lévy Estándar caso tres. Sin embargo, cuando se asume la segunda forma heurística para la elección del modelo considerando los dos enfoques, clásicos y bayesianos, se puede concluir que, en el enfoque clásico la técnica de Bootstrap presentó menor error de estimación del parámetro comparado con el método de la Máxima Verosimilitud y los estimadores bayesianos que asumieron como distribuciones previas Gamma Inversa y Lévy Estándar con hiperparámetro dado por el caso tres, presentaron el menor valor en el error de estimación. Así mismo, al considerar la segunda forma heurística, se tiene que los modelos bayesianos que asumieron como distribución previa Gamma Inversa y Lévy Estándar (caso uno) logran realizar pronósticos tanto del precio de la acción como de los retornos con el menor error de estimación observado (considerando  $\mu \neq 0$ ). En general, los estimadores obtenidos por los modelos bayesianos, cuando se asumen las diferentes distribuciones previas, presentan un buen desempeño en la estimación del parámetro de volatilidad, en cuanto a las estimaciones por regiones y minimizando el error de estimación.

Finalmente, nuestros resultados nos permiten concluir que es posible obtener estimaciones de muy buen rendimiento para el parámetro de volatilidad, utilizando como distribuciones previas Gamma Inversa ( $\alpha, \beta$ ) con hiperparámetro obtenido a partir de las observaciones comprendidas entre el 2 de enero de 2017 y el 30 de diciembre de 2017, donde se evaluó la media y la varianza cuyos resultados se reemplazaron en la ecuación [26]; sin embargo, independiente del caso de los hiperparámetros en los diferentes procedimientos, se evidenció que los resultados no presentan diferencias significativas, es

decir, la metodología propuesta se puede aplicar en diferentes campos de estudio, donde la variable de interés presente un comportamiento asimétrico positivo.

Por otro lado, nuestros resultados tienen usos potenciales en la gestión de riesgos, aunque no consideramos problemas de cartera, es posible llevar a cabo dichas extensiones. Del mismo modo, se podría utilizar esta metodología en modelos de precios de opciones distinto al de Black-Scholes. Se deja como consideración para próximos estudios incorporar aleatoriedad tanto al precio del activo subyacente como a la tasa de interés. Así mismo, se puede considerar otro tipo de distribuciones asimétricas utilizadas y comparar los resultados tomando como distribuciones de referencia Gamma Inversa y Lévy Estándar, puesto que, de acuerdo a los resultados obtenidos en este trabajo de investigación, éstas resultan ser buenas candidatas a la hora de ajustar datos con presencia de valores extremos.

## Referencias

- Achcar, J.A., Lopes, S.R., Mazucheli, J., & Linhares, R.A. (2013). Bayesian approach for stable distributions: some computational aspect. *Open Journal of Statistics*, 3(4), 268-270.
- Alexander, C. (2005). Modelos De Mercado: um Guia Para Análise de Informações Financeiras. *Market Models: a Guide for Financial Information Analysis*. BM&F/Saraiva, São Paulo.
- Awartani, B.M., & Corradi, V. (2005). Predicting the volatility of the S&P-500 stock index via GARCH models: the role of asymmetries. *International Journal of Forecasting*, 21(1), 167-183.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 9, 81-89.
- Bernardo, J., & Smith, A. (2009). *Bayesian theory*. New York: John Wiley & Sons.
- Bolsa de valores de Colombia (2019, 02 de agosto). <https://www.bvc.com.co/pps/tibco/portalbvc>.
- Box, G., & Tiao, G. (1973). *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.
- Casella, G., & Berger, R (2001). *Statistical Inference*. United States: Duxbury Advanced Series.
- Cortes, C., & Cangrejo, A. (2018b). Modelo de volatilidad en un mercado financiero colombiano. *Comunicaciones en Estadística*, 11(2), 191-218.
- Cortes, C., & Cangrejo, A. (2019). Modelo de volatilidad a los precios de cierre de la acción PFCEMARGOS comprendidas entre 16/mayo/2013 al 31/mayo/2017. *Cuadernos de Economía*, 42(119), 119-138.
- Cox, J., Ross, S., & Rubenstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7, 229-264.



- Chen, Z., Du, J., Li, D., & Ouyang, R. (2013). Does foreign institutional ownership increase return volatility? Evidence from China. *Journal of Banking & Finance*, 37(2), 660-669.
- Danielsson, J. (1994). Stochastic Volatility in Asset Prices Estimation with Simulated Maximum Likelihood. *Journal of Econometrics*, 64, 375-400.
- Darsinos, T., & Satchell, S. (2001). Bayesian analysis of the Black-Scholes option price. *University of Cambridge*, 9, 4-36.
- Efron, B. (1979). Bootstrap methods: another looks at the jackknife annals of statistics. *The Annals of Statistics*, 7(1), 1-26.
- Franco, P.B.A., Restrepo, D.A., & Pérez, F.O. (2007). Estudio de efectos asimétricos y día de la semana en el índice de volatilidad VIX. *Revista Ingenierías Universidad de Medellín*, 6(11), 125-147.
- Gelman, A., Carlis, J., Stern, H., & Rubin, D. (2003). *Bayesian data analysis*. New York: Chapman & Hall.
- Goudarzi, H., & Ramanarayanan, C. (2010). Modeling and estimation of volatility in Indian stock market. *International Journal of Business and Management*, 5(2), 85-98.
- Ho, W., Lee, A. & Marsden, A. (2011). Use of Bayesian Estimates to determine the Volatility Parameter Input in the Black-Scholes and Binomial Option Pricing Models. *Journal of Risk and Financial Management*, 7, 74-96.
- Hull, J.C. (2005). *Fundamentals of Futures and Options Markets*. New Jersey: Prentice Hall.
- Hull, J.C. (2006). *Options, Futures, and Other Derivatives*. New Jersey: Pearson.
- Karolyi G.A. (1993). A Bayesian Approach to Modeling Stock Return Volatility for Option Valuation. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18(4), 579-594.
- Kearney, C., & Daly, K. (1998). The causes of stock market volatility in Australia. *Applied Financial Economics*, 8(6), 597-605.
- Khan, F., Khan, S.U.R., & Khan, H. (2016b). Pricing of risk, various volatility dynamics and macroeconomic exposure of firm returns: New evidence on age effect. *International Journal of Economics and Financial Issues*, 6(2), 551-561.
- Martínez, F. (2008). *Financial and economic risks: Derivatives and economic decisions under uncertainty*. México D.F.: Cengage Learning Editores.
- Merton, R. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell. Journal of Economics and Management Science*, 4, 14-32.
- Ncube, M., & Satchell, S. (1997). The Statistical Properties of the Black-Scholes Option Price. *Mathematical Finance*, 7, 287-305.

- Nguyen, V.B. (2015). Effects of fiscal deficit and money M2 supply on inflation: evidence from selected economies of Asia. *Journal of Economics, Finance and Administrative Science*, 20(38), 49-53.
- Nolan, J. P. (2003). Modeling financial distributions with stable distributions. *Handbooks in Finance*, 1, 105-130.
- Rossetti, N. , Nagano, M., & Meirelles, J. (2017). A behavioral analysis of the volatility of interbank interest rates in developed and emerging countries. *Journal of Economics, Finance and Administrative Science*, 22(42), 99-128.
- Sharif, J., Hashim, K., & Faisal, K. (2018). Return Volatility and Macroeconomic Factors: A Comparison of US and Pakistani Firms. *Business & Economic Review*, 10(2), 1-28.
- Tsay, R.S. (2005). *Analysis of financial time series*. New Jersey: John Wiley & Sons.