

## EVALUACIÓN CONTINUA DE UNA ASIGNATURA DE CONTENIDO MATEMÁTICO MEDIANTE LA TÉCNICA DE PORTAFOLIOS Y USANDO UN PAQUETE DE CÁLCULO SIMBÓLICO

EVA OLIVER GARCÍA  
ÁNGEL F. TENORIO VILLALÓN

*Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica  
Escuela Politécnica Superior  
Universidad Pablo de Olavide*

Contacto:  
Ángel F. Tenorio Villalón  
aftenorio@upo.es

### RESUMEN

*El presente artículo muestra cómo evaluar al alumnado en la asignatura Métodos Matemáticos para la Ingeniería de la Universidad Pablo de Olavide, mediante una evaluación continua de tipo portafolio en la que el alumnado irá realizando una serie de actividades por tema que serán las que se emplearán para su evaluación final y que realizarán bajo la supervisión del profesorado haciendo uso de las tutorías. En vista del tipo de actividades evaluativas empleadas, se hará necesario disponer de mecanismos de control que aseguren tanto autoría como comprensión de trabajos. Los contenidos de esta asignatura son eminentemente prácticos y basados en la resolución de problemas, con la ayuda de un paquete de cálculo simbólico. El uso de este tipo de recursos conlleva un cambio en los criterios de evaluación y en la metodología evaluativa con respecto a una metodología clásica con su evaluación centrada en realizar problemas “a mano”.*

### 1. INTRODUCCIÓN

La Universidad Pablo de Olavide (UPO) ha apostado desde el comienzo por la implantación de los grados en el panorama académico universitario. En este sentido, la UPO comenzó a desarrollar desde el curso 2005/2006 experiencias pilotos para la implantación de metodologías ECTS para el Espacio Europeo de Educación Superior (EEES). Estas experiencias pilotos buscaban que profesorado y alumnado comenzasen a trabajar el proceso de enseñanza / aprendizaje desde la perspectiva de la evaluación por competencias y buscar la formación de profesionales que fuesen competentes y que no se limitasen a contenedores de una serie de contenidos que en la sociedad del conocimiento en que vivimos van quedando desfasados con relativa velocidad.

En el caso concreto de la Escuela Politécnica Superior (EPS) de la UPO, comentar que el trabajo por competencias dentro del marco del EEES comenzó en el año 2006/2007 en el que comenzó su andadura la experiencia piloto para la Ingeniería Técnica en Informática. Con la entrada del Grado de Ingeniería Informática en Sistemas de Información (GIISI) en el curso 2010/2011, ha pasado el momento de la formación y preparación para el marco general relativo a realizar una titulación de grado en el marco del EEES y poner práctica lo aprendido hasta este momento. Esto es lo que nos corresponde a las asignaturas de contenido matemático para el presente curso, ya que todas nuestras asignaturas se imparten durante dicho primer curso.

Este proceso de adaptación al modelo del EEES no ha sido sencillo ni para alumnado ni para profesorado, pues han conllevado grandes cambios en la metodología docente y en la práctica evaluativa. Para facilitar esta transición, la UPO ha fomentado la realización de cursos de formación docente para el profesorado y la participación del mismo en congresos sobre docencia donde pudiesen compartir y comparar experiencias y problemas con docentes de otras universidades.

Como fruto de estos años de formación y de innovación docente, la UPO ha organizado un modelo docente esencialmente diferente con respecto a las metodologías tradicionales y que busca establecer un equipo entre profesorado y alumnado para que estos últimos sean partícipes activos en su aprendizaje y se formen como profesionales competentes que puedan ir actualizando y completando sus conocimientos a medida que lo requiera su práctica profesional.

En este sentido, Bermudo et al. (2006) plantearon cómo podría planificarse y articularse las asignaturas de matemáticas y estadística en la UPO para trabajarlas desde la perspectiva del trabajo significativo y autónomo del alumnado, empleando la estrategia del portafolio compuesto de actividades académicas dirigidas para complementar un examen final (que englobaba la mayor parte de la calificación). Tales actividades permitían regular el aprendizaje del alumnado para la preparación de este examen final, que conllevaba la superación de la asignatura. Comentan que enfatizaron el cambio (positivo) de rol que tendrían docentes y estudiantes en el sentido que ya auspiciaban los documentos oficiales sobre implantación de los grados (Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte, 2003; Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación, 2005): el docente pasaba a orientar y gestionar el aprendizaje del estudiante, siendo este último el que protagonizaba activa y autónomamente su conocimiento durante el curso.

Esta participación activa del alumnado con su trabajo autónomo (tanto individual como grupal) es primordial para entender la necesidad de que el alumnado gestione su trabajo y requiera de un asesor que le ayude a aprender cómo gestionarlo. Obviamente, este asesoramiento se realiza con las tutorías y este recurso didáctico pasa de ser un complemento infrutilizado en la práctica tradicional a convertirse en la principal herramienta de trabajo para que el docente forme a su alumnado. Al tener que dar relevancia a la tutorización del alumnado, el docente debe replantearse la forma de realizarlas y los recursos que empleaba para las mismas. Con los grados, las tutorías dejan de ser momentos en que se solventan dudas de la asignatura y pasan a ser acciones formativas del docente sobre sus estudiantes, orientando el trabajo que están realizando y corrigiendo todas las faltas que estén realizando durante la elaboración de sus actividades. Pero la tutoría debe ser mucho más... debe ser un momento de evaluación, ya que la forma en que el alumnado está tratando las actividades, las preguntas que realiza, las dudas que le van surgiendo y que solventa con su tutor o tutora son datos que dan una gran información sobre la evolución del alumnado durante el cuatrimestre y debería ser vinculante al respecto de la calificación que le vamos a asignar para indicar la superación o no de la asignatura. Dicho de otra manera, con la tutoría podemos ir obteniendo información durante el curso para saber si nuestro alumnado se está volviendo competente.

Es por ello que no nos debe extrañar la afirmación de diversos autores sobre que la tutoría es una de las actividades docentes (quizás la más importante) que necesitamos emplear para formar al alumnado por medio de trabajo y adquisición de conocimientos (Arbizu et al., 2005). Es siguiendo este planteamiento que Hernández-Jiménez et al. (2008a) propusieron y, posteriormente, aplicaron un plan integral de acción tutorial en asignaturas de matemáticas y estadística para la ingeniería informática, mostrando la importancia que tiene la tutorización

como parte del sistema de evaluación de sus asignaturas. Pero las tutorías no tienen por qué limitarse a acciones presenciales entre docente y estudiante, sino que se pueden considerar acciones virtuales y favorecer la tutorización en línea (virtual) mediante correo electrónico, foros, chats, pizarras virtuales y otras herramientas disponibles en las plataformas de aula virtual. Para Sáenz Castro (2001) la tutoría es uno de los agentes principales para evaluar el seguimiento individualizado y personalizado del estudiante en un proceso de autoaprendizaje a distancia. Siguiendo esta afirmación, resulta de interés para las asignaturas matemáticas de la ingeniería, las sugerencias y comentarios de Hernández-Jiménez et al. (2008b) sobre virtualización de asignaturas del ámbito de conocimiento que nos ocupa.

Antes de continuar con esta introducción, querríamos hacer unos breves comentarios sobre la filosofía del portafolio que ya hemos mencionado anteriormente. El portafolio (Pozo Llorente, 2005; Pozo Llorente y García Lupión, 2006) permite recuperar toda la información necesaria sobre el alumnado para evaluar su evolución durante el curso y cuáles ha sido las competencias alcanzadas, incluso permite una actualización de la información que se disponía del alumnado para estadios o momentos anteriores.

