REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (35). Páginas 360-388.
Junio de 2023. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
www.upo.es/revistas/index.php/RevMetCuant/article/view/6092

Valoración de estrategias competitivas, acuerdos colaborativos y penalizaciones con Opciones Reales Multinomiales y Teoría de Juegos

Milanesi, Gastón Silverio
Universidad Nacional del Sur (Argentina)
Correo electrónico: milanesi@uns.edu.ar

RESUMEN

El diseño y elección de estrategias en entornos competitivos requiere considerar tres posibles fuentes de incertidumbre: riesgos derivados de las acciones propias, riesgos emergentes de estados de la naturaleza y riesgos derivados de las decisiones de competidores. La Teoría de Opciones Reales analiza los dos primeros riesgos, pero no incorpora la incertidumbre derivada de las acciones de los competidores. Para ello, la Teoría de Juegos debe sumarse al modelo. Se desarrolla un modelo numérico de Teoría de Juego y Opciones Reales Multinomiales, para valorar estrategias competitivas secuenciales de iniciativa (preemption) y acuerdos estratégicos (join venture). Además, para los acuerdos es desarrollado un modelo de cálculo de penalizaciones, una herramienta analítica para calcular resarcimientos monetarios ante incumplimiento contractual. Las estrategias puras y mixtas son seleccionadas con equilibrios de Nash y valoradas con opciones reales multinomiales. El marco teórico expone el modelo binomial y el multinomial para evaluar riesgo tecnológico y de mercado no correlacionado. También, son desarrollados los elementos básicos de la Teoría de Juegos y sus formas de resolución. A continuación, utilizando la metodología de casos, el modelo es aplicado para valorar casos de estrategias de iniciativa y acuerdo. Los resultados obtenidos son presentados en forma extensiva y matricial. Finalmente, se expone la valoración de multas para inducir las conductas cooperativas y cumplimiento de acuerdos.

Palabras clave: valoración de estrategias; opciones reales multinomiales; teoría de juegos; estrategia de iniciativa; acuerdo estratégico; valoración de penalizaciones.
Clasificación JEL: C71, C72, G13, G32.
MSC2010: 03H10.

Artículo recibido el 11 de julio de 2021 y aceptado el 23 de septiembre de 2022.

Valuation of competitive strategies, collaborative agreements and penalties with Multinomial Real Options and Game Theory

ABSTRACT

In competitive environments, the design and election of strategies demand considered three potential sources of uncertainty: risks derived from self-actions, risks emerged from states of nature and risks derived from competitors´ decisions. The Real Options Theory analyses the first two risks, but doesn´t incorporate the uncertainty derived from competitors´ actions. For that, the Games Theory must be added to the model. Its develops a numerical model of Games Theory and Multinomial Real Options for value sequential preemption strategies and join venture. In addition, for the agreement a penalty calculator model is developed, an analytic tool for calculating monetary compensations facing contractual defaults. The strategies pure and mixed are selected with Nash equilibrium and valued with multinomial real options model. The theoretical framework exposes the binomial and multinomial model for valuing non correlation technological and markets risk. Also, Game Theory´ basic elements and resolutions forms are developed. Next, using the cases methodology, the model is applied for valuing preemption and join venture strategies cases. The obtained results are showed in extensive and matrix form. Finally, for inducing cooperative behaviors and agreement´s observance, the pecuniary fine valuation is exposed.

Keywords: strategies valuation; multinomial real options; game theory; pre-emption; join venture; penalties valuation.
JEL classification: C71, C72, G13, G32.
MSC2010: 03H10.

1. Introducción

Las decisiones de inversión en mercados competitivos pueden asimilarse a un "juego" donde la elección de la mejor estrategia es función de su valor actual y las posibles respuestas de los competidores. El análisis debe incorporar tres tipos de incertidumbres: propias de las decisiones propias del agente, emergentes de los estados de la naturaleza, las posibles acciones que seleccionen competidores y otros agentes. En tal sentido, el objetivo del presente trabajo es proponer un modelo analítico que incorpore las fuentes de incertidumbres aludidas para la elección de la estrategia que maximiza el beneficio esperado de la firma. El resultado del modelo y consecuente elección se condiciona al conjunto de información presente disponible sobre el futuro, donde las decisiones presentes condicionan las futuras (Massé, 1963).

La Teoría de Opciones Reales proporciona el marco conceptual para valorar la flexibilidad estratégica contenida en las decisiones de inversión, no obstante, solamente dos fuentes de incertidumbre son incorporadas en forma activa: riesgo de las decisiones propias y de los estados de la naturaleza. Los cursos de acción de la competencia son una variable pasiva. Por otro lado, dado los pagos y expectativas de los agentes, la Teoría de Juegos presenta el marco teórico para modelar las potenciales conductas, sobre la base de soluciones de equilibrio.

El resultado de conjugar la Teoría de Opciones Reales con Teoría de Juegos da como resultado un conjunto de modelos, siguiendo a Smit y Trigeorgis (2004), estos se clasifican en:

a. Modelos Simples de Teoría de Juego y Opciones Reales (SROG, *standard real options games*): los primeros trabajos corresponden a Smit y Ankum (1993), Dixit y Pindyck (1994), Grenadier (1996), Kulatilaka y Perotti (1998), Smit (2003), Chevalier-Roignant, Flath y Trigeorgis (2011), entre otros. El común denominador de estos modelos está dado por los supuestos básicos: el valor de la inversión es una variable aleatoria (subyacente) que sigue un proceso estocástico (por lo general geométrico y aritmético browniano con modificaciones). El proceso planteado de manera discreta o continua y los agentes neutrales al riesgo. El costo de la inversión es hundido y cierto. El problema es estudiado de manera aislada, donde es analizado el curso de acción y valorado mediante modelos de opciones. Seguidamente es analizada la interacción estratégica entre los competidores, planteando soluciones de equilibrio que permitan anticipar y explicar conductas. Los casos de estudios tradicionales son: las estrategias de iniciativa (*preemption game*) y las de desgaste (*war of attrition game*). En el primer caso existen incentivos a tomar la primera decisión, como el caso de lanzamiento de un producto donde la iniciativa inicial tenga como recompensa esperada una mayor participación de mercado mediante la generación de barreras de entradas para el rival. En las estrategias de desgaste se supone que existe un incentivo a esperar y mover en segundo término. En ambos casos la ventaja competitiva se supone limitada. En estos casos el movimiento de quien toma la iniciativa o del seguidor, no elimina la potencial participación de mercado correspondiente al rival. Las conductas cooperativas permiten acceder situaciones superiores en relación a los resultados de suma cero (Axelrod, 1986). En términos de cursos de acción de empresas implica promover la concreción de acuerdos estratégicos, estableciendo penalizaciones que promuevan incentivos de cumplimiento (Milanesi & Thomé, 2015).

b. Modelos Complejos de Teoría de Juegos y Opciones Reales (NSROG, *non-standard real options games*). Presentan dos o más variables estocásticas y las decisiones no se toman en un punto del tiempo determinado. Se conjugan modelos microeconómicos sobre estructuras de mercados con opciones de salidas, asimetrías entre firmas, estructuras informativas (perfectas/imperfectas), cooperación entre firmas, participaciones en el mercado, entre otras situaciones de mercado-competencia. Se puede citar trabajos como los de Ghemawat y Nalebuff (1985), Fudenberg y Tirole (1986), Lambrecht (2001), Grenadier (2002), Lambrecht y Perraudin (2003), Paxson y Pinto (2003), Murto (2004), Smit y Trigeorgis (2004), Pawlina y Kort (2006), Hsu y Lambrecht (2007), Paxson y Melmane (2009), Armada, Kryzanowski y Pereira (2009), Thijssen (2010), Graham (2011), Boyer, Laserrere, Moreaux (2012), entre otros.

Un aspecto que diferencia a la Teoría de Juegos con los SROG está dado por la manera de estimar los pagos (flujos) esperados, donde en los modelos SROG son calculados aplicando Teoría de Opciones Reales, cosa que no sucede en un planteamiento tradicional de juegos.

El trabajo propone un modelo simple de Opciones Reales y Teoría de Juegos para valorar estrategias de iniciativa y acuerdos estratégicos cuantificando penalizaciones. El aporte del trabajo reside en proponer un modelo sencillo, discreto, que valora múltiples fuentes de incertidumbre con opciones reales arco iris y las conductas de los agentes se anticipa con los equilibrios de un juego. Además, el trabajo propone un modelo de cuantificación de penalizaciones ante el incumplimiento de conductas pactadas en acuerdo estratégicos con soluciones cooperativas. El trabajo se estructura de la siguiente manera: en la siguiente sección es desarrollado el modelo numérico de valoración estratégica. Seguidamente, analizando la técnica de casos en administración, se plantea una estrategia de lanzamiento con diferimiento o inversión, sin acuerdo estratégico y luego con acuerdo. Finalmente se exponen las principales conclusiones.

2. Marco teórico: Opciones Reales Multinomiales y Teoría de Juegos

La presente sección se realiza una breve revisión sobre los fundamentos de los modelos de opciones reales y la valoración binomial y multinomial. Este último es la herramienta para valuar opciones arco iris, que describen múltiples fuentes de riesgo, para este caso el tecnológico y de mercado. El desarrollo de las opciones arco iris es tomado de Copeland y Antirakov (2003) y Brous (2011). Seguidamente se presentan los conceptos vinculados a la Teoría de Juegos, sus elementos y formas de resolución, en especial usando equilibrios de Nash. La valoración de las estrategias de iniciativa con un modelo multinomial y en base a equilibrios modelar los posibles comportamientos de los agentes son los insumos para analizar estrategias con un modelo simple de opciones y juegos, siguiendo la lógica de Smit y Trigeorgis (2004).

2.1. Modelo binomial y multinomial en la valoración de Opciones Reales

La valoración de la flexibilidad estratégica reconoce sus bases en modelo de Black-Scholes-Merton (Black & Scholes, 1972; Merton, 1973) para valuar contratos de opciones financieras, este último conocido bajo las siglas BMS. Ante la necesidad de aplicar la lógica de la valuación contingente a las estrategias y decisiones de inversión empresariales, fue menester desarrollar un modelo sencillo en tiempo discreto (Wilmott, 2009). Como respuesta nace el modelo binomial de valuación de opciones desarrollado por Cox, Ross y Rubinstein (1979), conocido bajo las siglas CRR, luego el modelo Rendleman y Bartter (1979) y a continuación el modelo propuesto de Jarrow y Rudd (1982), siendo el primero de los tres el de mayor difusión. En el caso del modelo binomial, en función de sus especificaciones y planteamiento de variables a lo largo de su desarrollo, y conservando su estructura binomial, derivó en once variantes, en el límite todas generando el mismo resultado que BSM (Van der Hoek & Elliot, 2006; Chance, 2008).

En el caso de las opciones reales, una de las primeras aproximaciones fue desarrollada por Merton (1974), al considerar el capital accionario como una opción de compra sobre los activos. Del modelo de Merton se desprenden un conjunto de adaptaciones utilizando opciones exótica barrera para predecir fracasos financieros (Brockman & Turtle, 2003; Milanesi, Pesce & El Alabi, 2016; Milanesi, 2019) o planteamientos binomiales donde el valor de la firma en marcha es condicionado a las posibilidades de fracasos financieros (Broadie & Kaya, 2007)). Dada la necesidad de vincular el planemiento estratégico con las finanzas coporativas los primeros trabajos desarrollan modelos en tiempo discreto o continuo para valorar flexibilidad estratégica en situaciones específicas, tanto operativa (opciones de diferimiento, crecimiento compuestas, abandono, contracción, expansión, intercambio de tecnología) como financiera (opción de default o salidas tempranas) entre otras (Dixit & Pindyck, 1994; (Smit & Nau, 1995; Trigeorgis, 1995). Un interesante desarrollo sobre los trabajos seminales en materia de opciones se puede encontrar en Smit y Trigeorgis (2004), capítulo 3.

El modelo supone mercados financieros perfectos, eficientes informativamente y completos. La completitud de mercado permite suponer que el riesgo correspondiente a los flujos del proyecto surge de la volatilidad de activos financieros gemelos o réplica manteniéndose constante para todo el horizonte de proyección. En su instrumentación este supuesto resulta relevante, pues no siempre los mercados son completos para cualquier clase de proyectos o activos reales (intangibles, empresas de base tecnológica, empresas cerradas, estrategias puntuales de la firma) (Dixit & Pindyck, 1994; Smith & Nau, 1995). Este es una de las debilidades que presenta producto de la diferente naturaleza de los activos reales frente a los financieros. Los primeros no son divisibles, a menudo carecen de liquidez, no existe eficiencia informativa y por ende frecuencia de datos, que aseguren el cumplimiento del teorema central del límite y normalidad (Wilmott, 2009). En el caso de activos reales cuyos flujos de fondos se encuentren explicados principalmente por la evolución del precio de un commodity (industrias extractivas o explotaciones primarias), existe información de mercado para inferir la volatilidad y aplicar modelos de pagos contingentes. La mayoría de los primeros trabajos versan sobre este tipo de proyectos. En el caso de innovaciones como empresas de base tecnológicas, nuevas estrategias o desarrollo de intangibles, a menudo no existen precios de mercado comparables ni observables. En estos casos debe inferirse la volatilidad mediante simulación a partir del enfoque MAD (marketed asset disclaimer).