Igualmente, queremos enfatizar la necesidad de trabajar de manera transversal las competencias digitales en nuestras asignaturas con el fin, no solo de alfabetizar computacionalmente a nuestro alumnado, sino también de actualizar la forma de resolver los problemas matemáticos en el aula (Salinas, 2004). Tradicionalmente, se han considerado imprescindible que todos los razonamientos y procedimientos algorítmicos debían estar realizados a mano sin soporte de ningún tipo (ni siquiera de la calculadora). En pleno siglo XXI, no tiene sentido esta filosofía y debemos mostrar al alumnado cómo se trabajan los problemas matemáticos en la actualidad con la ayuda de un software adecuado (Contreras et al., 2005; Martín Caraballo et al., 2010). Eso no quita que el alumnado tenga que razonar, argumentar y justificar correctamente todos sus pasos en la resolución de un problema o en la aplicación de un procedimiento algorítmico (Pérez Jiménez, 2005), pero sí elimina los problemas calculísticos que podrían aparecer en la evaluación ocultando realmente si el alumnado tiene problemas con los contenidos estudiados o si simplemente son problemas de cálculos enquistados de sus etapas educativas anteriores.

El propósito del presente trabajo reside en mostrar un planteamiento más agresivo que un plan integral de acción tutorial como el mostrado por Hernández-Jiménez et al. (2008a), por lo que promovemos una evaluación puramente basada en el trabajo semanal del alumnado. Este trabajo semanal (que constituirá un portafolio para cada estudiante) deberá controlarse y gestionarse por medio de las tutorías, que además permitirán dirigir, asesorar y regular el aprendizaje del alumnado. Obsérvese que estamos abogando por un modelo de evaluación continua basado netamente en la elaboración de un portafolio por cada estudiante y en la tutorización de la elaboración de dicho portafolio por el equipo docente. Finalmente, indicar que todo el trabajo del alumnado será asistido con el paquete de cálculo simbólico *Mathematica*®, con lo que además de una evaluación continua de los contenidos deberemos tener en consideración la evaluación de las competencias digitales y la modificación de las tareas de evaluación para que tengan sentido realizarlas con un software en lugar de la manera tradicional con lápiz y papel.

## 2. ESTRUCTURA DE LA DOCENCIA Y LA METODOLOGÍA

El Grado de Ingeniería Informática en Sistemas de Información (GIISI) de la Universidad Pablo de Olavide (UPO) consta de tres asignaturas Álgebra, Cálculo y Métodos Matemáticos para la Ingeniería (MMI). La experiencia que exponemos en el presente trabajo corresponde a esta última asignatura, cuyo temario abarca los contenidos propios del Álgebra Numérica y del Cálculo Numérico (lo cual la hace idónea para trabajar y evaluar con la ayuda de un paquete de cálculo simbólico).

En cuanto a docencia, MMI está distribuida en dos tipos de sesiones presenciales: las teóricas y las prácticas, trabajándose ambas desde la perspectiva del aprendizaje significativo y siendo el alumnado el principal creador de su conocimiento bajo el asesoramiento del equipo docente y usando correctamente el material aportado por el mismo. Las sesiones tienen una cadencia semanal, durando una hora y media las teóricas y dos horas las prácticas. Excepcionalmente, al principio del cuatrimestre hay una sesión teórica adicional de dos horas.

La metodología seguida en todas y cada una de las sesiones es eminentemente práctica e instrumental. Lo que se evalúa en las sesiones es el manejo correcto y apropiado de los conceptos y procedimientos que se trabajan de tal modo que el alumnado los pueda aplicar de manera acertada y adecuada a la resolución de problemas que se le plantean. En este sentido, al equipo docente no le preocupa la memorización de definiciones, resultados y procedimientos algorítmicos, sino que lo que le interesa evaluar es que el alumnado domine los conceptos que se trabajan, conozca los procedimientos de resolución de problemas existentes en los ámbitos trabajados y que sepa utilizarlos adecuadamente para resolver problemas. Este uso adecuado conlleva en concreto que siempre comprueben que los resultados y procedimientos que van a emplear realmente son aplicables al problema a tratar en cuestión; es decir, que los objetos que aparecen en el problema a resolver realmente satisfacen las hipótesis necesarias para que los resultados a aplicar sean correctos. Posteriormente, veremos un ejemplo concreto de cómo trabajar uno de los tipos de problemas tratados en la asignatura y cómo se va evaluando el contenido del mismo.

De este modo, buscamos la adquisición por parte del alumnado de las competencias necesarias para el manejo de las técnicas de resolución numérica de problemas y del control de los errores cometidos al considerar estimaciones en lugar de valores exactos. Para poder llevar a cabo este objetivo, se hace necesario trabajar de manera práctica no solo en las sesiones de problemas, sino también a la hora de explicar la teoría, ya que les resulta más fácil entender cómo funciona un procedimiento numérico y cuáles son los requisitos del mismo cuando se les propone un ejemplo práctico concreto. En consecuencia, los ejemplos prácticos que se trabajan pueden tener dos objetivos diferentes en función del momento en que se realizan. Así, en las sesiones teóricas, lo que se busca es ejemplificar conceptos y procedimientos además de plantear las principales dificultades de dichos procedimientos; mientras que, si estamos en sesiones prácticas, dichos problemas buscarían desarrollar las competencias del alumnado al respecto de modelización, tratamiento, justificación y aplicación de técnicas numéricas. De este modo, se pretende formar al alumnado en la resolución de problemas mediante procesos eficaces de pensamiento que no queden obsoletos y que le permitan la actualización de los procedimientos a emplear a medida que les sean necesarios.

Como hemos dicho, la propuesta de la asignatura es tratar los conceptos con problemas y de forma práctica. Eso conlleva implícitamente el uso de una herramienta digital para tratar computacionalmente los problemas de acorde a los tiempos que corren y no empleando solamente las técnicas de resolución del siglo XIX. En nuestro caso, usamos el paquete *Mathematica* de cálculo simbólico para el tratamiento de los problemas trabajados pudiendo usar dicho software en todas y cada una de las actividades de evaluación que han de realizar durante el cuatrimestre. Al introducir esta herramienta como elemento fundamental de nuestra docencia e inseparable de las actividades evaluativas que se proponen, estamos avocados a trabajar con nuestro alumnado en aulas de informática para que puedan manejar dicho software y emplearlo eficientemente en la resolución de problemas. Esto obliga también a que los grupos de práctica ronden los 20 estudiantes para no tener grupos masificados en dichas aulas, pues como es bien sabido los grupos numerosos no son aconsejables en las aulas de informática.

Pero además del enfoque práctico de la asignatura MMI, hemos de resaltar también que es el propio estudiante el que irá construyendo su conocimiento por medio de una serie de actividades (que después indicaremos cómo afectan a su evaluación) bajo el asesoramiento de un miembro del equipo docente que actuará como tutor durante el cuatrimestre. Por tanto, se vuelve esencial el gestionar de manera adecuada las tutorías con el alumnado y debe procurarse que este la aproveche en la medida de lo posible. También veremos cómo se articula la acción tutorial en la evaluación de la asignatura. Lo que sí queremos resaltar es que la tutoría ya no se reduce a un simple momento en el que el alumnado solventa sus dudas con el profesorado, sino que se vuelve una herramienta evaluativa más de la actividad y evolución del alumnado, siendo de utilidad para que el docente pueda para orientar el trabajo personal y autónomo de sus estudiantes, corregir hábitos y conceptos mal adquiridos, recuperar sus niveles de conocimiento (sobre todo en aquellos con escasa formación matemática previa) y detectar y corregir problemas de aprendizaje.

### 3. EVALUACIÓN CONTINUA POR COMPETENCIAS

En la presente sección explicaremos cómo evaluaremos las competencias de nuestro alumnado mediante una evaluación continua durante el cuatrimestre. Para ello, sería conveniente hacer algunas consideraciones previas sobre el origen de esta asignatura para entender el modelo evaluativo empleado.

La asignatura MMI es heredera natural del cuatrimestre de Cálculo Numérico que se impartía en la asignatura Fundamentos Matemáticos de la Informática II de la Ingeniería Técnica en Informática de Gestión (ITIG) de la UPO. Dicho cuatrimestre trataba, con menor profundidad, contenidos similares a los que se tratan ahora en MMI y se enmarcaba dentro de los proyectos pilotos para la implantación de la metodología ECTS. Al estar enmarcada en un proyecto piloto, la evaluación no podía realizarse en un único momento del cuatrimestre mediante un examen parcial, sino que debían realizarse ciertas sesiones de evaluación durante el curso con el fin de preparar un sistema de evaluación continua para la entrada del GIISI. De manera oficial, la evaluación se realizaba mediante las siguientes actividades:

- Tres actividades dirigidas y supervisadas por un docente de la asignatura, en la que cada estudiante debía resolver un listado de problemas teórico-prácticos para evaluar su destreza con los conceptos y procedimientos trabajados en las sesiones teóricas y prácticas. Les correspondía al 25% de la calificación total.

- Un examen práctico escrito sobre todo el cuatrimestre al final del mismo y que correspondía al 75% de la evaluación.

Ambas actividades de evaluación podían realizarse con la ayuda del paquete *Mathematica* y empleando todo el material de apuntes que había sido puesto a disposición del alumnado por el equipo docente en el aula virtual de la asignatura. Por tanto, ya que la realización de los problemas debía hacerse con *Mathematica*, el examen escrito se llevaba a cabo en un aula de informática.

Aparte de estos dos tipos de actividades de evaluación, el equipo docente observó la necesidad de motivar al alumnado al respecto de trabajar de manera continuada y casi diaria los contenidos de la asignatura para evitar la acumulación de material sin estudiar y el posterior abandono del alumnado por su imposibilidad de ponerse al día con la materia. Ante este hecho, se articularon unas actividades de evaluación complementarias (y de carácter optativo) que consistían en la realización de un serie de problemas prácticos que tenían que entregar de manera quincenal al equipo docente. Dichas tareas complementarias, permitían obtener 2 puntos adicionales en la calificación y buscaban premiar el esfuerzo por el trabajo continuado del alumnado.

De este modo, un estudiante podía llegar a tener una calificación de hasta 4.5 antes de realizar el examen final del cuatrimestre, eliminando asimismo la predominancia que tenía el examen escrito hasta la fecha y necesitándose solo resolver uno o dos problemas correctamente en el examen para superar la asignatura.

Al habilitar las actividades dirigidas y las tareas como actividades de evaluación, el equipo docente apostó por una evaluación en la que se premiaba el trabajo del alumnado y su evolución durante el cuatrimestre. Pero también, conllevaba el compromiso por parte del profesorado de un seguimiento más personalizado y continuado de cada estudiante. Es decir, se hacía esencial darle más relevancia a las tutorías y convertirlas en parte de la evaluación y no simplemente en un recurso para resolver dudas. En concreto, se hizo patente la necesidad de habilitar diversos mecanismos de comunicación docente-estudiante adicionales al simple hecho de ir al despacho del docente para preguntar dudas. En este sentido, se empezó a hacer un uso cotidiano del correo-e interno y de los foros del aula virtual, amén de utilizar herramientas para la enseñanza a distancia como podía ser la pizarra virtual.

Todos estos precedentes nos llevaron a preguntarnos si realmente era necesario un examen al final del cuatrimestre o si sería suficiente evaluar al alumnado mediante las tareas u otras actividades similares a realizar durante el cuatrimestre. La decisión que se tomó finalmente fue la de suprimir la evaluación final y proceder a evaluar al alumnado de manera continua durante todo el cuatrimestre mediante el envío de una serie de actividades que podrían realizar en su casa y entregar en un determinado plazo, acompañadas de los mecanismos de control adecuados. El sistema de evaluación que se ha seguido es el que explicaremos a continuación.

La evaluación de la asignatura carece de un examen escrito al final del cuatrimestre, consistiendo en la correcta realización de diversas actividades de evaluación con un determinado peso cada una en la calificación final, en función de la complejidad o esfuerzo que presenten dichas actividades. De este modo, el alumnado irá superando la materia a lo largo del cuatrimestre mediante su trabajo autónomo y bajo la supervisión del docente que lo tenga a su cargo.

Semanalmente, cada estudiante tendrá que realizar una tarea compuesta por una serie de problemas prácticos relativos a los contenidos y procedimientos trabajados en la sesión

práctica que hayan tenido esa semana. Se les habilitará el tiempo suficiente para que entreguen telemáticamente dicha tarea resuelta y hayan podido consultar su trabajo en la misma previamente con el equipo docente, que les asesorará y corregirá, en caso necesario, para que la realicen correctamente. Tanto la asignación de las tareas como la entrega de las mismas se están llevando a cabo por la herramienta de tareas del aula virtual.

Indicar que estas tareas nos están mostrando la evolución del estudiante durante el cuatrimestre y se están devolviendo revisadas al alumnado para que las corrijan en función de las indicaciones dadas por el equipo docente. Una vez que las corrija, y siempre que lo estime oportuno, podrá realizar un segundo envío de la misma con correcciones que sustituirá al envío previo. De este modo, estamos haciendo uso de la función reguladora de la evaluación y el alumnado puede corregir los errores que ha cometido y adquirir aquellos conocimientos que no había alcanzado.

Para la realización de las tareas, el alumnado puede hacer uso del paquete *Mathematica*, recomendándose su uso para tratar computacionalmente los problemas. Hay que tener en cuenta que cuando se habla de emplear *Mathematica* para resolver los problemas de las tareas, no nos estamos refiriendo a que se le libera de argumentar y razonar lo que hace... Nada más lejos de la realidad. Lo que conlleva el uso de *Mathematica* es que en la asignatura no evaluamos los cálculos en sí, sino los procedimientos de cálculo y de aplicación de las técnicas numéricas desde un punto de vista computacional. Cada estudiante ha de explicar y argumentar razonadamente cómo está resolviendo el problema, qué es lo que está haciendo, por qué lo está haciendo y cuáles son las conclusiones a las que llega con los cálculos que realiza. Al no tener que preocuparnos de que el alumnado esté realizando los cálculos correctamente (dichos cálculos los hace *Mathematica*), en lo que enfocamos la evaluación es en la comprensión de los contenidos y procedimientos, amén de su correcta, razonada y justificada aplicación. Es más, para dar por correcta la resolución de un problema, resulta esencial realizar una argumentación formal de lo que está haciendo y del resultado final al que llega (a veces incluso con la correspondiente interpretación al problema real modelizado con las Matemáticas).

Nótese que la propuesta de evaluación que estamos defendiendo en este trabajo, es precisamente la de un portafolio en el que el alumnado va realizando una serie de actividades evaluativas de manera secuencial, pudiendo corregir dichas actividades por una versión actualizada y mejorada de la misma. Este tipo de evaluación del trabajo del alumnado durante el cuatrimestre nos permitirá visualizar su evolución en la asignatura y nos dará una perspectiva más global de las competencias que habrá ido adquiriendo.

Esto nos lleva a dos cuestiones: la primera consistiría en saber si cada estudiante ha realizado cada una de las tareas entregadas y la segunda se centraría en articular mecanismos para asesorarle durante la elaboración del mismo. Ambas cuestiones encuentran respuesta en la acción tutorial. Con la tutoría podemos seguir el trabajo que está realizando cada alumno para completar sus tareas. Cada vez que hacen uso de la tutoría para pedir asesoramiento sobre un problema podemos evaluar cómo ha abordado los problemas por su cuenta, cuáles son las ideas y percepciones que va construyendo respecto de los contenidos y procedimientos estudiados (incluidas las lagunas que tiene) e incluso podemos ver si realmente no está teniendo problemas con los conceptos y cuáles son las principales dificultades de aprendizaje que presenta. Muchas veces la tutoría con un estudiante te permite determinar carencias en su formación previa y, por tanto, te posibilitan darle alguna recomendación para superar esas carencias y poder afrontar con éxito las tareas y, por ende, la asignatura.