Como consecuencia de ello evolucionó hacia formas complejas, en especial hacia el tratamiento de la volatilidad. En este sentido se pueden agrupar los modelos en:

a) Enfoques de simulación para calcular volatilidad a partir del modelo MAD (*Marketed Asset Disclaimer*): Copeland & Antikarov, 2003; Smith, 2005; Medina & Rodriguez, 2010; Brandao, Dyer & Hahnn, 2012; Pareja, Prada & Moreno, 2019, entre otros.

b) Incorporación de momentos estocásticos de orden superior, probabilidades implícitas; desplazamiento en la volatilidad y variación en el riesgo: Rubinstein, 1983, 1994; Derman, Kani & Chriss, 1996; Rubinstein, 1998; Haahtela, 2010, 2011; Milanesi, 2013; Milanesi, Pesce & El Alabi, 2013; Milanesi & Tohmé, 2014; Culik, 2016, entre otros.

c) Desagregación de riesgos y uso de rejillas multinomiales: Boyle, 1988; Smith & Nau, 1995; Rubinstein, 2000; Lari-Lavassani, Simchi & Ware, 2001; Gamba & Trigeorgis, 2007; Korn & Muller, 2009; Brandao & Dyer, 2009; Brous, 2011; Haahtela, 2011; Zapata, 2019; Milanesi, 2021, 2022, entre otros.

A continuación, serán desarrollados los fundamentos del modelo binomial. Seguidamente será abordado el desarrollo del modelo multinomial con múltiples fuentes de incertidumbre, que será la herramienta para valorar estrategias de los agentes empleando opciones arco iris.

2.1.1. Modelo binomial

El modelo supone que todos los riesgos del proyecto son explicados y resumidos por la volatilidad (σ) correspondiente a la variabilidad de los flujos de fondos esperados generados por el activo real (subyacente). La variable indicada es la puerta de entrada para calcular coeficientes de ascenso (u) y descenso (d) cuya función es modelar el recorrido estocástico discreto del subyacente.

$$u = e^{\sigma\sqrt{t}} \quad [1]$$

$$d = \frac{1}{u} \quad [2]$$

A continuación, calcular los coeficientes neutrales al riesgo (p):

$$p = (e^{rt} - d)/(u - d) \quad [3]$$

El proceso recursivo por paso, de valoración correspondiente al valor del subyacente y su flexibilidad (V_t) queda expresado de la siguiente manera:

$$V_t = \{p \times V_{t+1}^u + (1-p) \times V_{t+1}^d\} \times e^{-rt} \quad [4]$$

En forma general, para *n* periodos el planteamiento es:

$$V_0 = \left[\sum_{j(T)=0}^{j\,(T)=n} max(V_{j(T)} - X) \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j}\right] e^{-rT} \quad [5]$$

El valor terminal de la flexibilidad estratégica es la expresión, $max(V_{j(T)} - X)$. Representa el valor terminal de la opción en el horizonte *T*, multiplicado por las probabilidades neutrales al riesgo obtenidas a partir de la combinatoria correspondiente al periodo *n*, nodo *j*, actualizado a la tasa sin riesgo (*r*). Siguiendo a Arnold y Crack (2003) y Milanesi (2011), el mismo proceso puede desarrollarse con probabilidades “reales” (q). Estos último son más pesimistas (p < q) pues incorporan el ajuste por riesgo en su magnitud. La ecuación 4 queda planteada como:

$$V_t = \left\{\left[q \times V_{t+1}^u + (1-q) \times V_{t+1}^d\right] - \left[\frac{V_{t+1}^u - V_{t+1}^d}{u-d} \times \left(e^k - e^{rt}\right)\right]\right\} \times e^{-rt}$$

en donde el ajuste por riesgo es la expresión:

$$\frac{V_{t+1}^u - V_{t+1}^d}{u-d} \times \left(e^k - e^{rt}\right)$$

2.1.2. El modelo multinomial y las opciones arco iris

Conforme fue explicado en el apartado anterior en la medida volatilidad se resumen todos los riesgos del proyecto. Sería el caso de inversiones en actividades extractivas o primarias, donde la principal fuente de riesgo proviene del mercado, ya que existe un estándar tecnológico en la industria. En otros proyectos como desarrollo de estrategias en I&D (Investigación y Desarrollo), inversiones en empresas de base tecnológica, inversiones en innovaciones tecnológicas, nuevos productos, existe una clara separación entre el riesgo de mercado que impacta sobre la demanda y el riesgo tecnológico. Este último representa el éxito o fracaso del desarrollo previo a su comercialización. El condicionamiento tecnológico demanda un tratamiento específico para cada fuente de incertidumbre, en donde no sería apropiado resumir todo el riesgo del proyecto en una única variable. Al existir varias fuentes de incertidumbre la distribución binomial deriva en una expresión multinomial. En este caso los modelos de pociones son conocidos como arco iris (*rainbow options*): Boyle, 1988; Kamrad & Ritchken, 1991; Tian, 1993; Copeland & Antikarov, 2003; Herath & Kumar, 2006; Brandao & Dyer, 2009; Brous, 2011; Zapata, 2019, entre otros.

Tomando como base la propuesta contenida en Copeland y Antikarov (2003) y Brous (2011), es desarrollado un modelo con dos fuentes de riesgos no correlacionadas entre sí (ver Copeland y Antirakov (2003) y Brandao y Dyer (2009) donde son desarrollados modelos multinomiales con riesgos correlacionados): riesgo de mercado y tecnológico, de comportamiento independiente. El modelo se desarrolla de la siguiente manera:

a. El valor del activo es explicado por una función multinomial con dos fuentes de incertidumbre, $V = (F_1; F_2)$,

b. Evolucionan según su volatilidad generando movimientos ascendentes y descendentes: $F_1(\sigma_1; u_1;\ d_1)$ y $F_2(\ \sigma_2; u_2;\ d_2)$.

c. Para el presente trabajo F_m representa la incertidumbre de mercado y F_t incertidumbre relativas a la resolución de problemas tecnológicos.

Primero se modela el recorrido del subyacente, éste representado por el valor actual del proyecto. Para ello se utilizan los movimientos ascendentes y descendentes propios del riesgo de mercado $F_m(\sigma_m; u_m;\ d_m)$, donde V_{t+1} es el valor esperado del activo subyacente.

$$V_{t+1} = \{V_t \times u_m; V_t \times d_m\} \quad [6]$$

El siguiente paso consiste en calcular los coeficientes equivalentes ciertos combinados, derivados de combinar las dos fuentes de riesgo. Para ello, previamente se debe determinar las probabilidades neutrales al riesgo propias de cada fuente de incertidumbre. Para ello el paso previo consiste en calcular las probabilidades neutrales al riesgo para cada fuente, con la lógica del modelo binomial. Obtenidos los cuatro coeficientes equivalentes ciertos: $F_m(p_{um}; p_{dm})$ de mercado y $F_t(p_{ut}; p_{dt})$ tecnológico, se estiman los coeficientes combinados (ec.7)

$$p_{um,ut} = (p_{um} \times p_{ut});\ \ p_{um,dt} = (p_{um} \times p_{dt});\ p_{dm,ut} = (p_{dm} \times p_{ut});\ p_{dm,dt} = (p_{dm} \times p_{dt}) \quad [7]$$

Los coeficientes calculados se utilizan para estimar recursivamente el valor ajustado por riesgo en los nodos donde existe exposición a las múltiples fuentes de riesgo (ec.8).

$$V_t = \left\{p_{um,ut} \times V_{t+1}^{um,ut} + p_{um,dt} \times V_{t+1}^{um,dt} + p_{dm,ut} \times V_{t+1}^{dm,ut} + p_{dm,dt} \times V_{t+1}^{dm,dt}\right\} \times e^{-rt} \quad [8]$$

En la expresión anterior V_t representa el valor del proyecto en el instante *t* y e^{-rt} el factor de actualización al tipo sin riesgo. En aquellos nodos temporales donde la incertidumbre tecnológica se encuentre resuelta, directamente se aplica la ecuación 4, pues solamente existe exposición al riesgo de mercado.

2.2. Elementos y resolución de estrategias mediante Teoría de Juegos

En esta sección se exponen de manera sucinta los principales atributos y forma de resolución de un juego, donde no se pretende agotar el tema. Para los lectores interesados se sugiere se pueden citar manuales introductorios (Aguado, 2007) y lecturas avanzadas como Guintis (2009), entre otras.

Elementos de un juego: actores, estrategias a seguir, momento en que son realizadas las estrategias y pagos o valores correspondientes a las estrategias.

a) Los actores son los agentes representativos que toman decisiones, influenciadas por los pagos esperados, condicionados por eventos tecnológicos y de mercado, a menudo conocidos como estados.

b) El momento en que se realizan las estrategias constituye otro factor importante, siendo un punto del tiempo o nodo decisorio. Cuando los agentes toman decisiones en el mismo momento de tiempo se dice que el juego es de movimientos simultáneos. Cuando uno de los agentes toma la iniciativa, el juego es secuencial en cuanto a decisiones. En ambos casos, quien desarrolla la estrategia debe saber que los movimientos posteriores o inmediatos del oponente tienen impacto económico sobre sus decisiones.

c) Las estrategias resultan de la sumatoria de "mejores" acciones seleccionadas por el agente. Se vinculan al conjunto de información disponible para cada jugador. En juegos con información completa los jugadores conocen con certeza el conjunto de acciones de los participantes, existiendo un conocimiento común, compartido y simétrico. En el caso de información incompleta, las partes tiene información asimétrica respecto de los movimientos de sus oponentes. En estos casos el juego es imperfecto, en tanto que las estrategias son conocidas con probabilidad de ocurrencia.

d) Finalmente, deben cuantificarse los flujos asociados a cada estrategia, ya que el agente representativo (empresa) selecciona la alternativa que maximiza su valor.

Las estrategias diseñadas por los agentes son valuadas en *t+1*. Cada estrategia incorpora la resolución de la incertidumbre tecnológica, la cual condiciona el resultado del mercado. El valor ajustado por riesgo para cada estrategia es:

$$V_{t=0} = \frac{p_u \times V_{i,(t+1)} + p_d \times V_{j,(t+1)}}{1+r} \qquad [9]$$

donde $V_{ij,(t+1)}$ representa el valor de la estrategia condicionada por el comportamiento de la demanda, favorable p_u, desfavorable p_d. Se modela una acción estratégica para cada escenario de mercado.

Representación de un juego: los juegos se representan en forma extensiva (árboles de decisión) o matricial (matrices) de decisión (Aguado, 2007). Ambas representaciones contienen los elementos indicados: agentes, acciones y estrategias, momento de decisión y flujos de fondos asociados a las estrategias.

Solución de un juego: es un resultado obtenido a partir de una metodología donde se estima el conjunto de óptimas decisiones para una trayectoria. En principio y de manera similar a la teoría financiera neoclásica, se supone conducta racional respecto de los actores. Esta racionalidad correspondiente a cada actor es aceptada como un "*conocimiento común*". Esto significa que los jugadores están seguros del comportamiento racional de la otra parte, consecuentemente deciden asumiendo dicha conducta. Al inicio del juego los actores determinan sus elecciones futuras condicionadas a los posibles estados de la naturaleza, atendiendo las acciones posibles de los otros jugadores. La solución de un juego se logra arribando a un equilibrio de Nash. Representa un conjunto de estrategias donde se llega a una situación en la que ningún jugador puede mejorar su situación actual cambiando unilateralmente su posición o estrategia. En un equilibrio de Nash (en honor a su creador y premio Nobel de Economía John Nash) cada jugador sigue la mejor estrategia en respuesta a la mejor estrategia que puede implementar el otro jugador.

Siguiendo a Dixit y Nalebuff (1991), se resumen las siguientes reglas para llegar a un equilibrio en juegos dependiendo de la información y de si los movimientos son simultáneos o no secuenciales:

a) Resolución por estrategias dominantes. Para juegos donde los movimientos son simultáneos, este tipo de resolución implica determinar las estrategia dominante o superior a otras posibles, sin considerar las posibles reacciones de su competidor. En otras palabras, cualquiera que sea la acción llevada a cabo por el competidor, el agente estudiado no podría mejorar su flujo de fondo seleccionando una estrategia diferente a la dominante. Una estrategia dominada es aquel conjunto de acciones que nunca va a ser mejor, en términos de flujos esperados, que la estrategia dominante. Nunca será seleccionada por el agente racional en lugar de la estrategia dominante. El proceso para su determinación de la solución consiste en la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas. Se inicia eliminando estrategias dominadas para un jugador, luego se procede a determinar las estrategias dominadas para la otra firma. Finalmente, descartadas las estrategias dominadas para ambas partes, debe emerger la estrategia dominante, el resto son consideradas dominadas. Puede ocurrir que no exista estrategia dominante para un jugador, pero sí para el competidor. En tal caso la respuesta de la firma debe ser la mejor en relación a dicha estrategia dominante. Pueden existir juegos o planteamientos donde no exista una solución con estrategias estrictamente dominante puras; en tal caso la resolución se lleva a cabo con estrategias mixtas. Estrategia mixta entendida como una combinación lineal de varias estrategias, con probabilidad de ocurrencia asociada a cada camino alternativo.

b) Equilibrios de Nash. Un equilibrio de Nash es una combinación de estrategias en la que la opción seleccionada por un jugador es óptima dada la opción seleccionada por el resto. El jugador forma su decisión a partir de la creencia o proyección acerca de la conducta del rival, asumiendo que estos son agentes representativos, seleccionando la mejor estrategia maximizadora de su utilidad esperada. Todos los jugadores basarán sus elecciones en dicha creencia en relación a las conductas de los participantes, en tal sentido las decisiones conducirán a un equilibrio de Nash. Si se encuentra un equilibrio de Nash, ningún jugador tendrá incentivos individuales para cambiar dicha estrategia. No necesariamente un equilibrio de este tipo es un equilibrio de estrategia dominante, pero lo contrario es cierto: un equilibrio de estrategias dominantes es de Nash y será el único equilibrio posible del juego. La forma tradicional de encontrar equilibrios en un planteamiento matricial que consiste en subrayar los pagos correspondientes a la estrategia elegida por cada jugador en función de lo que pudiera elegir el otro. Un equilibrio de Nash debe sortear exitosamente el proceso de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas. Puede existir más de un equilibrio de Nash: serán equilibrios fuertes y débiles, a partir de las preferencias intuitivas de los participantes y de sus incentivos a cooperar o competir. Cabe destacar que un equilibrio fuerte puede no ser un óptimo Paretiano, pero sí una solución al juego, atendiendo a los incentivos (Aguado, 2007). Nash (1953) define a los juegos cooperativos donde los intereses de las partes no se encuentran totalmente opuestos, pero tampoco alineados en su totalidad. Se supone que los agentes racionales pueden discutir y acordar un plan de acción conjunto bajo alianzas que inducen al cumplimiento. No es cooperativo si las partes no pueden comunicarse o cumplir el acuerdo. Puede ocurrir que no exista equilibrio de Nash con estrategias puras, obteniendo soluciones en función a las probabilidades de ocurrencia de eventos, es decir, con estrategias mixtas. Se puede interpretar que toma valor el hecho de tener conductas "no predecibles", observable en el caso de estrategias mixtas en juegos repetitivos de suma cero (gana una parte a costa de que pierda otra), por ejemplo, en los juegos que simulan comportamiento en los mercados de capitales. No es tan obvio en los casos de juegos donde existe un interés común, en estos casos los equilibrios a partir de estrategias mixtas conducen a obtener pagos inferiores a la mejor solución posible.

c) Equilibrios en juegos dinámicos o secuenciales. Las soluciones con estrategias dominantes son utilizadas a menudo en los juegos simultáneos. En los juegos dinámicos las decisiones no se toman de forma concomitante, si no de manera secuencial: primero actúa uno y luego el otro. Puede ocurrir que surjan equilibrios de Nash, que incluyan acciones que no sean óptimas para el jugador que debería realizarlas si le correspondiese jugar en ese momento. Esta situación se evita exigiendo equilibrios de Nash perfectos en subjuegos. Un subjuego es la parte del juego que falta jugar, a partir de cualquier punto de información de dominio público de lo acontecido hasta ese momento del tiempo. En este tipo de juego, el planteamiento es extensivo en el tiempo. Cada participante debe anticipar los movimientos de su rival desconstruyendo las estrategias. Al igual que las opciones, el juego se resuelve de manera recursiva. Los juegos secuenciales pueden ser finitos, llegando a su término en un número de casos y permitiendo recorrer todo el árbol de decisiones. En otras palabras, se debe determinar la acción óptima del individuo que actuará en último lugar. Quien deba realizar la elección en penúltimo lugar, deberá asumir que el último actuará de esa manera en la que a él le toque actuar. Quien actúe en antepenúltimo lugar sabrá que el agente que actúo en anteúltimo lugar, tendrá en cuenta lo que hará quién actúe en último lugar. Las decisiones vendrán condicionadas por el último nodo, es decir, por el previsible y proyectado transcurso del juego. Cuando un jugador desconoce lo que ha hecho el otro anteriormente al momento de tomar su decisión, el juego será idéntico a un juego de decisión simultánea en planteamiento y resolución. Se puede complicar el análisis con tres o más jugadores. Por ejemplo, tres jugadores el tercero desconoce lo que hizo el primero, pero conoce lo que hizo el segundo. En este caso el juego se representa de forma extensiva y se plantean los conjuntos de información.

Los juegos repetidos son juegos concretos que se practican una y otra vez. Si se repite un número finito de veces y existe un equilibrio de Nash, es de preveer que se adopten estrategias que integran dicho equilibrio a lo largo de todas las etapas del juego. Técnicamente, en el caso de incertidumbre, es planteado un árbol con probabilidades binomiales, se cuantifican los flujos de fondos y se plantean los subjuegos. Estos permiten identificar equilibrios de Nash, dada la acción precedente para luego proceder a la valuación recursiva. Un jugador a menudo emplea amenazas (por ejemplo, invertir ahora y no diferir), para inducir al otro a llevar a cabo una estrategia determinada. La resolución recursiva considera las amenazas sostenibles y desecha las no creíbles.

Si el juego se repite infinitamente, es probable que emerjan acciones cooperativas a diferencia de juegos finitos (Axelrod, 1986). Por ejemplo, en el caso del dilema del prisionero, si el juego se repite un número finito de veces, el equilibrio de Nash será único con la estrategia dominante de traición, obteniéndose un pago o beneficio inferior a la mutua cooperación. Si se desarrolla este juego durante un número finito de partidas no habrá incentivos para la cooperación, en la última partida siempre será así, porque no hay partidas futuras que puedan influir o condicionar el comportamiento de los jugadores. En la penúltima jugada ambos proyectan lo que ocurrirá en la última jugada (no cooperación), eliminando incentivos para cooperar. Conclusiones a las que arribaron Kreps et al. (1982), Axelrod (1981) y Guintis (2009). El hecho que hace posible la cooperación es la posibilidad de coincidencia o encontrarse en el futuro. El futuro puede proyectar una sombra sobre el presente e influir en la situación estratégica actual (Axelrod, 1986). Axelrod demuestra cómo emerge el trabajo cooperativo en ausencia de poder central, a partir de torneos de juegos informatizados de dilema de prisionero, donde la estrategia vencedora se conoce como “TIT for TAT” u “ojo por ojo”. Primero, es seleccionada la acción cooperativa y, a continuación, la acción siguiente se basa en la estrategia seleccionada por el contrincante. Si se encuentran dos jugadores que siguen esta conducta, en cada jugada se encontrarían en la situación de equilibrio mutuamente cooperativa. Por el contrario, ante la cooperación de uno, el otro decide no cooperar, entonces la siguiente jugada obtiene una respuesta no cooperativa. El éxito de TIT for TAT se basa en la capacidad adaptativa del jugador y de diferenciar a sus oponentes (Aguado, 2007).

2.3. Vinculación entre la teoría de opciones y teoría de juegos

En un su clásica compilación, Brennan y Trigeorgis, (2000) señalan tres estadios por los que atravesaron los modelos de valuación. Los modelos estáticos se caracterizan por describir el valor del proyecto, a partir de una corriente proyectada de flujos de fondos, sin flexibilidad estratégica. El descuento de flujos de fondos es el principal exponente de esta etapa. La segunda etapa se caracterizó por el desarrollo de los modelos dinámicos, desde una perspectiva gerencial activa y flexible frente a la exposición al riesgo. Los modelos van desde los árboles de decisión, la programación dinámica determinística y estocástica, hasta llegar al enfoque de Opciones Reales. El análisis es incompleto pues no incorpora la interacción estratégica con la competencia. Esto da origen a un tercer grupo de modelos en donde confluye el análisis dinámico mediante Opciones Reales y el uso de la Teoría de Juegos para explicar interacciones estratégicas (Chevalier-Roigant & Trigeorgis, 2011). Las decisiones de inversión se encuentran condicionadas a las resoluciòn de incertidumbres, su flexibilidad y la reacción de terceros. La valoración de las estrategias deben interpretarse como los pagos de un juego, que involucra a tomadores de decisión y estados de la naturaleza. Estos modelos analisan el equilibrio entre la flexibilidad y acuerdos estratégicos, en un contexto dinámico y competitivo en condiciones de incertidumbre. En la sigiuente sección será presentado el modelo aplicando un enfoque multinomial y la resolución del juego secuencial con equilibriod de Nash, para una estrategia de iniciativa.

3. Metodología: Análisis de caso Estrategia de iniciativa /desgaste (*preemption-attrition*) en lanzamientos y desarrollos I&D

Para analizar los atributos de los modelos de opciones y juegos se utilizará el estudio de casos en administración como técnica de investigación en administración (Castro, 2010). Las estrategias analizadas son: a) iniciativa o lanzamientos (*preemption*) y la consecuente apuesta al desgaste del seguidor frente a una respuesta inversa; b) estrategias de acuerdos cooperativos (*join venture*). En esta sección se presenta el caso y la valoración endógena con opciones reales correspondientes a la matriz de posibles estrategias.

3.1. Caso Valuación de las estrategias con Opciones Reales y Juegos

Se analiza una estrategia de investigación y desarrollo, donde el desarrollador (A) incurre en gastos iniciales de desarrollo con el objeto de obtener el prototipo a comercializar, cuya inversión es $I_{(0)}$= 15. El desarrollo es un evento incierto, sujeto a probabilidades de éxito tecnológico E!=75, y fracaso (F!) del 25%. Resuelta la incertidumbre tecnológica es evaluado su lanzamiento en el mercado: se introduce inmediatamente o se difiere un periodo. Su lanzamiento requiere invertir en recursos en su elaboración y comercialización, totalizando $I_{(1)}$= 80, en el caso de invertir inmediatamente. Si la decisión es diferida los costos vinculados a la inversión crecen a razón de la tasa libre de riesgo, r=5%, siendo $I_{(2)}$= 84 . Si la demanda reacciona favorablemente es pronosticado un incremento en el tamaño total del mercado de Δ=25%. Si los escenarios de mercado son escenarios intermedios y desfavorables se espera que mantenga sus niveles, bajo trayectoria estocástica planteada.

En el caso de un solo participante, la decisión de invertir-diferir condicionada por riesgo tecnológico se resuelve endógenamente. Para calcular el valor estático del proyecto se supone una volatilidad σ=59%, probabilidad de éxito binomial de mercado, q=50%, tasa ajustada por riesgo k=18%. Aplicando las expresiones correspondientes al modelo binomial (ec. 1 y 2), se obtienen los coeficientes u=1,80 y d=0,55 y equivalentes ciertos p= (e^r-d)/(u-d) de p=0,3973 y 1-p=0,6027. La tabla presenta el valor actual del proyecto, sin considerar riesgo tecnológico, calculado con probabilidades objetivas y probabilidades neutrales al riesgo (ambos valores confluyen, con probabilidades objetivas el ajuste por riesgo está dado por la tasa. En el enfoque de pagos contingentes supone un ajuste en los flujos (Copeland & Antikarov, 2003; Arnold & Crack, 2003). La ecuación 5 queda planteada de la siguiente manera: $122 = \left[\sum_{j(T)=0}^{j\,(T)=2} V_{j(2)}\ \frac{2!}{j!(2-j)!} 0.3973^j(1-0.3973)^{2-j}\right] e^{-0.05\times 2}$ (neutral al riesgo) y $122 = \left[\sum_{j(T)=0}^{j\,(T)=2} V_{j(2)}\ \frac{2!}{j!(2-j)!} 0.5^j(1-0.5)^{2-j}\right] e^{-0.18\times 2}$ (probabilidad objetiva).

Tabla 1. Valor Actual del Proyecto (V), Pj(EC) probabilidades neutrales al riesgo, Qj(Bin) probabilidades binomiales.