Al estar viendo cómo trabaja cada estudiante, con quién trabaja, cuáles son las dificultades que le han ido surgiendo en la resolución o cuál ha sido capaz para solventar los problemas que le surgían, disponemos de una información valiosísima para realizar una evaluación exhaustiva de cada estudiante en cuanto a la consecución de competencias.

Por tanto, las tutorías se vuelven esenciales para nuestra técnica de evaluación y es necesario motivar la asistencia a las mismas. Obviamente, hay una primera causa de motivación: si asisto a tutoría, el docente va a tener información sobre mi trabajo y me va a asesorar en los problemas por lo que los entregaré resueltos de forma correcta. Pero esta motivación podría no ser suficiente y, si queremos obligar al alumnado a asistir a tutoría, entonces debemos incluir estas en la calificación de la asignatura. Dicha inclusión puede realizarse a dos niveles: un primer nivel correspondiente a condicionar la calificación de las tareas a la asistencia a un mínimo de tutorías, convirtiendo la tutoría en un mecanismo de control para ver si cada estudiante ha trabajado las tareas entregadas y no se ha limitado a copiarlas; y un segundo nivel consistente en asignar una puntuación testimonial por el aprovechamiento de las tutorías. En nuestra asignatura ambos niveles son considerados y el aprovechamiento de las tutorías influye en la calificación, además de ser un mecanismo de control del trabajo del alumnado.

Pero para controlar que el alumnado ha trabajado y, lo que es más importante, que es suficientemente competente en la materia como para poder explicar los problemas realizados en las tareas, se han habilitado las denominadas defensas orales. Las defensas orales son tres actividades de evaluación en la que cada estudiante tendrá que explicar públicamente ante sus compañeros alguno o algunos de los problemas (completos o no) que ha entregado en las tareas y del que el equipo docente le realizará las preguntas que estime conveniente para comprobar cuál es el nivel de competencia del estudiante en función de las respuestas que dé a las preguntas formuladas. Las defensas orales se realizan por bloques temáticos y son una magnífica herramienta evaluativa para determinar si el/la alumno/a ha trabajado la asignatura, si ha recibido ayuda externa (distinta de la tutorización del equipo docente) para realizar los problemas o si es competente en el manejo y aplicación de los contenidos evaluados, además de ver su capacidad oral, de expresión y de transmisión de ideas. Estas actividades son un magnífico momento para corregir los malos hábitos y errores que son cometidos por cada estudiante.

A la hora de evaluar al estudiante, no entramos en si ha recibido ayuda de otros/as estudiantes en la elaboración de las tareas, ya que siempre puede pedir toda la ayuda que necesite del profesorado. Lo que sí consideramos de suma importancia es que, independientemente de haber recibido ayuda o no, este/a debe ser capaz de explicar de manera comprensible y razonada los problemas de la tarea y responder a las preguntas relacionadas con ella. En este sentido, en las defensas orales puede disponer de los trabajos que ha presentado para apoyarse a la hora de realizar la defensa y de responder a las preguntas que se le formulan.

Como puede deducirse de lo explicado hasta este punto, el trabajo autónomo del alumnado es la pieza clave de esta evaluación con un portafolio englobando las tareas elaboradas por este. Por tanto, es esencial articular todos los mecanismos necesarios y posibles para asesorar y regular la realización de dichas tareas por parte del equipo docente. Y esto nos vuelve otra vez al tema de la tutoría del alumnado por parte del profesorado. Desde el comienzo, se ha animado al alumnado a usar las tutorías en cualquiera de sus modalidades (presencial en el despacho o virtual mediante correo y/o foro), dejándoles claro que es parte



de su evaluación y enfatizando que su asistencia a tutorías es lo que más información puede darnos acerca de su evolución para su posterior evaluación.

Como dijimos anteriormente, hemos impuesto una asistencia mínima a las tutorías presenciales obligatorias que se usan para evaluar mediante una entrevista para ver su evolución y desarrollo en el cuatrimestre.

Tras explicitar y explicar las distintas actividades de evaluación de que disponemos en la asignatura MMI, solo nos resta indicar el peso de cada una de ellas en la calificación:

- Actividades académicas dirigidas: 60%.

Se distribuye equitativamente entre los seis temas de que dispone la asignatura, correspondiéndole un 10% de la evaluación a cada tema. El equipo docente se ha reservado el derecho a penalizar sobre este porcentaje en los casos de plagio (a trabajos ya existentes y a tareas de otros/as estudiantes).

- Defensas orales: 30%.

Le corresponde un 10% a cada una de las tres defensas orales que se realizarán en la asignatura.

- Tutorías presenciales obligatorias: 10%.

Querriamos indicar que los/as alumnos/as que no superen la asignatura siguiendo esta evaluación continua, tendrán la oportunidad de recuperar el 60% de la calificación correspondiente a las tareas mediante un examen tradicional en la segunda convocatoria de la asignatura.

Con respecto a qué evaluar en las distintas actividades de evaluación, querriamos destacar que no se realizan preguntas de tipo puramente teórico sino que todas las preguntas (tanto las que tienen que entregarse por escrito con las tareas como las verbales que se le hagan en las defensas orales) son de tipo práctico. En este sentido, a la hora de realizar un problema que requiere de usar un resultado teórico, lo que se espera del estudiante es que compruebe que el objeto del problema en cuestión satisface todas y cada una de las hipótesis necesarias para poder aplicar dicho resultado. El alumnado no tiene que saber de memoria todas las hipótesis, pero sí debe tener claro que debe comprobar cada una de ellas y que si no comprueba que se satisfacen, entonces no puede aplicar tal resultado. Esta sería la parte más teórica de la evaluación, pues consistiría en tener claro todos los conceptos que intervienen en la justificación de la aplicabilidad de un resultado y conllevaría una argumentación lógica y razonada de que tales condiciones se verifican. Una vez justificada la aplicabilidad de un resultado, se evaluaría cómo se aplica este al problema concreto y si se maneja adecuadamente. El resultado puede consistir por ejemplo en el método de resolución numérica a aplicar, la justificación de que el método converge al valor que se busca o comparar diversos datos obtenidos por el estudiante, por poner algunos ejemplos.

Aparte de la aplicación de los contenidos teóricos puestos a disposición del estudiante, también evaluamos otros aspectos como la modelización matemática de un problema planteado. Por ejemplo, puede ocurrir que el enunciado del problema corresponda a una situación real o que las condiciones que haya en dicho enunciado haya que traducirla a condiciones equivalentes que correspondan al tipo de problemas tratados en nuestro temario. Esa lectura comprensiva del problema, asimilación de lo que realmente se está preguntando y conversión a un problema matemático que pueda resolverse con las herramientas que

trabajamos en la asignatura es lo que realmente nos va a demostrar si el alumno o alumna es competente en el manejo de los contenidos que evaluamos.

La afirmación anterior se debe a que los contenidos que les estamos enseñando no son los fines últimos de la formación, sino que se enseñan porque son herramientas que ellos deben conocer para resolver problemas reales de la vida cotidiana (tanto profesional como social). Por tanto, para poder aplicar un problema real (que obviamente no estará formulado como un problema matemático), el alumnado debería ser capaz de traducir esa situación real a un problema matemático a resolver. Una vez planteado el problema matemático subyacente (esto es precisamente lo que se entiende por modelizar el problema), ha de resolverlo y es en la resolución donde aplicarán los contenidos y resultados que se le están explicando. Pero antes de aplicar dichos resultados, debe tener claro el significado de los conceptos para realizar correctamente la traducción (*i.e.* modelización) del problema real al problema matemático.

Pero la modelización de un problema no se reduce a la traducción anterior, sino que conlleva un detalle más. Tras resolver el problema matemático, la solución o soluciones que se obtienen del problema deberían traducirse nuevamente al contexto real de partida. Es decir, resolver el problema no puede reducirse a dar la solución matemática, sino que esa solución matemática debe expresarse en término de la pregunta no matemática que nos habían hecho, dando respuesta a la misma, una respuesta que estará justificada y fundamentada por el problema matemático que se haya resuelto.

Además de la modelización, también vamos a evaluar si el estudiante sabe traducir las expresiones matemáticas que ha de utilizar a un lenguaje computacional que pueda emplear un paquete de cálculo simbólico e, igualmente, que pase al lenguaje formal de las matemáticas los resultados que le devuelve dicho paquete. De este modo, el alumnado debe ser capaz de manejarse en tres niveles distintos, sabiendo pasar de uno al otro mediante las conexiones existentes entre unos niveles y otros, los cuales representamos a continuación:



Por tanto, resulta esencial que sepa pasar del lenguaje matemático al computacional y viceversa. Esto es especialmente clave en una asignatura que trabaja el Álgebra Numérica y el Cálculo Numérico, puesto que el tratamiento de un problema numérico es esencialmente un problema a tratar con la ayuda de un ordenador y así es como procuramos transmitirlo al alumnado. Si el alumno o alumna no es capaz de trabajar un problema numérico con la ayuda de un paquete de cálculo simbólico, eso quiere decir que no es competente en la resolución de este tipo de problemas y no ha asimilado parte esencial de las competencias de manejo y resolución de problemas numéricos.

Esta es una de las diferencias esenciales de la asignatura MMI con respecto de las asignaturas Álgebra y Cálculo. Mientras que MMI es una asignatura aplicada a la resolución de problemas numéricos y requiere de la aplicación práctica de procedimientos algorítmicos que deberían ser tratado de manera computacional con la ayuda de ordenadores, las otras dos son de corte más teórico y sus problemas pueden resolverse de manera eficaz sin la necesidad de un software ya que trabajamos con valores exactos y no con valores aproximados. Que conste que esto no quiere decir que no utilicemos un paquete de cálculo simbólico como soporte auxiliar en la resolución de problemas (pues trabajamos los problemas también con ordenador), sino que en el caso de MMI no parece procedente ni apropiado obviar el uso del

ordenador para trabajar la asignatura. En este sentido, el tratamiento asistido por ordenador de un problema matemático es esencialmente distinto del que se realizaría en caso de tener que trabajarlo manualmente. Es más, con el ordenador podemos obviar la resolución formal de algunos aspectos de problema que corresponden a contenidos que son evaluados en las asignaturas de Cálculo y de Álgebra y que serían necesarios para la correcta resolución del problema numérico. Por tanto, el uso de un software nos permite evaluar exclusivamente los contenidos propios de esta asignatura y no condicionar su superación o no a la superación de las otras dos.

Pero, ¿cómo se evalúa la resolución de un problema matemático si se está haciendo uso del ordenador? ¿Sirven las técnicas de evaluación clásicas o han de cambiarse los tipos de preguntas a realizar? A estas y a otras preguntas daremos respuesta en la siguiente sección.

#### 4. EVALUANDO PROBLEMAS RESUELTOS CON UN PAQUETE DE CÁLCULO SIMBÓLICO

Cuando la evaluación en una asignatura de Matemáticas se hace con un paquete de cálculo simbólico, lo único que tenemos que tener en cuenta es que la realización de cálculos ya no puede ser una parte esencial en la calificación del problema. Ejemplificamos esto con una situación muy sencilla y directa: Durante la resolución de un problema numérico se necesita resolver una ecuación polinómica de segundo grado. Lo que uno tendría que hacer resolviendo a mano el problema, sería aplicar la fórmula de la ecuación de segundo grado para obtener el resultado de la ecuación. Esos cálculos correspondientes a aplicar la ecuación de segundo grado tendríamos que evaluarlos en una evaluación clásica en la que el alumnado no puede hacer uso del ordenador para resolver el problema. Si el estudiante puede usar el ordenador, la resolución de la ecuación de segundo grado correspondería a aplicar un comando *Solve* de resolución de ecuaciones polinómicas con el que directamente obtiene las soluciones. Por tanto, parece lógico que, si se usa el ordenador, la evaluación no tenga en cuenta la obtención de las soluciones de la ecuación, pues el estudiante no ha tenido que calcularlas. Esta omisión de tener que aplicar procedimientos de cálculo exacto de raíces (y que no aportan información sobre el contenido que realmente estamos evaluando) es todavía más evidente si la ecuación es polinómica de grado superior a 2 y tuviésemos que aplicar repetidamente la regla de Ruffini para llegar a la ecuación de grado 2... Todo ese procedimiento que podría llevarnos un tiempo y volumen de cálculos a tener en cuenta en la evaluación del problema hecho a mano, podemos descartarlo en el tratamiento computacional gracias al comando *Solve*. De hecho, eso nos permite centrar la evaluación en los contenidos evaluables de la asignatura cursada en ese momento (en nuestro caso, MMI) y no en cálculos y procedimientos que debieran haber sido adquiridos en etapas anteriores.

Por tanto, aquí tenemos uno de los hechos más importantes en la evaluación de MMI: los cálculos no son parte esencial de la evaluación puesto que los hace el paquete de cálculo simbólico. Lo que sí habrá que evaluar es el razonamiento y argumentación que lleva a dichos cálculos y la interpretación de los mismos. En consecuencia, lo que hacemos es volcar la evaluación de la asignatura en la modelización de los problemas, en la justificación de si el método que se utiliza es aplicable a nuestro problema, en la aplicación correcta y justificada del método y la interpretación de los resultados obtenidos al aplicarlo.

Es decir, nos centramos en los conceptos y procedimientos que se trabajan en la asignatura y no en los cálculos subyacentes a ir aplicando los métodos. De este modo, podemos determinar si se alcanzan los objetivos fijados en la asignatura y el estudiante puede

ser considerado competente en el manejo de los conceptos y procedimientos numéricos, sin sufrir la distorsión que podrían aportar el evaluar los cálculos. Aclaremos un poco la última afirmación: no estamos diciendo que no deba evaluarse los cálculos en un problema matemático (cosa que hacemos en las asignaturas Álgebra y Cálculo), sino que hemos optado por centrarnos en la evaluación de los procedimientos. Si uno aplica correctamente el procedimiento de resolución a cada problema, cuando *Mathematica* haga los cálculos pertinentes que le hayamos indicado, estos serán automáticos y serán correctos. Por tanto, nos estamos centrando en evaluar si el estudiante aplica correctamente los procedimientos e igualmente si, además de interpretar de manera correcta los resultados obtenidos, le indica correctamente a *Mathematica* cómo debe aplicar dichos procedimientos, pues *Mathematica* (como cualquier otro paquete de cálculo simbólico) solo hace aquello que le ordena el usuario.

En este sentido, es importante (como ya indicamos antes) la traducción del lenguaje matemático al lenguaje computacional, para que el software realice correctamente los cálculos que queremos que haga. Esto, en el caso de un problema numérico, no se reduce solo a escribir correctamente las órdenes y comandos pertinentes, sino también a introducir de manera adecuada los datos que se trabajan. Por ejemplo, si queremos trabajar con una determinada precisión numérica, todos los números decimales que se introduzcan deberán estar declarados con dicha precisión para obtener un resultado con las características buscadas. Si lo que queremos es aplicar un método iterativo o recursivo para resolver un determinado problema, habrá de escribirse correctamente la sintaxis que corresponda a las operaciones de dicha fórmula iterativa o recursiva. Y así son muchos más los ejemplos que podríamos indicar.