0	1	2	Nodos	Pj (EC)	Qj (Bin)
122,0	219,6	395,3	2	25,00%	15,79%
	67,8	122,0	1	50,00%	47,89%
		37,7	0	25,00%	36,32%
				100%	100%
				VA =122,00	**VA=122,00**

Fuente: Elaboración propia.

La decisión de inversión irreversible (sin opcionalidad) incorporando riesgo tecnológico y riesgo de mercado requiere del uso de una rejilla cuadrinomial (El nodo $V_{j=2(T=2)}$ = \$395,3 asume crecimiento a razón del coeficiente u, no incorpora el incremento en la demanda por el lanzamiento del producto). La siguiente tabla presenta los coeficientes cuadrinomiales empleados en la valoración (ecuación 7).

Tabla 2. Coeficientes neutrales al riesgo cuadrinomiales.

Éxito Mercado!-Tecnológico Suceso!	p1	0,2979
Fracaso Mercado!-Tecnológico Suceso!	p2	0,4520
Éxito Mercado!-Tecnológico Fracaso!	p3	0,0993
Fracaso Mercado!-Tecnológico Fracaso!	p4	0,1506

Fuente: Elaboración propia.

La incertidumbre tecnología se resuelve en t=1. La incertidumbre de mercado emerge a partir de t=2. La decisión irreversible de inversión se adopta en un inicio para el desarrollo como para la infraestructura, aplicando rejillas cuatrinomiales.

Tabla 3. Cálculo del Valor Actual Estático con riesgos tecnológicos y de mercado.

0	1	2		
		Nodo		T!
102,11	192,75	494,10	2	E!
		-	2	F!
VA=V-I(0)-VA(I(1))	50,83	122,00	1	E!
11,01		-	1	F!
		37,65	0	E!
		-	0	F!

Fuente: Elaboración propia.

La tabla expone la resolución recursiva para obtener el valor del proyecto sin opciones, tomando los datos de la Tabla 1. Para el periodo t=2, el valor de mercado es relevante, condicionado al éxito del evento tecnológico en la etapa precedente. Para el nodo T=2, j=2 $Si(T!\,E! \rightarrow V(t=2, j=0): 0)$. En el periodo precedente, el valor para cada nodo se resuelve mediante los coeficientes cuatrinomiales (ecuación 8). El momento t=1 es el periodo donde confluye las dos fuentes de riesgos. En t=0, se arriba al valor empleando los coeficientes binomiales, habida cuenta que el valor V(1;j,i) refleja el par de incertidumbres (Brous, 2011; Milanesi, 2021). La expresión general es:

$$VAN = V_{(0,T/M)} - (I_0 + I_1 \times e^{-r}) \quad [10]$$

donde $V_{(0,T/M)}$ representa el valor actual de los flujos ajustados por riesgos tecnológicos y de mercado.

Para t=1 $192{,}75 = (p_1 \times \Delta 25\% \times 395{,}28 + p_2 \times 0 + p_3 \times 122 + p_4 \times 0) \times e^{-0.08}$ y $50{,}83 = (p_1 \times 122 + p_2 \times 0 + p_3 \times 37.65 + p_4 \times 0) \times e^{-0.05}$. Para t=0, $91{,}50 = (p_u \times 164{,}70 + p_d \times 50{,}83) \times e^{-0.05}$.

El valor actual de los flujos surge de la siguiente manera: $102{,}11 = (p_u \times 192{,}75 + p_d \times 50{,}83) \times e^{-0.05}$.

El valor actual neto suponiendo irreversibilidad asciende a $11{,}01 = 102{,}11 - (15 + 80 \times e^{-0.05})$. El momento t=1 es el periodo donde confluye las dos fuentes de riesgos. En t=0, se arriba al valor empleando los coeficientes binomiales, habida cuenta que el valor V(1;j,i) refleja el par de incertidumbres (Brous, 2011; Milanesi, 2021).

Si el desarrollador (A) es propietario total de la opción, tiene control de elección entre invertir o diferir su acción estratégica. La decisión de diferir tiene por fin generar mayor información con el paso del tiempo. La propiedad de la opción surge de ventajas competitivas, por lo general barreras de entrada al sector legales (patentes, derechos o concesiones de explotación); características tecnológicas y escala de la inversión (tecnología del sector, magnitud de la inversión requerida, especificidad de la inversión de capital); de mercado en relación al producto (existencia de un fuerte intangible "marca" a partir de una profunda y exitosa estrategia de diferenciación) (Smit & Trigeorgis, 2004)). La existencia de barrera de entrada añade flexibilidad estratégica la cual debe ser cuantificada debido a: a) determinar el valor total estratégico del proyecto (Trigeorgis, 1995), b) comparar valores de invertir o diferir con el objeto de seleccionar la alternativa de mayor valor ajustado por riesgo.

Aplicando las ecuaciones 8 y 9 es valuada la rejilla multinomial, tomando como punto de partida la Tabla 3.

Tabla 4. Valuación de la opción de diferir con modelo cuadrinomial.

Binomial Opción de invertir condicionado al riesgo tecnológico y mercado		Cuadrinomial Refleja E!F! Tecnológico		Comportamiento del mercado Evento que determina TS!-TF! (Ejerce la opcion de invertir en t=2)	
T=0	1=S! 0=F!	T=1	1=S! 0=F!	T=2	1=S! 0=F!
Nodo	T!	Nodo	Nodos t+1	Nodo	T!
42,14 0	1	132,75 1	2 y 1	410,10 2	1
0,00 0	0			0,00 2	0
		10,78 0	1 y 0	38,00 1	1
				0,00 1	0
				0,00 0	1
				0,00 0	0

Fuente: Elaboración propia.

El ejercicio de la opción de diferir implica no invertir en el primer periodo y diferir para el segundo. La toma de la decisión es condicionada por el comportamiento del mercado y el éxito tecnológico.

Para el escenario $V_{(++),T=2} = SiE!T! \rightarrow Max[(\Delta\%V(++) - I_1 \times e^r; 0] = Max(494{,}10 - 80 \times e^{0.05}; 0) = 410{,}10$. Para los nodos intermedios e inferior se sigue similar lógica sin incremento del valor de mercado.

Recursivamente se resuelve el periodo anterior, en este caso utilizando los coeficientes cuatrinomiales (ec. 8): $V_{(++),T=1} = 132{,}75 = (p_1 \times 410{,}10 + p_2 \times 0 + p_3 \times 38 + p_4 \times 0) \times e^{-0{,}05}$.

Finalmente, se arriba al valor del proyecto, que surge de emplear los coeficientes neutrales al riesgo binomiales, ya que la exposición a riesgo tecnológico acontece en el periodo posterior, $V_{(0),T=0} = SiE!T! \rightarrow [(p_u \times 132{,}75 + p_d \times 10{,}78) \times e^{-0{,}05}] - I_0 = 42{,}14$.

El valor estratégico del proyecto asciende a $42,14, el valor actual neto tradicional a $11,01, el valor de la opción de diferir o de la flexibilidad estratégica del proyecto es de $31,12. En el caso de poseer la propiedad de la opción la estrategia que maximiza valor la constituye la acción de diferir la decisión de invertir y evitar la exposición a todo el riesgo de mercado. Hasta aquí, el análisis es de segundo nivel en el sentido de no incorporar la interacción de otros actores.

En el caso de no poseer la propiedad total de la opción con amenaza de otro participante (B) ingresando al mercado, es menester aplicar un modelo de tercer nivel (Brennan & Trigeorgis, 2000). El agente B puede ingresar al mercado y se supone que el valor y comportamiento estocástico de su estrategia es el explicitado en las tablas 1 y 3. Existen cuatro estrategias alternativas:

<u>*Estrategia 1*</u>*:* El desarrollador (A) invierte o difiere y la conducta es copiada por el competidor (B).

En este caso el desarrollador, captura el 67% del valor de mercado y el competidor el 33%. La firma A invierte en desarrollo $I_{(A,0)}$= $15 y se expone al riesgo de éxito o fracaso tecnológico. Resuelta de la incertidumbre técnica en el periodo 1, si el escenario es favorable *V(A,++)* invierte de manera irreversible $I_{(A,1)}$= $80. Solo se reserva la opción de diferir para el próximo periodo, en el caso de una reacción negativa de la demanda *V(A,--),* con participación del 90% en el mercado. El competidor replica el desarrollo. Por cuestiones de simplicidad se supone valores similares de inversión a los de la contraparte en los estadios desarrollador para los estadios $I_{(B,0)}$= \$15; $I_{(B,1)}$= \$80. No tiene riesgo tecnológico, e invierte en la medida que A tenga éxito en el desarrollo. Se enfrenta a dos escenarios de demanda, en el caso de ser positivo invierte proyectando un 33% de participación en el mercado, en el caso de un mercado bajista a diferencia del desarrollador tiene solamente flexibilidad sobre un 10% del valor del mercado.

Estrategias 2 y 3: Las firmas (A y B) pueden adoptar el rol de desarrollador, con conductas cruzadas, en donde una invierte primero y la segunda opta por diferir.

Quien desarrolla e invierte primero se expone totalmente al riesgo tecnológico y de mercado. Si el escenario de mercado es positivo *V(++)*, es compensado por obtener la participación total del mercado (100%). Con escenario negativo *V(--)* difiere, con una participación en el mercado de 67%, siendo el resto propiedad del competidor. El competidor no asume riesgo tecnológico.

Estrategia 4: Sin acuerdo estratégico, ambas firmas difieren la decisión. Las firmas sin acuerdo toman la decisión estratégica de diferir, sin generar una barrera de entrada formal. Ambas participan en partes iguales en el mercado y de manera simétrica en los niveles de inversión y de riesgo tecnológico.

Para el desarrollador, las cuatro estrategias implican evaluar la decisión estratégica de invertir o diferir considerando las posibles conductas del competidor. La valoración de cada estrategia mediante opciones reales debe combinarse con la resolución de equilibrios aplicando la teoría de juegos. En este caso estamos frente a un juego secuencial, donde el desarrollador (A) toma la iniciativa, reaccionado el competidor (B). El primer paso consiste en valorar las estrategias de los competidores.

Estrategia 1:

La siguiente tabla expone los resultados correspondientes a las acciones derivadas de invertir secuencialmente, primero el desarrollador, seguidamente copiar e invertir de parte del competidor.

Tabla 5. Valor actual pagos Estrategia 1.

Estados	Valor t=1	Decisión
Desarrollador (A) V(++)	48,50	I
Competidor (B) V(++)	-6,80	D
Desarrollador (A) V(--)	9,71	D
Competidor (B) V(--)	1,44	D

Fuente: Elaboración propia.

La inversión se concreta para un escenario favorable V(++) Tabla 3, donde el valor para A es, $V_{(A,++),T=1} = MS\% \times V_{(A,++),T=1} - I_1 = 48{,}50 = 0{,}67 \times 192{,}75 - 80$. En el caso del competidor toma los valores de la tabla 1, pues no asume riesgo tecnológico. Es decir, invierte directamente, siendo $V_{(B,++),T=1} = MS\% \times V_{(B,++),T=1} - I_1 = -6{,}80 = 0{,}33 \times 219{,}6 - 80$. La inversión en I_0 de 15 millones es un costo ya incurrido por los competidores en t=1. El competidor se expone irreversiblemente a todo el riesgo de mercado del proyecto, pues no tiene propiedad de opción de diferimiento. Si el escenario es desfavorable el desarrollador se reserva la opción de diferir y su participación de mercado aumenta a un 90%. Las estrategias son valoradas como $V_{(A,--),T=1} = Max\left[(MS\% \times V_{(--),T=1} - I_1; PO\% \times VE_{(--),T=1}\right]$. Máximo valor entre invertir $(MS\% \times V_{(--),T=1} - I_1)$ o el valor en primer periodo de diferir e invertir en el segundo periodo $\left(VE_{(--),T=1}\right)$.

La valoración de la estrategia: $9{,}71 = Max[(67\% \times 50{,}83 - 80; 90\% \times 10{,}78]$ en función a los valores obtenidos en las tablas 2 y 3. El competidor no asume riesgo tecnológico el diferir el implica participar solamente en un 10% del mercado. El valor de la estrategia es $V_{(B,--),T=1} = Max\left[(MS\% \times V_{(--),T=1} - I_1; PO\% \times VE_{(--),T=1}\right] = 8{,}47 = Max[(67\% \times 67{,}8 - 80; 10\% \times 14{,}37]$. El valor surge de calcular el valor de diferimiento de la opción, a partir de los datos de las tablas 1 y 3 correspondientes a los nodos finales (t=2). En el caso del competidor, no existe riesgo tecnológico y, por lo tanto, se emplean los coeficientes equivalentes ciertos binomiales. Para el escenario alcista $V_{(++),T=1} = 176{,}9 = [(p_u \times Max(\Delta 25\% \times 395{,}3 - 84; 0) + p_d \times Max(122 - 84; 0)] \times e^{-0{,}05}$ y para el escenario bajista $V_{(--),T=1} = 14{,}37 = [(p_u \times Max(122 - 84; 0) + p_d \times Max(37{,}7 - 84; 0)] \times e^{-0{,}05}$. En el caso de escenario alcista, el competidor debe invertir caso contrario queda fuera del mercado. En el caso de escenario bajista, tiene un 10% de participación, sobre el valor actual medido en la opción de diferir (10% de $14,37).

Cabe destacar que las decisiones de B, en ambos escenarios, implican diferir la inversión en el proyecto.

Estrategias 2 y 3:

A continuación, son valoradas las acciones contrapuestas realizadas por los participantes.

Tabla 6. Valor actual pagos Estrategia 2 y 3.

Estados	Valoren t=1	Decisión
Desarrollador (A)/(B) V(++)	112,75	I (A/B)
Competidor (B)/(A) V(++)	0,00	D (B/A)
Desarrollador (A)/(B) V(--)	7,19	D (A/B)
Competidor (B)/(A) V(--)	4,79	D (B/A)

Fuente: Elaboración propia.

Los perfiles de pagos son cruzados en función a quien tome la iniciativa. En el caso del escenario V(++) se opta por invertir, siendo $V_{(A,++),T=1} = MS\% \times V_{(A,++),T=1} - I_1 = 112{,}75 = 100\% \times 192{,}75 - 80$. En el caso de un escenario bajista, el valor de la estrategia es $V_{(A,--),T=1} = Max\left[(MS\% \times V_{(--),T=1} - I_1; PO\% \times VE_{(--),T=1}\right] = 7{,}19 = Max[(100\% \times 50{,}83 - 80; 67\% \times 10{,}78]$.

El valor de la opción de diferir surge de la Tabla 4, incorporando riesgo tecnológico para el desarrollador. El competidor ingresa solamente en el caso de diferimiento de la inversión de parte del desarrollador. El valor de su estrategia de diferir es $V_{(B,--),T=1} = PO\% \times VE_{(--),T=1} = 14{,}37 = 33\% \times [(p_u \times Max(122 - 84; 0) + p_d \times Max(37{,}7 - 84; 0)] \times e^{-0{,}05}$.

Estrategia 4:

En el caso de diferir los riesgos tecnológicos, de mercado, las inversiones y valores actuales del diferimiento son compartidos. Siguen solamente la estrategia de diferir cualquiera sea la reacción de la demanda.

Tabla 7. Valor actual pagos Estrategia 4.

Estados	Valoren t=1	Decisión
(A/B) V(++)	66,37	D
(A/B) V(++)	5,39	D

Fuente: Elaboración propia.

Para el escenario de mercado favorable el valor es $V_{(++),T=1} = MS\% \times VO_{(++,t=1)} = 66{,}37 = 50\% \times 132{,}75 = (p_1 \times 410{,}10 + p_2 \times 0 + p_3 \times 38 + p_4 \times 0) \times e^{-0{,}05}$. Para mercado desfavorable, $V_{(\pm-+),T=1} = MS\% \times VO_{(--,t=1)} = 5{,}39 = 50\% \times 10{,}78 = (p_1 \times 38 + p_2 \times 0 + p_3 \times 0 + p_4 \times 0) \times e^{-0{,}05}$.

4. Resultados

En esta sección se presenta la resolución de las estrategias valuadas de forma extensiva y matricial, para juegos competitivos y colaborativos. Se expone la solución de equilibrio y en el caso de acuerdo estratégico, el modelo de estimación de multas.

4.1. Valoración, planteamiento y resolución de estrategias competitivas

El planteamiento extensivo correspondiente a las 4 estrategias y sus pagos asociados quedan expresados en la Figura 1. Sorteado el riesgo tecnológico, el desarrollador debe optar por invertir o diferir en los dos estados que presenta el mercado y dicha conducta provoca la reacción del competidor. El conjunto de acciones, o estrategias presentadas para cada uno de las empresas generan un conjunto de pagos asociados en el momento t=1. Los estados de la naturaleza de alta y baja demanda están sujetos a probabilidades neutrales al riesgo binomiales (p).

Para calcular el valor actual de las estrategias (referidas en *t=1*),) es empleada la siguiente expresión:

$$VEI(1)_0 = \frac{(p_u \times VEI_{(1u)} + p_d \times VEI_{(1d)})}{(1+r)} - I_0 \qquad [11]$$

donde $VEI(1)_0$ representa el valor actual de la estrategia 1, p_u, p_d son las probabilidades neutrales al riesgo de mercado binomiales para cada escenario de demanda, $VEI_{(1u)}, VEI_{(1d)}$ el valor de la estrategia 1 en el escenario alcista y bajista y I_0 representa la inversión inicial en desarrollo.

El valor actual de la estrategia 2 y 3 en t=0 es,

$$VED(2{,}3)_0 = \frac{(p_u \times VED_{(2,3;u)} + p_d \times VED_{(2,3;d)})}{(1+r)} \qquad [12]$$

$$VEI(2{,}3)_0 = \frac{(p_u \times VEI_{(2,3;u)} + p_d \times VEI_{(2,3;d)})}{(1+r)} - I_0 \qquad [13]$$

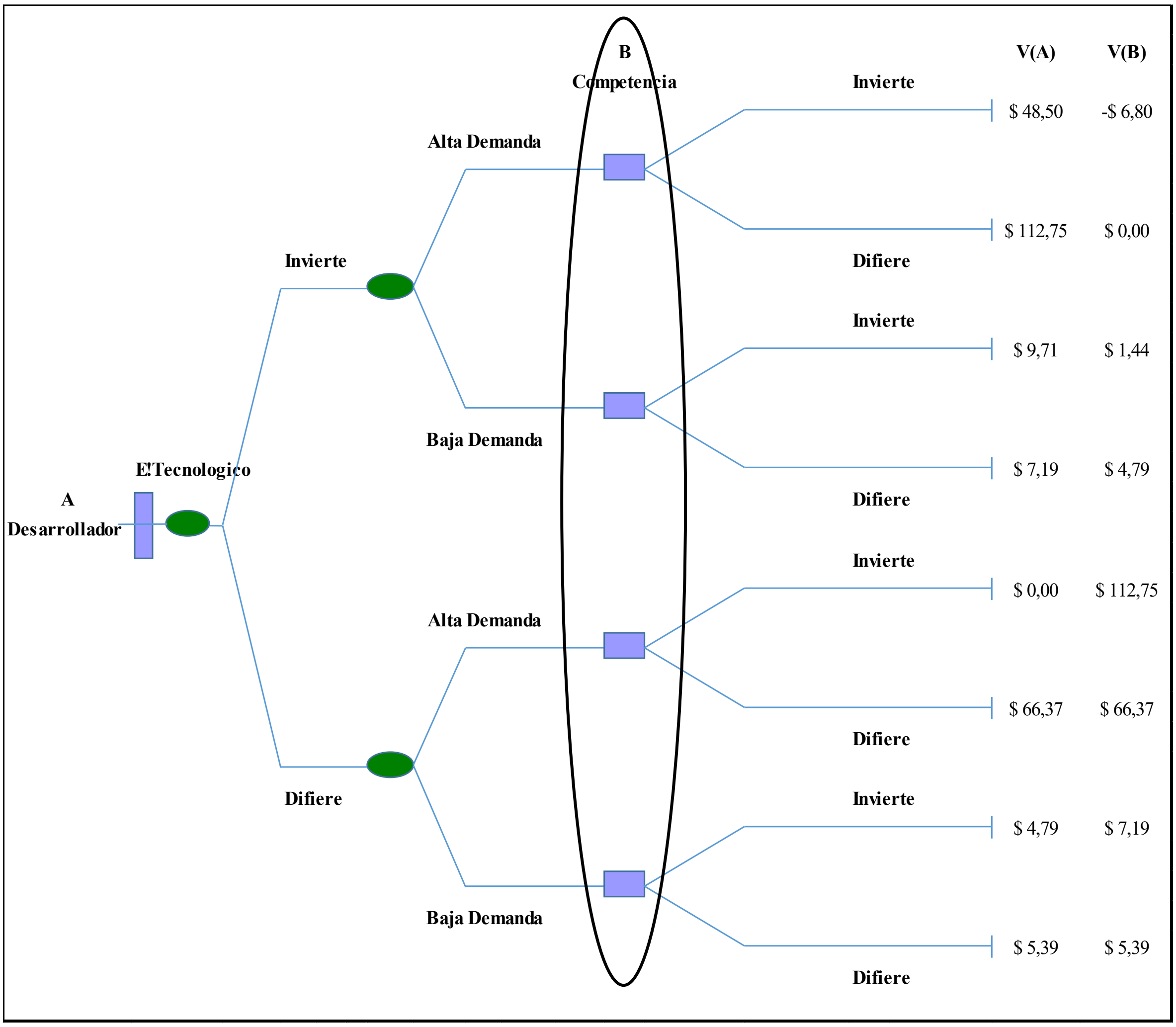
donde $VED(2{,}3)_0$ representa el valor actual de la estrategia 2,3, dado que la contraparte invierte en t=1. Las probabilidades neutrales al riesgo binomiales que reflejan riesgo de mercado son p_u, p_d. $VED_{(2,3;u)}, VED_{(2,3;d)}$ el valor de la estrategia 2,3 en el escenario alcista y bajista. $VEI(2{,}3)_0$ representa el valor actual de la estrategia de inversión dado diferimiento de la contraparte. $VEI_{(2,3;u)}, VEI_{(2,3;d)}$ el valor de la estrategia 2,3 de inversión para el escenario alcista y bajista de demanda. Finalmente I_0 representa la inversión inicial en desarrollo, para quién toma la iniciativa puesto que el agente que difiere no asume riesgo tecnológico.

El valor actual de la estrategia 4 en t=0 es:

$$VED(4)_0 = \frac{\left(p_u \times VED_{(1u)} + p_d \times VED_{(1d)}\right)}{(1+r)} - I_0 \quad [14]$$

donde $VED(4)_0$ representa el valor actual de la estrategia 4, los agentes optan por diferir. Los coeficientes p_u, p_d exponen las probabilidades neutrales al riesgo de mercado binomiales para cada escenario de demanda. $VED_{(1u)}, VED_{(1d)}$ el valor de la estrategia 4 en el escenario alcista y bajista. Finalmente I_0 representa la inversión inicial para el desarrollo.

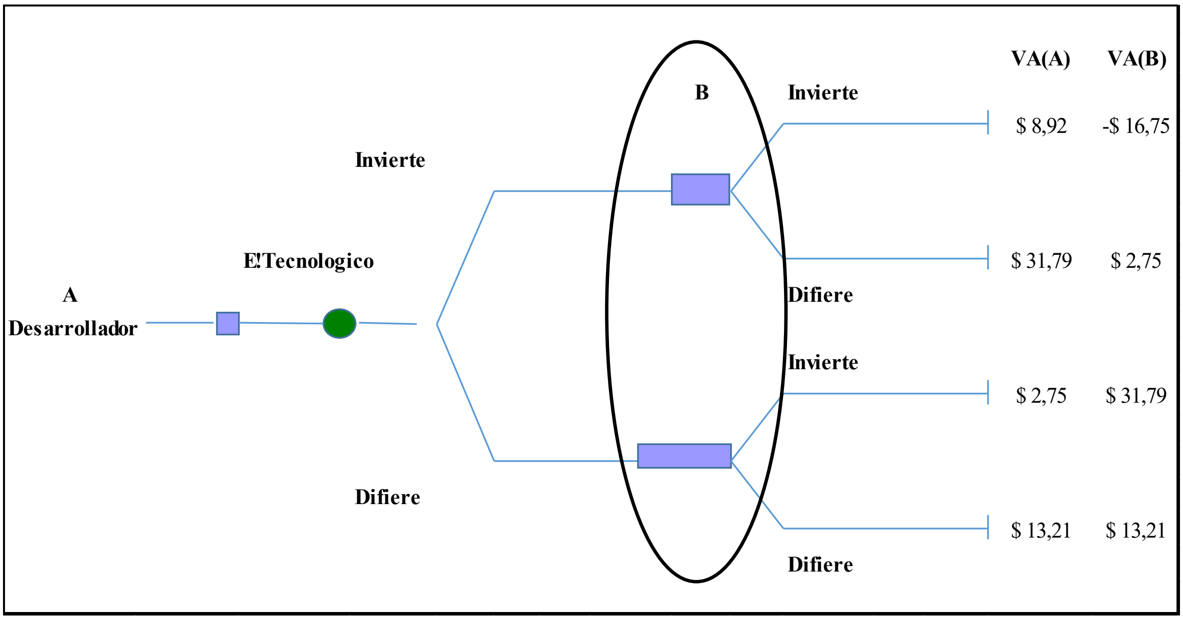
Figura 2. Planteamiento de estrategias de manera extensiva lanzamiento-desgate.