En vista de todo lo anterior, se hace evidente que la resolución de problemas será el mecanismo en el que se basará toda la evaluación de la asignatura y así queda justificada que la evaluación se haga mediante tareas y sesiones de control (tutorías y defensas orales) de dichas tareas tal y como se indicaba en la sección anterior. Lo que no indicamos en dicha sección es cómo se evalúan específicamente los problemas que aparecen en dichas tareas. Hasta el momento, solo hemos dado indicaciones generalistas relativas a tener en consideración la modelización del problema, el manejo del software y la justificación y aplicabilidad de los métodos empleados. Pero tal vez nos quedaría más claro poniendo un problema de ejemplo.

Consideremos la resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales, como podría ser el sistema siguiente:

$$(1) \quad \begin{cases} 2.01x + y + 2z = 5.01 \\ 2x + 3y + 2z = 7 \\ 4x + 16y + 4z = 24 \end{cases}$$

En un primer estadio, nuestro alumnado debería pararse a comprobar si el sistema tiene un única solución  $(x, y, z)$ ; es decir, que el sistema es compatible determinado para poder aplicar los procedimientos de resolución numérica que se han visto en clase. Una vez que determinan que dicho sistema es compatible determinado (lo cual puede hacerse con el Teorema de Rouché-Fröbenius que se explica a nivel de Bachillerato y se vuelve a explicar en el cuatrimestre de Álgebra), debería procederse a estudiar las hipótesis necesarias para aplicar

el método de resolución del sistema que se quiera aplicar en cada caso. Puede ocurrir que el sistema que estamos considerando no sea apropiado para el método que se desea aplicar (o que se ha indicado en el enunciado). Ante este hecho, el estudiante podría tener dos opciones: una es utilizar otro método que sí sea aplicable al sistema que se tiene o (en caso de que tengamos que utilizar ex profeso ese método), buscar un sistema de ecuaciones equivalente al dado que sí verifique las hipótesis necesarias para poder aplicarlo. Recuérdese que los sistemas de ecuaciones equivalentes se obtenían intercambiando las ecuaciones de orden o cambiando una ecuación por ella misma más una combinación lineal de las ecuaciones restantes.

Es precisamente en este momento en el que realizamos una primera evaluación del alumno o alumna sin más que escribir un sistema que no satisfaga las condiciones del método a trabajar y que este o esta tenga que modificarlo con el fin de obtener uno equivalente al que sí pueda aplicársele el método en cuestión. Si el alumno o alumna no estudia las hipótesis que debe satisfacer el problema, veremos que lo único que ha alcanzado es el automatismo de los procedimientos, pero que no los usa correctamente con lo que no sabe resolver los problemas propuestos y no tiene las un nivel de competencia adecuado.

Una vez que ya ha justificado la aplicabilidad del método, sería el momento de aplicarlo al sistema en cuestión y resolver este último, todo ello usando el paquete *Mathematica* como herramienta de trabajo. Este tratamiento puede ir desde implementar una sencilla rutina que se corre y va realizando todos los cálculos pertinentes, con lo que el alumno o alumna solo tendría que ir interpretando cada una de las salidas que ha ido obteniendo con *Mathematica* hasta que realmente haya resuelto el sistema; o simplemente ir ejecutando las sentencias que vaya necesitando en cada paso de la resolución tratada y obviar la implementación de una rutina. Independientemente de cómo se lleve a cabo la resolución del problema, el alumno o alumna ha de emplear los mismos procesos cognitivos desde un punto de vista matemático y ha de llevar a cabo las mismas interpretaciones de los resultados que se van obteniendo.

Debemos tener en cuenta que estamos evaluando la capacidad del alumno o alumna para resolver el problema de manera razonada y justificada, por lo que al aplicar el método no tiene por qué preocuparse de los cálculos sino de ir justificando lo que está haciendo y razonar el procedimiento que le ha llevado al resultado que da para el problema.

La ventaja de un tratamiento computacional es que los cálculos se pueden realizar con una gran velocidad y, por tanto, podemos centrarnos en preguntar sobre distintos conceptos sin que el problema se complique en demasía o se alargue en exceso con respecto al tiempo que debería tener el alumno o alumna para resolverlo. Por lo general, si los problemas se tienen que hacer manualmente y sin ayuda de un software, ya solo preguntar por un concepto conlleva un gran gasto de tiempo y, por tanto, no parece lógico ni plantearse el preguntar por un segundo concepto.

En este sentido, cualquier problema numérico puede ir acompañado de preguntas sobre la exactitud y la precisión de la solución obtenida con respecto de la solución que realmente debería haber obtenido en el problema. Esto es debido a que, con un paquete de cálculo simbólico, dicho estudio consiste en ejecutar una sencilla orden que solo hay que saber interpretar y traducir al lenguaje de la exactitud y la precisión. Los conceptos de exactitud y precisión de la solución aproximada obtenida (que no será la exacta) consisten en medir cuánto dista dicha solución del valor que realmente deberíamos haber obtenido. Mientras que la exactitud lo hace en términos absolutos, la precisión lo hace en términos relativos con (*i.e.* tantos por uno).

Precisamente, con la precisión y exactitud podemos volver a evaluar la competencia de nuestro alumnado, ya que pueden prepararse problemas que conlleven definir los datos de partida con una determinada precisión con el fin de obtener el resultado final con la precisión deseada

.Existen métodos de tipo iterativo en los que se van obteniendo aproximaciones  $x_k$  sucesivas del valor exacto. En dichos métodos, la aplicabilidad del mismo se traduce en que la sucesión  $\{x_k\}$  converge al valor que realmente tiene la solución del problema. En este caso, se usan los denominados criterios de parada para ver si la exactitud o precisión para una determinada aproximación  $x_k$  es la deseada o si debe continuarse con las iteraciones para obtener una aproximación más exacta y/o precisa.

Para explicar lo anterior con un caso práctico, expondremos la evaluación de un problema de factorización  $LU$  como método de resolución del sistema de ecuaciones indicado en (1). En primer lugar, es necesario escribir el sistema en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 2.01 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 16 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.01 \\ 7 \\ 24 \end{pmatrix}$$

donde tenemos la matriz de coeficientes  $A$  y el vector de términos independientes  $\underline{b}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2.01 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 16 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 5.01 \\ 7 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Una vez que el alumno o alumna ha escrito el sistema en forma matricial (lo cual fue estudiado previamente en el cuatrimestre de Álgebra), será el momento de pensar en factorizar la matriz para aplicar el método de resolución.

Dada una matriz  $A$  con  $n$  filas y  $n$  columnas (*i.e.* cuadrada de orden  $n$ ), se dice que  $A$  admite una factorización  $LU$  si existen dos matrices  $L$  y  $U$  tales que  $A=L \cdot U$ , siendo  $U$  una matriz cuadrada de orden  $n$  con ceros por debajo de la diagonal principal y  $L$  una matriz cuadrada de orden  $n$  con ceros por encima de dicha diagonal y con unos sobre la misma. El problema de este tipo de factorización es que no existe para todas las matrices, por lo que el alumno o alumna que tenga que aplicar la factorización para resolver el sistema, tendrá que determinar si su matriz de coeficientes  $A$  es factorizable o si no lo es.

Si es factorizable, no tendrá ningún problema en continuar. Pero si no lo es (tal y como suele ocurrir en las actividades de evaluación), entonces se verá obligado a pensar en cómo tendrá que aplicar el método a su sistema. En concreto, existe un resultado que afirma lo siguiente: Si el sistema de ecuaciones puede resolverse mediante el método de reducción (formalmente llamado de Gauss) sin necesidad de cambiar el orden en el que aparecen las ecuaciones (*i.e.* el orden de las filas en la matriz  $A$ ), entonces la matriz admite una factorización  $LU$ . Si no se ha podido obtener una factorización  $LU$ , es porque habrá tenido lugar cambios en el orden de las ecuaciones. Por tanto, el alumno o alumna tendrá que

determinar cuáles han sido esos cambios y reescribir el sistema acorde al nuevo orden en las ecuaciones.