Fuente: Elaboración propia.

Las estrategias quedan reducidas a cuatro posibles soluciones conforme se expone en la Figura 2.

Figura 2. Valores esperados estrategias expuestas extensivamente lanzamiento-desgate.



Fuente: Elaboración propia.

En la figura es planteado el juego de forma extensiva. Matricialmente queda expuesto en la siguiente tabla.

Tabla 8. Planteamiento matricial del juego lanzamiento-desgaste.

Estrategias		B			
		Diferir		Invertir	
A	Diferir	13,21	13,21	2,75	31,79
	Invertir	***31,79***	***2,75***	8,92	(16,75)

Fuente: Elaboración propia.

El equilibrio de Nash se presenta en las estrategias Invertir (A), Diferir (B), par (31,79; 2,75), que resulta en un equilibrio en estrategia dominante. El razonamiento es: dada la acción de diferir (A), la conducta de B es invertir. Dada la acción de invertir (A) la conducta de B es diferir. Dada la acción de invertir (B), el jugador A selecciona invertir, dada la acción de diferir (B) el jugador A selecciona invertir. Diferir es seleccionado una vez por B condicionado a la inversión de A. Desde el punto de vista de estrategias dominantes, para el jugador B no existe una solución. Invertir es superior a diferir si A difiere. Caso contrario es preferible diferir. Para la firma A estrictamente domina invertir, por ende, el equilibrio de Nash lo es también en estrategias dominadas. En este caso quien toma siempre la iniciativa es A, influenciando la conducta del competidor, si decide invertir condiciona a B a diferir. Para éste invertir asumiendo toda la incertidumbre genera un resultado negativo, en particular porque, si bien no se encuentra expuesto al riesgo tecnológico, debe invertir asumiendo los mismos costos de desarrollo que A. Al tener una participación reducida de mercado (33%), no alcanza a cubrir las inversiones. El desarrollador tiene la posibilidad de diferir en el caso de que la resolución de la demanda sea adversa.

En función a las inversiones y riesgos (mercado y tecnológicos), A condiciona a B a diferir, en caso de que tome la iniciativa de inversión. En ese caso, B evita la inversión de desarrollo ($I_{(0)}$) y el riesgo tecnológico, pero accede a un 10% del valor de mercado. Diferir-diferir no es la resolución Pareto eficiente en este conjunto de estrategias, pues los costos de desarrollo secuenciales no son compartidos. Son replicados y ejecutados en su totalidad por ambas empresas.

Ejemplo con estrategias mixtas. En el análisis anterior se suponía información completa respecto de la conducta de la competencia. En otras palabras, la elección de la estrategia es determinística, dada una conducta. Con estrategias mixtas, el valor actual de las estrategias sigue siendo el mismo, pero varia la probabilidad de elección de los jugadores, pues no se tiene completa información de las reacciones. Pueden ser infinitas en un rango de probabilidad de [0;1]. En este caso, la matriz de pagos consolidados (valores actuales de estrategias) es de 11x11. Cabe destacar que las probabilidades neutrales al riesgo se emplean para calcular el valor actual de la decisión. Las estrategias mixtas implican asignar probabilidad de ocurrencia a la conducta del agente dado el incentivo (valor actual de la estrategia). Dado $p, (1-p)$, representan las probabilidades de qué A difiera-invierta, y $q, (1-q)$ el caso de B (diferir-invertir), los pagos condicionados por las probables conductas, quedan planteados de la siguiente manera:

Pago de A

$$FF_A = VD_{A\to D(B)}pq + VD_{A\to I(B)}p(1-q) + VI_{A\to D(B)}(1-p)q + VI_{A\to I(B)}(1-p)(1-q) \qquad [15]$$

Pago de B

$$FF_B = VD_{B\to D(A)}qp + VD_{B\to I(A)}q(1-p) + VI_{B\to D(A)}(1-q)p + VI_{B\to I(A)}(1-q)(1-p) \qquad [16]$$

Utilizando las ecuaciones anteriores se construyó una tabla de datos. La tabla se elabora con el menú datos/tabla de datos de MS Excel ®, con filas y columnas correspondientes a p/q, con Δ 0,10.

Tabla 9. Sensibilidad valor de las estrategias mixtas (q/p probabilidades de ocurrencia).

q/p	**0**	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1**
0	**-7,8**	-3,6	0,6	4,9	9,1	13,4	17,6	21,8	26,1	30,3	**34,5**
0,1	-3,6	0,1	3,9	7,6	11,3	15,1	18,8	22,5	26,3	30,0	33,7
0,2	0,6	3,9	7,1	10,3	13,6	16,8	20,0	23,2	26,5	29,7	32,9
0,3	4,9	7,6	10,3	13,1	15,8	18,5	21,2	23,9	26,7	29,4	32,1
0,4	9,1	11,3	13,6	15,8	18,0	20,2	22,4	24,6	26,9	29,1	31,3
0,5	13,4	15,1	16,8	18,5	20,2	21,9	23,6	25,3	27,1	28,8	30,5
0,6	17,6	18,8	20,0	21,2	22,4	23,6	24,8	26,0	27,3	28,5	29,7
0,7	21,8	22,5	23,2	23,9	24,6	25,3	26,0	26,7	27,5	28,2	28,9
0,8	26,1	26,3	26,5	26,7	26,9	27,1	27,3	27,5	27,6	27,8	28,0
0,9	30,3	30,0	29,7	29,4	29,1	28,8	28,5	28,2	27,8	27,5	27,2
1	**34,5**	33,7	32,9	32,1	31,3	30,5	29,7	28,9	28,0	27,2	**26,4**

Fuente: Elaboración propia.

Se aprecia que el máximo pago acontece cuando la estrategia es invertir/diferir con probabilidades $(p=1; q=0)$; $(q=1; p=0)$, de 34,45 coincidente con la suma entre $FF_A = 31{,}79$ y $FF_B = 2{,}75$ siempre que p=1 y q=0 (con certeza A invierta y B difiera). El mínimo pago se da en las estrategias invertir/invertir con $(p=0; q=0)$ y flujo de -7,8, el pago intermedio se da con las estrategias diferir/diferir con $(p=1; q=1)$ y flujo de 26,4 (Si se pretende obtener la probabilidad indiferencia para el jugador A, tal que cualquier probabilidad que asigna a p (diferir) no modifique su pago, independientemente de la elección de B, la expresión queda reducida, FF(A)=p[-12,41q-6,17]+(22,87q+8,92), el valor que debe tomar q en la expresión entre corchetes no indica que q=0, pero condicionado a p=0. Intuitivamente indica que las estrategias puras diferir en conjunto presenta un menor valor que las estrategias puras invertir-diferir). Suponiendo información incompleta, sigue prevaleciendo el resultado obtenido en la Tabla 8. Los valores correspondientes a las decisiones mixtas de A y B generan un menor pago combinado, indicando que las conductas mixtas son dominadas por las estrategias puras.

4.2. Valoración, planteamiento y resolución de una estrategia de acuerdo estratégico (*Join Venture*)

Una alianza estratégica que implique compartir inversiones de desarrollo e infraestructura posiciona a las partes en un juego eminentemente cooperativo. Partiendo de la situación analizada, en este caso la inversión de desarrollo asciende, $I_{0(A,B)} = 7{,}5$ y la inversión en infraestructura asciende a $I_{1(A,B)} = 40$. Producto del acuerdo, las firmas comparten el mercado en partes iguales $MS\%_{(A,B)} = 50\%$. A diferencia de la situación anterior, no existen estrategias contrapuestas (planes de acción 2 y 3). Simplemente los agentes deben decidir entre invertir-diferir y no existe decisión secuencial ni opcionalidad en la estrategia 1 (inversión o diferimiento) (Para el estado de demanda positiva se tienen $V_{(++),T=1} = MS\% \times V_{(A,++),T=1} - I_1, = 80{,}47 = 0.50 \times 192{,}75 - 40$. Para la demanda descendente $V_{(A,--),T=1} = Max(MS\% \times V_{(A,--),T=1} - I_1;\ MS\% \times VD_{(A,--),T=1} = 11{,}35 = 0.50 \times 50{,}83 - 40; 0.50 \times 22{,}70$. En el caso de un escenario adverso se difiere, pactado contractualmente). Para la resolución del modelo son utilizadas las expresiones del caso anterior correspondientes a las estrategias 1 y 4 ajustadas a los valores de inversión y participación de mercado, producto del contrato de colaboración. En el caso de un escenario, el acuerdo establece que las partes difieren la inversión.

Los valores contenidos en las tablas 1 a 4 son la base para calcular el valor de las estrategias, expuestos en los siguientes cuadros. Se exponen los pagos correspondiente a Invertir para cada uno de los estados (V(++), V(--)).

Tabla 10. Valor actual pagos Estrategia 1 acuerdo estratégico.

Estados	Valor t=1	Decisión
A V(++)	80,47	I
B V(++)	80,47	I
A V(--)	11,35	D
B V(--)	11,35	D

Fuente: Elaboración propia.

Pagos correspondientes a cada estado en el caso de respetar el acuerdo de diferir.

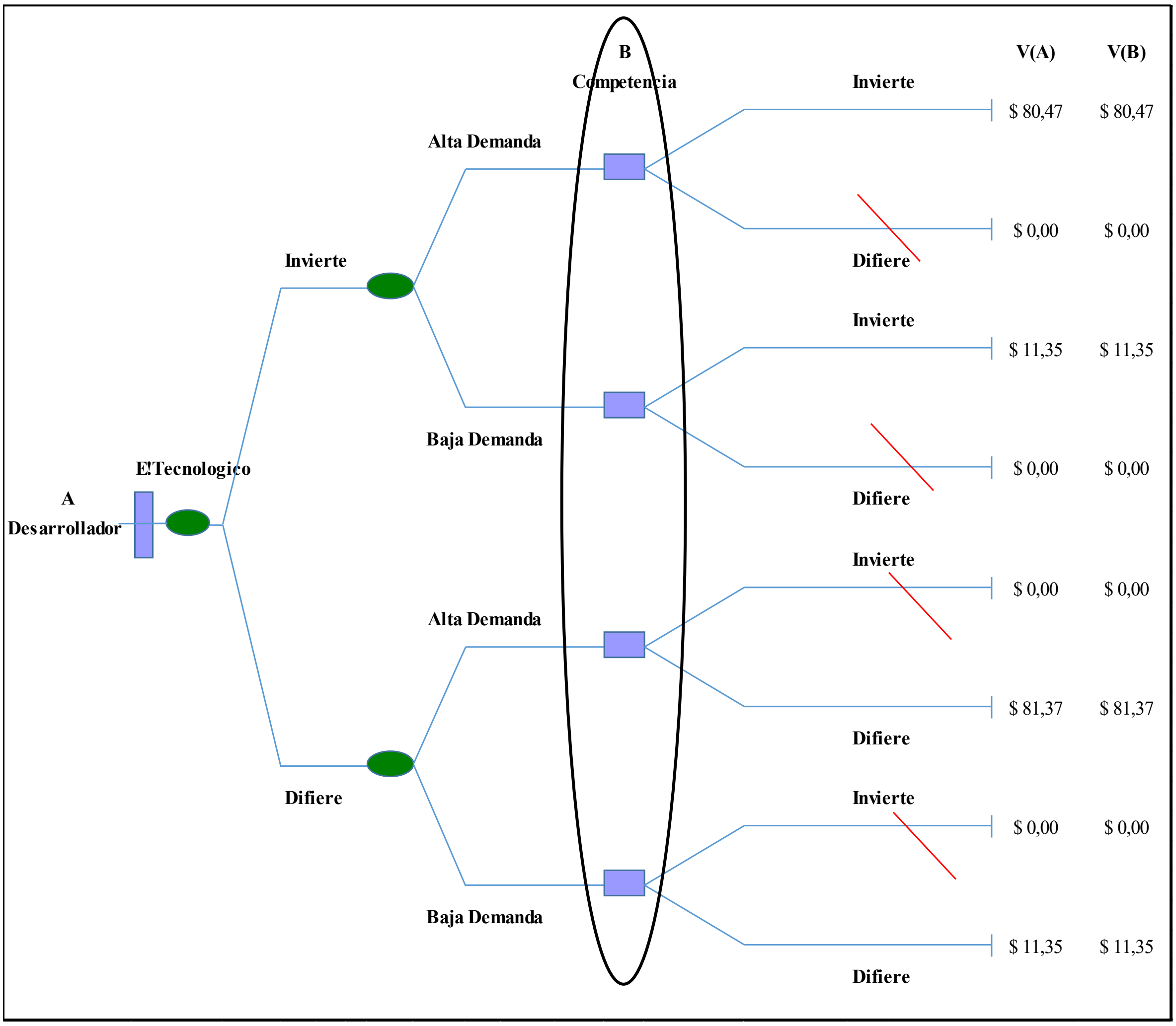
Tabla 11. Valor actual pagos Estrategia 4 acuerdo estratégico.

Estados	Valoren t=1	Decisión
(A/B) V(++)	81,37	D
(A/B) V(--)	11,35	D

Fuente: Elaboración propia.

La propiedad de la opción de diferir corresponde a las empresas por partes iguales. En t=1 los pagos correspondientes a cada estrategia son simétricos. Además, los flujos son mayores producto de acordar compartir el proceso de inversión. Se supone que trabajan sin capacidad ociosa, siendo la inversión necesaria para generar una producción que satisfaga la demanda proyectada el equivalente a la inversión total del desarrollador. En el caso de no acuerdo, se genera capacidad ociosa, salvo que el competidor no ingrese al mercado.

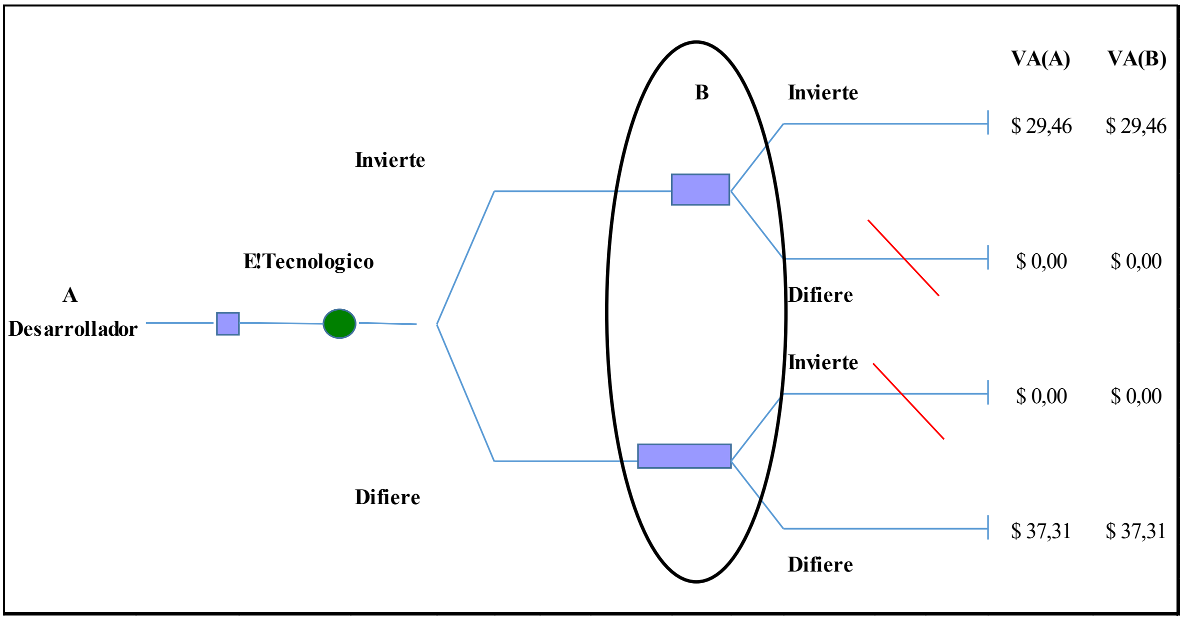
Figura 3. Planteamiento de estrategias de manera extensiva acuerdo estratégico.



Fuente: Elaboración propia.

La forma extensiva expone valores solamente para estrategias coordinadas, desechándose las estrategias de inversión-diferimiento. Trabajando con las ecuaciones 11 y 14 se obtiene los pagos totales para las estrategias 1 y 4.

Figura 4. Valores esperados estrategias expuestas extensivamente acuerdo estratégico.



Fuente: Elaboración propia.

En forma matricial los pagos quedan expresados de la siguiente manera.

Tabla 12. Planteamiento matricial estrategia de alianza.

Estrategias		B			
		Diferir		Invertir	
A	Diferir	***37,31***	***37,31***	-	-
	Invertir	-	-	***29,46***	***29,46***

Fuente: Elaboración propia.

En este caso hay dos equilibrios de Nash dado por el acuerdo diferir-diferir (37,31; 37,31), o invertir-invertir (29,46; 29,46). Diferir la inversión permite acotar la incertidumbre de mercado aprovechando la asimetría de pagos y la ventaja estratégica compartida.

4.3. Valoración de los incentivos económicos para el cumplimiento del contrato

Claro que el acuerdo estratégico requiere de incentivos formales para su cumplimiento. En tal sentido deben establecerse cláusulas contractuales que penalicen el incumplimiento de parte de los actores (Milanesi & Thomé 2015). En términos de equilibrio de Nash la penalización monetaria debe ser suficiente para generar incentivos a cumplir (El incumplimiento se presenta en la situación en donde se acuerde la estrategia de diferir y una de las partes invierta lanzándose al mercado (estrategias 2 y 3)). La penalización debe ser igual al máximo valor entre el beneficio obtenido por el infractor y el perjuicio económico generado a la contraparte. El incumplimiento puede originarse en la acción u omisión. En el primer caso implica invertir en lugar de respetar el acuerdo de diferir.

$$MM_{inf} = Max\{[VEI(2,3)_{inf(0)} - VED(JV)_{inf(0)}];[VED(JV)_{perj(0)} - VEI(2,3)_{perj(0)}]\} \quad [17]$$

El valor de la multa debe ser el máximo entre dos flujos. El primero es el beneficio potencial del infractor $\left[VEI(2,3)_{inf(0)} - VED(JV)_{(0)}\right]$ diferencia entre los ingresos de invertir siguiendo la estrategia 2, 3 y el costo de oportunidad de no cumplir con diferir, conforme fue pactado en el acuerdo. El segundo flujo está dado por el perjuicio ocasionado a la contraparte, calculado como diferencia entre valor actual de la acción acordada de diferir a favor del perjudicado y el valor de la estrategia de invertir sin tomar la iniciativa, con los perjuicios de pérdida de mercado: $\left[VED(JV)_{perj(0)} - VEI(2,3)_{perj(0)}\right]$

Por omisión implica no cumplir con el pacto de invertir:

$$MM_{inf} = Max\left\{\left[VED(4)_{inf(0)} - VEI(JV)_{inf(0)}\right]; \left[VEI(JV)_{perj(0)} - VEI(2,3)_{perj(0)}\right]; \left[r \times \Delta I_{perj(0)}\right]\right\} \quad [18]$$

El valor de la penalización dependerá de los flujos asociados a cada estrategia. Para el caso analizado, no invertir y diferir implica perder participación en el mercado. En este caso es el máximo valor entre tres flujos: a) la diferencia entre el beneficio del infractor por no invertir y diferir, adoptando la estrategia 4 $\left[VED(4)_{inf(0)} - VEI(JV)_{inf(0)}\right]$, b) el perjuicio para la contraparte entre el valor de la estrategia de invertir acordada y el valor de la estrategia de invertir sin acuerdo $\left[VEI(JV)_{(0)} - VEI(2,3)_{perj(0)}\right]$, esta última es la que debe adoptar el perjudicado, c) el costo financiero incremental que debe asumir la parte perjudicada para lanzar de inmediato el producto y satisfacer la demanda, dado un pacto de diferir $\left[r \times \Delta I_{perj(0)}\right]$.

Para la firma A la penalización si no difiere e invierte incumpliendo el acuerdo asciende a, $34{,}56 = Max\{[31{,}79 - \$37{,}31]; [37{,}31 - 2{,}75]\}$. Por omisión (no invertir y diferir) es de $2{,}38 = Max\{[13{,}21 - 29{,}46]; [29{,}46 - 31{,}79]; [0{,}05 \times 47{,}5]\}$.

5. Conclusiones

Una estrategia integrada por acciones, recursos y objetivos requiere de métodos numéricos que consideren los riesgos de las decisiones propias, de los estados de la naturaleza y de las decisiones de terceros. El punto de decisión es el presente y la referencia valor actual debe integrar todos los aspectos mencionados. Ya no basta con modelos de primera o segunda generación. El análisis estratégico de inversiones requiere de modelos integrales conjugando un enfoque de opciones y juegos.

El modelo desarrollado descansa en la categoría SROG, es multinomial bajo la lógica de las opciones arco iris, analizando primordialmente estrategia de lanzamiento con un planteamiento de juegos secuencial y sensibilidad de estrategias mixtas.

Conforme fue expuesto, si solamente se utiliza un modelo de opciones reales, la estrategia óptima para el desarrollador consiste en diferir, ya que permite acotar la incertidumbre tecnológica y de mercado. A la conclusión anterior se llega a partir de un razonamiento endógeno del problema. Con un modelo SROG, la estrategia de mayor valor esperado es la decisión opuesta (inversión), con exposición a todo el riesgo del proyecto. Esto es así debido a que el valor de la flexibilidad estratégica contenido en diferir, no logra compensar la pérdida de participación de mercado en el caso de que el oponente adopte la estrategia inversa. Claro que a esta conclusión se llega incorporando las herramientas y equilibrios de la teoría de juegos.

Los acuerdos estratégicos son guiados por el objetivo de maximización de la riqueza y fundados en conductas cooperativas. En el caso analizado es menester incentivar la cooperación para acordar el diferimiento de la inversión. La cooperación en juegos se apoya en dos motivos: a) la existencia de incertidumbre, donde el presente es opacado por el mayor valor esperado que pueda generar la acción cooperativa futuro; b) coercitiva y complementaria es la determinación de multas ante el incumplimiento. Basado en un modelo SROG se debe calcular el valor actual de la penalización, como el mayor valor entre el perjuicio originado a la contraparte y el beneficio derivado de la conducta no correcta. El modelo propuesto, aporta una herramienta para incorporar estas cláusulas en acuerdos estratégicos.

Referencias

Aguado, J.C. (2007). *Teoría de la decisión y de los juegos.* Madrid: Delta Publicaciones.

Armada, M., Kryzanowski, L., & Pereira, P. (2009). Optimal investment decisions for two positioned firms competing in a duopoly market with hidden competitors. *European Financial Management, 17*(2), 305-330. https://doi.org/ 10.1111/j.1468-036X.2009.00514.x

Arnold, T., & Crack, T. (2003). *Option Pricing in the Real World: A Generalized Binomial Model with Applications to Real Options.* Social Science Research Network SSRN. https://doi.org/10.2139/ssrn.240554

Axelrod, R. (1981). The Emergence of Cooperation among Egoists. *The American Political Science Review, 75*(2), 306-318. https://doi.org/10.2307/1961366

Axelrod, R. (1986). *La Evolución de la Cooperación.* Madrid, España: Alianza Editoria S.A.

Black, F., & Scholes, M. (1972). The Valuation of Options Contracts and a Test of Market Efficiency. *Journal of Finance, 27*(2), 399-417. https://doi.org/10.2307/2978484

Boyer, M., Laserrere, P., & Moreaux, M. (2012). A dynamic duopoy investement game without commitment under uncertainty market expansion. *Interntational Journal of Industrial Organization, 30*(6), 663-681. https://doi.org/10.1016/j.ijindorg.2012.07.005

Boyle, P. (1988). A lattice framework for option pricing with two state variables. *Journal of Finance and Quantitative Analysis, 23*(1), 1-12. https://doi.org/10.2307/2331019

Brandao, L., & Dyer, J. (2009). Projetos de Opcoes Reis com Incertezas Correlacionadas. *Revista de Administracao e Contabilidade da Unisinos, 6*(1), 19-26. https://doi.org/10.4013/base.2009.61.02

Brandao, L., Dyer, J., & Hahnn, W. (2012). Volatility estimation for stochastic project value models. *European Journal of Operational Research, 220*(3), 642-648. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.01.059

Brennan, M., & Trigeorgis, L. (2000). *Real options: Development and new contributions In: Project Flexibility, Agency, and Competition. New Developments in the Theory and Application of Real Options.* EE.UU: Oxford University Press.

Broadie, M,. & Kaya, O. (2007). A Binomial Lattice Method for Pricing Corporate Debt and Modelling Chapter 11 Procedings. *Journal of Finance and Quantitative Analysis, 42*(2), 279-312. https://doi.org/10.1017/S0022109000003288

Brockman, P., & Turtle, H. (2003). A Barrier Option Framework for Corporate Security Valuation. *Journal of Financial Economics, 67*(3), 511-529. https://doi.org/10.1016/S0304-405X(02)00260-X

Brous, P. (2011). Valuing an Early-Stage Biotechnology Investment as a Rainbow Option. *Journal of Applied Corporate Finance, 23*(2), 94-103. https://doi.org/10.1111/j.1745-6622.2011.00331.x

Castro, E. (2010). El estudio de casos como metodología de investigación y su importancia en la dirección y administración de empresas. *Revista Nacional de Administración, 1*(2), 31-54. https://doi.org/10.22458/rna.v1i2.332

Chance, D. (2008). A Synthesis of Binomial Option Pricing Models for Lognormally Distributed Assets. *Journal of Applied Finance, 18*(1), 38-56. https://doi.org/10.2139/ssrn.969834

Chevalier-Roigant, B., & Trigeorgis, L. (2011). *Competitive Strategy: Options and Games.* Cambridge, Massachusetts, London, England: MIT Press.