El poner el ejemplo de la factorización  $LU$  en este artículo se debe a que vamos a ver de manera muy directa cómo el usar un paquete como *Mathematica* simplifica las operaciones y nos permite centrarnos en los conceptos trabajados (en nuestro caso la factorización de la matriz  $A$  y la posterior aplicación de dicha factorización para resolver el sistema) y dejar en segundo lugar a todos aquellos cálculos que no son necesarios para determinar la comprensión del concepto y procedimiento por parte del alumno o alumna.

Si el alumno o alumna tuviese que calcular manualmente las matrices  $L$  y  $U$ , el número de operaciones sería considerable pues como mínimo tendría que llegar al sistema equivalente que se obtiene por el método de reducción, cuya matriz de coeficientes sería la matriz  $U$  y después construir la matriz  $L$  como el producto de unas determinadas matrices que representarían las modificaciones que se le han hecho a las filas de la matriz de partida al aplicar el método de reducción. Es decir, para trabajar este problema manualmente, tendríamos que evaluar necesariamente al alumno o alumna de un segundo método de resolución, método que puede no interesarnos evaluar en ese momento. Sin embargo, utilizando *Mathematica*, la obtención de las matrices  $L$  y  $U$  es muy rápido, aunque no inmediato, y conlleva la necesidad de que el alumno o alumna interprete el resultado devuelto por *Mathematica*. Concretamente, lo que haríamos sería genera la matriz  $A$  con *Mathematica* para posteriormente aplicarle un comando a esa matriz que es el que calculará la factorización e indicará si se han realizado cambios de filas en dicha matriz durante la obtención de la factorización.

```
In[1]:= a :=  $\begin{pmatrix} 2.01 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 16 & 4 \end{pmatrix}$ 

In[2]:= {lu, p, cn} = LUdecomposition[a]

Out[2]:= {{{4., 16., 4.}, {0.5025, -7.04, -0.01}, {0.5, 0.710227, 0.00710227}}, {3, 1, 2}, 6262.8}

In[3]:= MatrixForm[lu]

Out[3]/MatrixForm=
 $\begin{pmatrix} 4. & 16. & 4. \\ 0.5025 & -7.04 & -0.01 \\ 0.5 & 0.710227 & 0.00710227 \end{pmatrix}$ 
```

La matriz anterior es la forma abreviada que tiene *Mathematica* para escribir conjuntamente las matrices  $L$  y  $U$ . De la diagonal principal hacia arriba, tenemos los datos de la matriz  $U$ , mientras que los que quedan debajo de dicha diagonal son los datos de la  $L$ . De este modo, observando la matriz anterior, el alumno o alumna debería poder obtener sin problema las matrices  $L$  y  $U$ :

$$U = \begin{pmatrix} 4. & 16. & 4. \\ 0 & -7.04 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0.00710227 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5025 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.710227 & 1 \end{pmatrix}$$

Con lo cual ya tenemos las dos matrices de la factorización, pero lo que no sabemos es si estas dos matrices corresponden a la matriz  $A$  o han conllevado una reordenación de las

ecuaciones en el sistema. Esta información también debe ser capaz de deducirla nuestro alumno o alumna a partir de la respuesta que le dio antes *Mathematica*:

In[2]:= {lu, p, cn} = LUdecomposition[a]

Out[2]:= {{{4., 16., 4.}, {0.5025, -7.04, -0.01}, {0.5, 0.710227, 0.00710227}}, {3, 1, 2}, 6262.8}

El dato remarcado por una elipse es el que les da esa información. La interpretación que tiene ese dato es la del orden en el que *Mathematica* ha considerado las filas de la matriz  $A$  (o equivalentemente las ecuaciones del sistema) para calcular la factorización devuelta. Como el dato es {3,1,2}, *Mathematica* nos está indicando que ha tenido que escribir en primer lugar la fila 3 de  $A$ , después ha escrito la fila 1 y por último la fila 2. Es decir, la matriz que yo voy a ser capaz de factorizar no es  $A$  sino la que tiene esa reordenación de sus filas:

$$\begin{pmatrix} 4 & 16 & 4 \\ 2.01 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5025 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.710227 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4. & 16. & 4. \\ 0 & -7.04 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0.00710227 \end{pmatrix}$$

Volvemos a poder evaluar las competencias de nuestro alumno o alumna para resolver el problema que estamos trabajando. Como se han tenido que reordenar las filas de la matriz  $A$ , también se han reordenado del mismo modo las ecuaciones en el sistema (1). Por tanto, el sistema que el alumno a alumna ha de resolver sería el factorizado, el cual indicamos a continuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5025 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.710227 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4. & 16. & 4. \\ 0 & -7.04 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0.00710227 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 5.01 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Es decir, el alumno o alumna que comprende y aplica correctamente la factorización  $LU$  no debería obviar la reordenación de los términos independientes cuando da la expresión del sistema factorizado que se va a resolver.

Una vez factorizado el sistema de la forma que acabamos de mostrar, el alumno o alumna pasaría a resolver dos sistemas con matrices de coeficiente triangulares, cuya resolución es más sencilla que la de los sistemas con matriz de coeficientes no triangular. Esa resolución la puede realizar usando tanto el método de reducción como la inversión de matrices, pero explicando qué es lo que está haciendo con cada uno de los dos sistemas involucrados.

El primer sistema a resolver tiene a  $L$  como matriz de coeficientes y a  $(24 \ 5.01 \ 7)^T$  como vector de términos independientes (*i.e.* los del sistema factorizado):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5025 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.710227 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 5.01 \\ 7 \end{pmatrix}$$



y cuya resolución mediante inversión de matrices sería

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = L^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 5.01 \\ 7 \end{pmatrix}$$

lo que se resolvería con el paquete *Mathematica* como sigue

```
In[8]:= incogAuxiliar = Inverse[L].{24, 5.01, 7}
```

```
Out[8]:= {24., -7.05, 0.00710227}
```

Para pasar al segundo sistema triangular, lo primero que debe tener claro el alumno o alumna (y así debe explicitarlo en la resolución) es la relación existente entre el vector incógnita  $(x' \ y' \ z)'$  del sistema anterior y el vector de incógnita  $(x \ y \ z)'$  del sistema original. Dicha relación es la que sigue:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4. & 16. & 4. \\ 0 & -7.04 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Como  $(x' \ y' \ z)'$  es un vector cuyas coordenadas ya hemos calculado, la relación anterior no es más que un sistema de ecuaciones lineales con ese vector como vector de términos independientes y la matriz  $U$  de la factorización como matriz de coeficientes. Por lo que la resolución de este segundo sistema consistiría en calcular:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = U^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ -7.05 \\ 0.00710227 \end{pmatrix}$$

lo que con el paquete *Mathematica* se llevaría a cabo como sigue:

```
In[9]:= Inverse[u].incogAuxiliar
```

```
Out[9]:= {1., 1., 1.}
```

obteniendo la solución del sistema de partida con  $x=1$ ,  $y=1$  y  $z=1$ .

En este último estadio, el alumno o alumna no está siendo evaluado sobre la resolución de sistemas de ecuaciones (por lo que puede resolver el sistema con el paquete *Mathematica*), sino que centramos nuestra evaluación en cómo maneja el sistema factorizado y cómo utiliza la factorización obtenida para resolver dicho sistema en dos etapas.

Con esto, el problema estaría finalizado y habríamos evaluado al alumno o alumna tanto de los conceptos relativos a la factorización  $LU$  como de su aplicación en la práctica para resolver el sistema.

## 5. CONCLUSIONES

En el presente artículo hemos explicado el sistema de evaluación que estamos llevando a cabo en la asignatura MMI del GIISI y cómo la experiencia previa en la ITIG nos ha hecho evidente la necesidad de realizar un seguimiento continuado del alumno o alumna durante el cuatrimestre para que se sienta motivado y trabaje de forma continuada la materia que se está impartiendo.

Igualmente, hemos expuesto nuestra percepción de cómo el trabajo continuado del alumno o alumna durante todo el cuatrimestre le debería permitir superar los contenidos teóricos de la asignatura, además de desarrollar diversas competencias relacionadas con la materia cursada, el trabajo autónomo y grupal, con el manejo de software y equipo informático o con la adquisición autónoma de conocimientos para que completar el que tiene o se le indica (aprender a aprender), por poner algunos ejemplos.

Para favorecer y, de hecho, forzar a este trabajo continuado durante el cuatrimestre, se ha optado por seguir un sistema de evaluación continua consistente en el envío de tareas semanales que deben entregarse y que aportan parte de la calificación final de la asignatura. De este modo, el alumno o alumna va creando su propio portafolio con el que el docente le evaluará a final del cuatrimestre.

Con esta evaluación mediante portafolio, debemos tener en cuenta que el alumnado se encuentra motivado porque percibe que el trabajo que viene realizando durante el cuatrimestre está recompensado y se refleja de manera contundente en su calificación final, no teniéndose que jugar una parte importante de su calificación en un único examen final. Pero es más, al usar un portafolio, el alumno o alumna tiene la posibilidad de corregir las tareas que ha realizado tras una primera evaluación y dicha versión corregida podría mejorar su calificación. Esto último está haciendo que el alumnado aproveche las tutorías para conocer sus errores y corregirlos con el fin de subir una tarea correctamente resuelta.

Como hemos dicho, la evaluación continua en el cuatrimestre y su motivación para trabajar por parte de un sector del alumnado se están reflejando en la acción tutorial por parte del equipo docente. El volumen de sesiones de tutorías en el presente año ha crecido considerablemente con respecto al de otros años en la ITIG para el cuatrimestre de Cálculo Numérico. Esta asistencia a las tutorías por parte de un sector del alumnado nos permite obtener gran información sobre la evolución de nuestros estudiantes.

También hemos indicado que la tutorización del estudiante es un mecanismo que tenemos para controlar que el trabajo que este entrega en las tareas (y correspondiente a la principal parte de la evaluación) ha sido realizada por él o ella o, en su defecto, que los comprende y es capaz de explicar lo que se está haciendo. Obviamente, no basta solo con tutorías para este control y, por eso, también nos hemos referido a actividades de control como las defensas orales del trabajo que el estudiante viene realizando.

Finalmente, resaltar que, en este trabajo, hemos querido enfatizar lo sumamente útil que resulta un paquete de cálculo simbólico para trabajar los problemas de nuestra asignatura. Eso se debe a que nos permite centrarnos en la evaluación concreta de los contenidos y procedimientos que estamos trabajando y no en la aplicación de meros cálculos y algoritmos “de lápiz y papel” que no son siquiera materia propia del temario de la asignatura. Los paquetes de cálculo simbólico nos permiten evitar que carencias en conceptos o procedimientos de etapas previas afecten de manera prioritaria o esencial a la evaluación de la

adquisición de los objetivos trabajados durante el curso. Es más, con el fin de ejemplificar estas afirmaciones, hemos mostrado cómo estamos evaluando los problemas al resolverlos con uno de estos paquetes usando un software informático, resaltándose los distintos aspectos que se evaluaban en el alumno o alumna durante la resolución del problema tratado computacionalmente.

Creemos que con este trabajo se muestra el valor y la importancia de la evaluación continua y la posibilidad de evaluar adecuadamente al alumnado y sus competencias durante el cuatrimestre con el trabajo realizado por el alumnado y no mediante una única actividad evaluativa consistente en un examen final. También pensamos que, con lo expuesto a lo largo del artículo, se consigue resaltar la importancia y utilidad como recurso didáctico y evaluativo de los paquetes de cálculos simbólicos (y de las TIC en general) siempre y cuando se replanteen las preguntas y actividades de evaluación que le proponemos a nuestro alumnado.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación 2005. *Libro Blanco del Título de Grado en Ingeniería Informática*. ANECA [Documento de Internet disponible en [http://www.aneca.es/var/media/150388/libroblanco\\_jun05\\_informatica.pdf](http://www.aneca.es/var/media/150388/libroblanco_jun05_informatica.pdf).]

Arbizu, F., Lobato, C., y del Castillo, L. 2005. “Algunos modelos de abordaje de la tutoría universitaria”. *Revista de Psicodidáctica* 1: 7-22.

Bermudo, S., Moreno, P., y Tenorio, A.F. 2006. “Una experiencia piloto en la Universidad Pablo de Olavide: “Fundamentos Matemáticos de la Informática I y II” y “Estadística” de la Ingeniería Técnica de Informática de Gestión”. *Actas de las I Jornadas Nacionales de Intercambio de Experiencias Piloto de Implantación de Metodologías ECTS*. España, 13-15 Septiembre 2006. Ed. V.L. Mateo Masa. Badajoz: Universidad de Extremadura. 1-8.

Contreras, A., Font, V., García, M., Luque, L., y Marcolini, B. 2005. “Aplicación del programa Matemática a las prácticas de cálculo en el primer año universitario”. *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática*. España, 8-10 Septiembre 2005. Ed. A.M. Maz Machado, B. Gómez Alfonso y M. Torralbo Rodríguez. Córdoba: SEIEM y Universidad de Córdoba. 271-282.

Hernández-Jiménez, B., Moreno Navarro, P., y Tenorio Villalón, A.F. 2008a. “La tutoría: un apoyo sustancial de la Estadística–Matemáticas en la Ingeniería Técnica en Informática de Gestión de la Universidad Pablo de Olavide”. *Seminario Internacional RED-U 2-08: “La acción tutorial en la Universidad del siglo XXI”*. España, 4-6 Febrero 2008. Ed. M. Zapata Ros. Murcia: Red-U. 1-8.

Hernández-Jiménez, B., Moreno Navarro, P., y Tenorio Villalón, A.F. 2008b. “¿Cómo se enfoca la metodología ECTS y la virtualización en las asignaturas de contenido estadístico-matemático de la Ingeniería Técnica en Informática de Gestión de la Universidad Pablo de Olavide?”. *Actas de las XIV Jornadas de Enseñanza universitaria de la Informática*. España, 9-11 Julio 2008. Ed. R. Peña Ros. Granada: LibroTeX. 377-384.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. 2003. “La integración del sistema universitario español en el Espacio Europeo de Enseñanza Superior”. Documento-marco [Documento de Internet disponible en <http://www.uco.es/organizacion/eees/documentos/normas-documentos/otros/Documento%20Marco%20EEES.pdf> ]

- Pérez Jiménez, A.J. 2005. “Algoritmos en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas”. *Unión* 1: 37-44.
- Sáenz Castro, C. 2001. “Una nueva función formativa: la tutoría telemática”. *Tarbiya: Revista de Investigación e Innovación Educativa* 29: 119-133
- Martín Caraballo, A.M., Paralera Morales, C., y Tenorio Villalón, A.F. 2010. “Evaluando una asignatura de contenido matemático mediante las competencias digitales”. *Actas del XIII Congreso sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas (XIII CEAM)*. España, 10-12 Septiembre 2010. Córdoba: SAEM Thales. 1-11.
- Salinas, J. 2004. “Innovación docente y uso de las TIC en la enseñanza universitaria”. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento (RSUC)* 1: 1-16.