Chevalier-Roignant, B., Flath, C., & Trigeorgis, L. (2011). Strategic investment under uncertainty: A synthesis. *European Journal of Operational Research, 215*(3), 639-650. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2011.05.038

Copeland, T., & Antikarov, V. (2003). *Real Options: a practitioner´s guide.* New York: Cengage Learning.

Cox, J., Ross, S., & Rubinstein, M. (1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics, 7*(3), 229-263. https://doi.org/10.1016/0304-405X(79)90015-1

Culik, M. (2016). Real options valuation with changing volatility. *Pespectives in Science, 7*, 10-18. https://doi.org/10.1016/j.pisc.2015.11.004

Derman, E., Kani, I., & Chriss, N. (1996). Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile. (Goldman-Sachs, Ed.) *Quantitative Strategies Research Notes, 14*, 1-27.

Dixit, A., & Pindyck, R. (1994). *Investment under Uncertainty* (1 ed.). New Jersey: Pricenton University Press.

Dixit, A., & Nalebuff, B. (1991). *Thinking Strategically: The competitive edge in business, politics and everyday life.* New York, EE.UU: Norton Press.

Fudenberg, D., & Tirole, J. (1985). Preemption and rent equalization in the adoption of new technology. *Review of Economics Studies, 52*(3), 383-401. https://doi.org/10.2307/2297660

Fudenberg, D., & Tirole, J. (1986). A theory of exit in doupoly. *Econometrica, 54*(4), 943-960. https://doi.org/10.2307/1912845

Gamba, A., & Trigeorgis, L. (2007). An Improved Binomial Lattice Method for Multi-Dimensional Options. *Applied Mathematical Finance, 14*(5), 453-475. https://doi.org/10.1080/13504860701532237

Ghemawat, P., & Nalebuff, B. (1985). Exit. *Journals of Economics, 16*(2), 184-194. https://doi.org/10.2307/2555409

Graham, J. (2011). Strategic real options under asymmetric information. *Journal of Economics and Dynamic Control, 35*(6), 922-934. https://doi.org/10.1016/j.jedc.2011.01.001

Grenadier, S. (1996). The strategic exercise of options: Development cascades and overbuilding in real state markets. *Journal of Finance, 51*(5), 1653-1679. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1996.tb05221.x

Grenadier, S. (2002). Option exercise games: an application to the equilibrium investement strategies of firms. *Review of Financial Studies, 15*(3), 691-721. www.jstor.org/stable/2696718

Grenadier, S. (2005). Options exercise games: The intersection of real options and game theory. *Journal of Applied Corporate Finance, 13*(2), 99-107. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1996.tb05221.x

Guintis, H. (2009). *Game Theory Evolving* (2 ed.). United Kingdom: Princeton University Press.

Haahtela, T. (2010). Recombining trinomial tree for real option valuation with changing volatility. *Social Science Research Network*, 1-25. https://doi.org/10.2139/ssrn.1932411

Haahtela, T. (2011). *Estimating Changing Volatility in Cash Flow Simulation Based Real Options Valuation with Regression Sum of Squared Error Method.* Social Science Research Network. https://doi.org/10.2139/ssrn.1

Herath, H., & Kumar, P. (2006). Multinomial Approximating Models for Options. 1-37. https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.529.6466&rep=rep1&type=pdf

Hsu, Y., & Lambrecht, B. (2007). Preemptive patenting under uncertainty and asymmetric information. *Annals of Operations Research, 151*(1), 5-28. https://doi.org/10.1007/s10479-006-0125-5

Jabbour, G., Kramin, M., & Young, S. (Noviembre de 2001). Two-state Option Pricing: Binomial Models Revisited. *Journal of Futures Markets, 21*(11), 987-1001. https://doi.org/10.1002/fut.2101

Jarrow, R., & Rudd, A. (1982). Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes. *Journal of Financial Economics, 10*(3), 347-369. https://doi.org/10.1016/0304-405X(82)90007-1

Kamrad, B., & Ritchken, P. (1991). Multinomial Approximating Models for Options with k State Variables. *Management Science, 37*(12), 1640-1653. https://doi.org/10.1287/mnsc.37.12.1640

Korn, R., & Muller, S. (2009). The decoupling approach to binomial pricing of multi-asset options. *The Journal of Computational Finance, 12*(3), 1-30. https://doi.org/10.21314/jcf.2009.207

Kreps, D., Milgron, P., Roberts, J., & Wilson, R. (1982). Rational Cooperation in Finitely Repeated Prisioner´s Dilemmas. *Journal of Economics Theory, 27*(2), 245-252. https://doi.org/10.1016/0022-0531(82)90029-1

Kulatilaka, N., & Perotti, E. (1998). Strategic growth options. *Management Science, 44*(8), 1021-1031. https://doi.org/10.1287/mnsc.44.8.1021

Lambrecht, B. (2001). The impact of debt financing on entry and exit in duopoly. *Review of Financial Studies, 14*(3), 765-804. www.jstor.org/stable/2696773

Lambrecht, B., & Perraudin, W. (2003). Real options and preemption under incomplete information. *Journal of Economics Dynamics and Control, 27*(4), 619-643. https://doi.org/10.1016/S0165-1889(01)00064-1

Lari-Lavassani, A., Simchi, M., & Ware, A. (2001). A discrete valuation of swing options. *Canadian applied mathematics quarterly, 9*(1), 35-73. https://doi.org/10.1.1.571.8300

Massé, P. (1963). *La elección de las inversiones: criterios y métodos.* Sagitario Ediciones.

Medina, R., & Rodriguez, Y. (2010). Una revisión de los modelos de volatilidad estocástica. *Comunicaciones en Estadística, 3*(1), 79-97. https://doi.org/10.15332/s2027-3355.2010.0001.05

Merton, R. (1973). The Theory of Rational Options Princing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 141-183.

Merton, R. (1974). On the pricing of crporate debt: the risk structure of interest rates. *Journal of Finance, 29*(2), 449-470. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1974.tb03058.x

Milanesi, G. (2011). Flexibilidad estratégica, teoría de opciones reales y convergencia con el VAN empleando coeficientes equivalentes ciertos y probabilidades del "mundo real". *SaberEs*(3), 47-60. repositoriodigital.uns.edu.ar/handle/123456789/4255

Milanesi, G. (2013). Asimetría y Curtosis en el Modelo Binomial para valora Opciones Reales: caso de aplicación para empresas de base tecnológica. *Estudios Gerenciales Journal of Management and Economics for Iberoamerica, 29*(128), 368-378. https://doi.org/10.1016/j.estger.2013.09.011

Milanesi, G. (2019). Predicciones de fracasos financieros con opciones reales barrera: un estudio para el mercado argentino. *Estudios de Administración, 26*(2), 53-81. https://doi.org/10.5354/0719-0816.2019.56951

Milanesi, G. (2021). Modelo de valoración con opciones reales, rejillas trinomial, volatilidad cambiante, sesgo y función isoelástica de utilidad. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa, 32*, 257-273. https://doi.org/10.46661/revmetodoscuanteconempresa.4602

Milanesi, G. (2022). Opciones reales secuenciales cuadrinomiales y volatilidad cambiante: Incertidumbres tecnológicas y de mercado en desarrollos de inversiones biotecnológicas. *Revista Méxicana de Economía y Finanzas (REMEF), 17*(1), 24-49. https://doi.org/10.21919/remef.v17i1.500

Milanesi, G., Pesce, G., & El Alabi, E. (2013). Technology-Based Start up Valuation using Real Opciones with Edgeworth Expansion. *Journal of Financial and Accounting, 1*(2), 54-61. https://doi.org/10.12691/jfa-1-2-3

Milanesi, G., Pesce, G., & El Alabi, E. (2016). Firm valuation and default probability through exotic (barrier) options. *European Accounting and Management Review, 2*(2), 56-76. papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2888799

Milanesi, G., & Thomé, F. (2015). Un modelo consolidado de opciones reales, teoría de juegos y análisis de costos de transacción para el diseño de acuerdos contractuales. *Revista de Economía Política de Buenos Aires, 14*, 59-81. ojs.econ.uba.ar/index.php/REPBA/article/view/824

Milanesi, G., & Tohmé, F. (2014). Árboles Binomiales Implícitos, Momentos Estocásticos de Orden Superior y Valuación de Opciones. *Revista de Economía Política (REPBA), 12*(7), 45-72. ojs.econ.uba.ar/index.php/REPBA/article/view/559

Murto, P. (2004). Exit in duopoly under uncertainty. *Journal of Economics, 35*(1), 111-127. https://doi.org/10.2307/1593732

Nash, J. (1953). Two-Person Cooperative Games. *Econometrica, 21*(1), 128-140. https://doi.org/10.2307/1906951

Pareja, J., Prada, M., & Moreno, M. (2019). Volatilidad en Opciones Reales: Revisión literaria y un caso de aplicación al sector petrolero colombiano. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, *27*, 136-155. www.upo.es/revistas/index.php/RevMetCuant/article/view/2820

Pawlina, G., & Kort, P. (2006). Real options in an asymmetric duopoly: Who benefits from your competitive disadvantage? *Journal of Economics and Management Strategy, 15*(1), 1-35.

Paxson, D., & Melmane, A. (2009). Multi factor competitive internet strategy evaluation: Search expansion, portal synergies. *Journal of Modeling Management, 4*(3), 249-273. https://doi.org/10.1108/17465660911006477

Paxson, D., & Pinto, H. (2003). Rivalry under price and quantity uncertainty. *Review of Financial Economics, 14*(3-4), 209-224. https://doi.org/10.1016/j.rfe.2005.04.002

Rendleman, R., & Bartter, B. (1979). Two State Option Pricing. *The Journal of Finance, 34*(5), 1093-1110. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1979.tb00058.x

Rubinstein, M. (1983). Displaced Diffusion Option Pricing. *Journal of Finance, 38*(1), 213-217. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1983.tb03636.x

Rubinstein, M. (1994). Implied Binomial Trees. *Journal of Finance, 49*(3), 771-818. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1994.tb00079.x

Rubinstein, M. (1998). Edgeworth Binomial Trees. *Journal of Derivatives, 5*(3), 20-27. https://doi.org/10.3905/jod.1998.407994

Rubinstein, M. (2000). *On the Relation Between Binomial and Trinomial Option Pricing Model.* Berkeley, Research Program in Finance-292. California: UC Berkeley. http://haas.berkeley.edu/finance/WP/rpflist.html

Smit, H. (2003). Infrastructure investment as a real options game: The case of European airport expansion. *Financial Management, 32*(4), 5-35. https://doi.org/10.2307/3666135

Smit, H., & Ankum, L. (1993). A real options and game-theoretic approach to corporate investment strategy under competition. *Financial Management, 22*(3), 241-250. https://doi.org/10.2307/3665941

Smit, H., & Trigeorgis, L. (2004). *Strategic Investment: Real Options and Games* (1 ed.). New Jersey, Estados Unidos: Princeton University Press.

Smith, J. (2005). Alternative Approach for Solving Real Options Problems. *Decision Analysis, 2*(2), 89-102. https://doi.org/10.1287/deca.1050.0041

Smith, J., & Nau, R. (1995). Valuing Risky Projects: Option Pricing Theory and Decision Analysis. *Management Science, 41*(5), 795-816. https://www.jstor.org/stable/2633099

Thijssen, J. (2010). Preemption in a real option game with a first mover advantage and a player-specific uncertainty. *Journal of Economics Theory, 145*(6), 2448-2462. https://doi.org/10.1016/j.jet.2010.10.002

Tian, Y. (1993). A modified lattice approach to option pricing. *The Journal of Futures Markets, 13*(5), 563-577. https://doi.org/10.1002/fut.3990130509

Trigeorgis, L. (1995). *Real Options in Capital Investment: Models, Strategies and Applications* (1 ed.). London, United Kindgon: Praeger.

Van der Hoek, J., & Elliot, R. (2006). *Binomial models in Finance.* New York, United State: Springer Science.

Wilmott, P. (2009). *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance* (Segunda ed.). United Kingdom: John Wiley & Sons.

Zapata, C. (2019). Valoración de opciones reales con múltiples incertidumbres mediante modelos K dimensionales. *ODEON, 16*, 97-121. https://doi.org/10.18601/17941113.n16.05